Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра общей и теоретической физики

539(07)
Э456

В.К. Герасимов, Т.О. Миронова, Ю.Б. Пейсахов, Т.П. Привалова

ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2014

УДК 539.1(075.8) + 539.18 (075.8) + 535(075.8)
Э456

Одобрено
научно-методическим советом университета

Рецензенты:
Л.А. Песин, В.К. Усачев

Э456 **Элементы физики атома и атомного ядра. Руководство к решению задач**: учебное пособие для студентов вузов / В.К. Герасимов, Т.О. Миронова, Ю.Б. Пейсахов, Т.П. Привалова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 103 с.

Основное назначение учебного пособия – оказать помощь студентам очной и заочной форм обучения при выполнении контрольных работ по курсу общей физики. Дано краткое изложение теоретического материала и приведены примеры решения типовых задач по следующим разделам: электромагнитные колебания, волновая и квантовая оптика, теория атома водорода по Бору, элементы квантовой механики и ядерной физики.

Учебное издание предназначено для студентов, обучающихся по укрупненным группам специальностей и направлений подготовки в области образования «инженерное дело, технологии и технические науки».

УДК 539.1(075.8) + 539.18 (075.8) + 535(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение …….……..……..5
Список рекомендуемой литературы …….…….……5
Рекомендации к решению физических задач ……6

Часть 1
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1. Теоретическая часть
1.1. Уравнение и параметры гармонических колебаний ……...8
1.2. Уравнения колебаний заряда, тока и напряжения в идеальном колебательном контуре ……...8
1.3. Превращения энергии при электромагнитных колебаниях ……..9
1.4. Волновые процессы. Параметры и уравнение бегущей волны ……..10
1.5. Перенос энергии электромагнитной волной. Интенсивность ЭМВ …12

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Часть 2
ВОЛНОВАЯ ОПТИКА И КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

2. Теоретическая часть

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА …….....17

2.1. Интерференция света …….....17
2.1.1. Условия максимума и минимума интерференции …….....17
2.1.2. Интерференция света в тонких пленках …….....18
2.2. Дифракция света …….....21
2.2.1. Дифракция параллельных лучей на щели ……22
2.2.2. Дифракция плоской волны на дифракционной решетке ……..23
2.2.3. Разрешающая способность дифракционной решетки ……..25
2.2.4. Дифракция рентгеновских лучей на кристалле ……25
2.3. Поляризация света ……26
2.3.1. Естественный и поляризованный свет ……26
2.3.2. Получение и анализ поляризованного света. Закон Малюса ……...28
2.3.3. Поляризация света при отражении от диэлектрика. Закон Брюстера ……...29
2.3.4. Двойное лучепреломление в кристаллах. Искусственная оптическая анизотропия ……30
2.3.5. Вращение плоскости поляризации оптически активными веществами ……31

КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ ……31
2.4. Тепловое излучение …….....31
2.4.1. Характеристики теплового излучения ……...32
2.4.2. Тепловое равновесие. Закон Кирхгофа ……..33

2.4.3. Экспериментальный спектр теплового излучения. Закон Стефана – Больцмана. Законы Вина ……34
2.4.4. Квантовая природа теплового излучения. Формула Планка ….....35
2.5. Фотоэлектрический эффект
2.5.1. Виды фотоэффекта. Законы внешнего фотоэффекта ……...36
2.5.2. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта ……...36
2.6. Фотоны. Давление света ……38
2.7. Эффект Комптона ……39

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

3.1. План решения задач по теме «Интерференция света» …….40
3.2. План решения задач по теме «Дифракция света» ……46
3.3. План решения задач по теме «Поляризация света» ……..52
3.4. План решения задач по теме «Тепловое излучение» ……..57
3.5. План решения задач по теме «Фотоэффект» ……...60
3.6. План решения задач по теме «Фотоны. Давление света. Эффект Комптона» ……..64

Часть 3
ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И АТОМНОЙ ФИЗИКИ

4. Теоретическая часть
4.1. Теория атома водорода по Бору ……...71
4.1.1. Планетарная модель атома. Постулаты Бора ……...71
4.1.2. Энергетические уровни и спектр излучения атома водорода ……...72
4.2. Элементы квантовой механики
4.2.1. Корпускулярно-волновая природа материи. Волна де Бройля. Дифракция электронов …….....74
4.2.2. Соотношение неопределенностей …….....75

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

5.1. План решения задач по теме «Теория атома водорода по Бору» 77
5.2. План решения задач по теме «Элементы квантовой механики» 82

Часть 4
ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

6. Теоретическая часть
6.1. Размер, состав и заряд атомного ядра ……...91
6.2. Дефект массы и энергия связи ядра …….....91
6.3. Ядерные реакции. Энергия реакции ……..92
6.4. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада ……...93
6.5. Активность радиоактивного вещества ……94

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7.1. План решения задач по теме «Атомное ядро, энергия связи, энергия ядерной реакции» …….95
7.2. План решения задач по теме «Радиоактивность» ……...97

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие адресовано студентам вузов очной и заочной форм обучения и является продолжением аналогичных изданий «Механика и молекулярная физика» и «Электромагнетизм». Учебное пособие имеет целью оказать помощь студентам заочной формы обучения в выполнении контрольных работ (КР) по курсу физики для технических вузов и технических специальностей университетов: как в решении задач, так и в оформлении решений при написании контрольных работ.

Требования к оформлению решения задач контрольных работ

1. Приводите в своей тетради полный текст задачи, а затем краткое условие задачи, выписывая заданные и определяемые величины с использованием общепринятых обозначений.
2. В решении задачи всегда приводите рисунок, график или схему.
3. Решение задачи сопровождайте краткими, но исчерпывающими пояснениями: а) назовите используемый для решения закон, б) приведите его словесную и математическую формулировки в общем виде, в) объясните правомерность применения закона и уточните формулу закона в условиях данной задачи, г) назовите величины, входящие в формулы, в том числе физические постоянные.
4. Каждую задачу стремитесь решать в общем виде, не делая промежуточных вычислений; решение задачи завершайте расчетной формулой определяемой величины.
5. Вычисляя, в расчетную формулу обязательно подставьте значения данных и табличных величин, предварительно переведя их в систему СИ.

Учебное пособие соответствует учебной программе следующих направлений: 140100 Теплоэнергетика и теплотехника, 140400 Электроэнергетика и электротехника, 150400 Металлургия, 150700 Машиностроение, 151900 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительного производства, 220400 Управление в технических системах, 230100 Информатика и вычислительная техника.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Академия, 2010. – 557 с.

2. Писарев, Н.М. Физика: Курс лекций для студентов инженерных специальностей вузов / Н.М. Писарев; под ред. Г.П. Вяткина. – Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1997. – Ч.2. – 299 с.

3. Детлаф, А.А. Курс физики: учебное пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Академия, 2008. – 719 с.

4. Савельев, И.В. Курс физики Т.2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика: учебное пособие для втузов: в 3 т. / И.В. Савельев. – СПб. и др.: Лань, 2008. – 462 с.

5. Савельев, И.В. Курс физики Т.3: Квантовая оптика. Физика твердого тела. Атомная физика. Физика атомного ядра и элементарных частиц: учебное пособие для втузов: в 3 т. / И.В. Савельев. – СПб. и др.: Лань, 2007. – 317 с.

6. Чертов, А.Г. Задачник по физике: учебное пособие для втузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Издательство Физматлит, 2008. – 640 с.

7. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике: учебное пособие для втузов / И.Е. Иродов. – СПб. и др.: Лань, 2009. – 431 с.

8. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики: учебное пособие для втузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям / Е.В. Фирганг. – СПб. и др.: Лань, 2009. – 347 с.

9. Герасимов, В.К. Физика. Методические указания к выполнению контрольных работ / В.К. Герасимов, Т.О. Миронова, Ю.Б. Пейсахов, Т.П. Привалова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 110 с.

10. Гришкевич, А.Е. Оптика: учебное пособие к выполнению лабораторных работ / А.Е. Гришкевич, Т.Н. Хоменко, В.Г. Речкалов, А.Е. Чудаков; под ред. В.П. Бескачко. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 60 с.

РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Текст задачи следует внимательно прочитать, чтобы выяснить, какое физическое явление рассматривается в задаче. Полезно изобразить схематический чертеж или рисунок.

2. Ознакомьтесь с основными формулами для данного явления. Выясните, можно ли применить *законы сохранения* (*ЗСИ, ЗСЗ, ЗСЭ*) – для этого проверьте, выполняются ли в задаче условия применения закона. Выпишите законы и формулы, пригодные для решения данной задачи.

3. Запишите краткое условие задачи, выбирая для обозначения данных и искомых величин символы, которые будут использованы в формулах.

4. Задачу следует решать, как правило, в общем виде, чтобы получить расчетную формулу определяемой величины, содержащую символы заданных величин и физических постоянных.

5. Вычисление определяемой величины начинайте с подстановки в расчетную формулу значений величин. При этом следует помнить, что большинство физических величин имеют свои единицы измерения. Полезно записывать их при подстановке в формулу, чтобы убедиться, что все величины взяты в единицах СИ. Только при вычислении отношений, например, $\frac{m_2}{m_1}$, $\frac{E_2}{E_1}$ и т. п. можно подставлять значения величин в любых,

но одинаковых единицах, т. е. не обязательно в СИ. Если определяемых величин несколько, то вывод расчетной формулы для следующей величины начинайте, *закончив вычисление* предыдущей.

6. Полезно выполнять проверку расчетной формулы на совпадение единиц измерения левой и правой части равенства. Несовпадение единиц указывает на ошибку в расчетной формуле.

7. Вычисление и запись результата делайте с точностью до двух или трех (не более) значащих цифр. Незначащие нули записывайте в виде сомножителя $10^{\pm n}$. При этом, если показатель степени n соответствует приставке, используйте её: например, $W = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$ Дж $= 53 \cdot 10^{-6}$ Дж $= 53$ мкДж; $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м $= 0{,}55 \cdot 10^{-6}$ м $= 0{,}55$ мкм $= 550$ нм. Помните, что точность результата вычислений не может быть выше, чем точность исходных данных.

8. Оцените разумность полученного значения искомой величины одним из следующих путей: а) по физическому смыслу; б) сравнением с табличным значением или, по порядку величины, с числами, приведенными в рекомендациях к решению задач по данной теме.

Часть 1

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1. Теоретическая часть

1.1. Уравнение и параметры гармонических колебаний

Колебаниями называют движения или процессы, ***повторяющиеся во времени.*** При периодических колебаниях значения физических величин повторяются через равные промежутки времени.

Свободные (собственные) колебания происходят за счет сообщенной в начальный момент энергии при отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

Простейшим типом колебаний являются ***гармонические колебания***, при которых колеблющаяся величина s изменяются со временем t по закону синуса или косинуса (по гармоническому закону):

$$s = s_{\mathrm{m}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где s_{m} – ***амплитуда колебаний*** (максимальное значение колеблющейся величины); ω_0 – ***циклическая частота***; $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – ***фаза колебаний***; φ_0 – начальная фаза (в начальный момент времени $t = 0$).

Период колебаний T – промежуток времени, через который повторяются колебания. Связь периода колебаний с циклической частотой определяется следующей формулой:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (2)$$

Частота колебаний ν (число полных колебаний за 1 секунду) – это величина, обратная периоду:

$$\nu = \frac{1}{T}; \quad \rightarrow \quad \omega = 2\pi\nu. \qquad (3)$$

1.2. Уравнения колебаний заряда, тока и напряжения в идеальном колебательном контуре

Электромагнитные колебания – такие колебания, в которых периодически изменяются электрические величины: заряд Q, ток I и напряжение U. Собственные электромагнитные колебания совершаются в электрической цепи, называемой ***колебательный контур***. Он содержит последовательно соединенные конденсатор емкостью C, катушку индуктивностью L и резистор сопротивлением R. Гармонические колебания (незатухающие) происходят ***в идеальном колебательном контуре (ИКК)***, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R \approx 0$); электрическая схема ИКК приведена на рис. 1. Для возбуждения колебаний в ИКК конденсатор C предварительно заряжают, а затем замыкают на катушку L.

Собственные электромагнитные колебания заряда конденсатора Q описываются уравнением (1):

$$Q = Q_{\text{m}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (4)$$

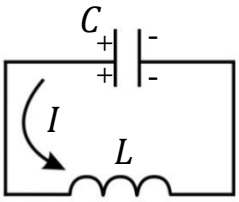


Рис. 1

где Q – мгновенное значение заряда (в данный момент времени t); Q_{m} – амплитуда заряда; ω_0 – циклическая частота, равная числу колебаний за 2π секунд.

Ток I, протекающий в контуре при разряде и последующей перезарядке конденсатора, также колеблется по гармоническому закону:

$$I = \frac{\text{d}Q}{\text{d}t} = -Q_{\text{m}}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (5)$$

Согласно закону колебаний тока (5) амплитуда тока $I_{\text{m}} = Q_{\text{m}}\omega_0$.

Собственная частота ИКК ω_0 и период собственных колебаний зависят от параметров контура L и C и определяются по следующим формулам:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (6)$$

Напряжение U на конденсаторе изменяется пропорционально заряду его обкладок Q, в соответствии с формулой $CU = Q$. С учетом закона колебаний заряда (4) колебания напряжения описываются уравнением:

$$U = \frac{Q}{C}; \quad \rightarrow \quad U = \frac{Q_{\text{m}}}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_{\text{m}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (7)$$

Здесь $U_{\text{m}} = \frac{Q_{\text{m}}}{C}$ – амплитуда напряжения.

Из формул (4), (5) и (7) следует, что в те моменты времени, когда заряд и напряжение на обкладках конденсатора максимальные, ток в катушке индуктивности равен нулю.

1.3. Превращения энергии при электромагнитных колебаниях

Между обкладками конденсатора существует электрическое поле (ЭП), энергия которого $W_{\text{эл}} = \frac{Q^2}{2C}$. В катушке, по которой протекает ток I, создается магнитное поле (МП) с энергией $W_{\text{магн}} = \frac{LI^2}{2}$. Полная энергия колебательного контура равна сумме этих энергий:

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{магн}} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}. \qquad (8)$$

Полная энергия колебаний остается постоянной, так как тепловые потери энергии при протекании тока отсутствуют: $\Delta W = I^2 Rt \approx 0$, благодаря тому, что активное сопротивление контура $R \approx 0$. Но в контуре при колебаниях происходят взаимные превращения энергии электрического и магнитного полей. Графики изменения со временем колеблющихся величин в ИКК представлены на рис. 2.

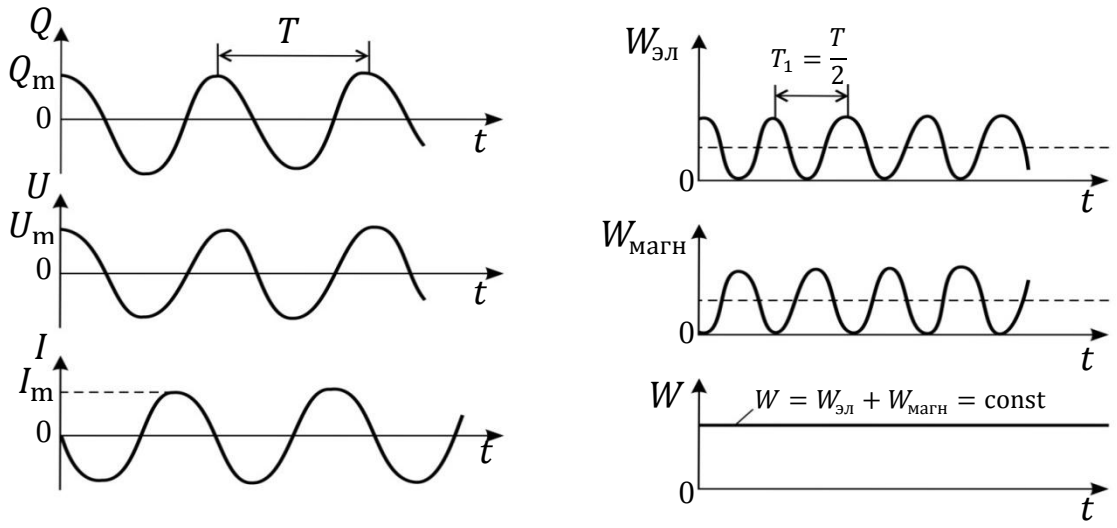


Рис. 2

1.4. Волновые процессы. Параметры и уравнение бегущей волны

Волновой процесс, или волна – процесс распространения колебаний некоторой величины ψ. ***Электромагнитная волна (ЭМВ)*** – распространение в пространстве переменного электромагнитного поля. Волна называется ***гармонической***, если колебания характеристик полей: напряженности ЭП $\vec{E}$ и напряженности МП $\vec{H}$ являются гармоническими. В ЭМВ колеблющаяся величина ψ – это $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

В гармонической волне функция $\psi(x,t)$ является 1) <u>*периодической во времени*</u>, т. е. в каждой точке пространства колебания величины ψ происходят по гармоническому закону с периодом T (рис. 3а), и 2) <u>*периодической в пространстве*</u> – фаза колебаний повторяется в пространстве с периодом λ, называемым длиной волны (рис. 3б).

Длина волны λ равна расстоянию, которое проходит волна за период колебаний:

$$\lambda = vT,$$

где период $T = \frac{1}{\nu}$; в результате

$$\lambda\nu = v. \qquad (9)$$

Здесь v – фазовая скорость волны (скорость переноса фазы колебаний); $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Бегущей называют такую волну, которая (в отличие от стоячей волны) переносит в пространстве энергию. По форме фронта волна может быть ***плоской*** или ***сферической***; для этих волн фронт волны, соответственно, плоскость и сфера.

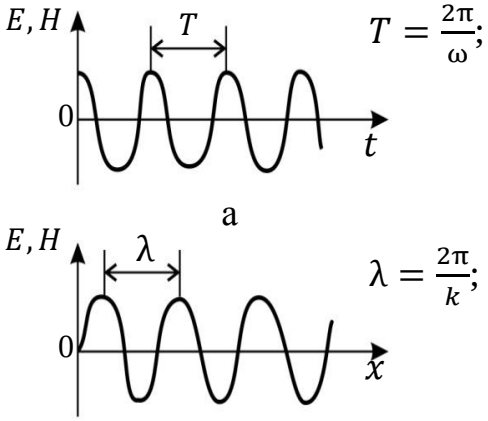


Рис. 3

Фронт волны – это поверхность, которая содержит точки с одинаковой фазой колебаний и отделяет область, где есть колебания ЭП и МП от той области пространства, где их пока нет в данный момент времени.

Уравнение волны – это функция $\psi(x, y, z, t)$, которая дает закон колебаний $\psi(t)$ в любой точке пространства с координатами x, y, z. Уравнение плоской гармонической электромагнитной волны, бегущей вдоль оси x – это функция $\psi(x, t)$, которая имеет следующий вид:

$$E_y(x, t) = E_\mathrm{m} \cos(\omega t - kx);$$

$$H_z(x, t) = H_\mathrm{m} \cos(\omega t - kx). \qquad (10)$$

Здесь E_m и H_m – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей ЭМВ; ω – циклическая частота волны; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ – волновое число; v – фазовая скорость волны; $(\omega t - kx)$ – фаза плоской волны.

Уравнения волны (10) выявляют следующие свойства ЭМВ. Эта волна является ***поперечной***: колеблющиеся векторы $\overrightarrow{E_y}$ и $\overrightarrow{H_z}$ перпендикулярны направлению распространения волны – оси x и скорости волны $\vec{v}$. Напряженности полей E_y и H_z колеблются в одинаковой фазе, при этом их максимумы E_m и H_m достигаются одновременно и в одной и той же точке пространства; также и нули $(E_y = H_z = 0)$ достигаются одновременно. Мгновенная (в данный момент времени t) картина полей в ЭМВ, бегущей вдоль оси x, показана на рис. 4.

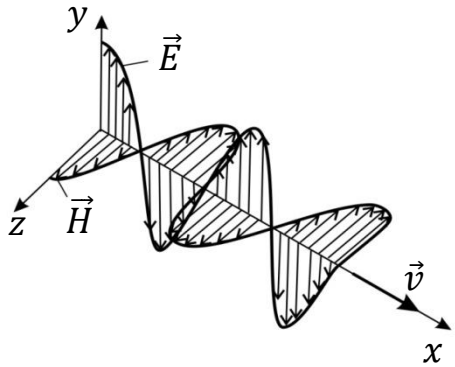


Рис. 4

Амплитуды напряженности ЭП и индукции МП в электромагнитной волне связаны соотношением:

$$E_\mathrm{m} = vB_\mathrm{m}, \qquad (11)$$

где B_m – амплитуда индукции магнитного поля; v – фазовая скорость ЭМВ. В вакууме (и в воздухе) ее величина равна скорости света:

$$v = c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

При распространении ЭМВ в среде скорость волны $v < c$, ***зависит от свойств среды*** и определяется следующей формулой:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

1.5. Перенос энергии электромагнитной волной. Интенсивность ЭМВ

Перенос энергии волной характеризует величина ϕ_W – ***поток энергии*** или ***мощность излучения***:

$$\phi_W = \frac{W}{t},$$

где W – энергия, переносимая волной за время t через площадку S. Величина потока энергии ЭМВ пропорциональна напряженностям полей:

$$\phi_W = EH \cdot S.$$

С учетом уравнений волны (10) получаем следующее соотношение:

$$\phi_W = E_\mathrm{m} H_\mathrm{m} \cos^2(\omega t - kx) \cdot S. \qquad (12)$$

Таким образом, поток энергии ЭМВ изменяется с течением времени с высокой частотой, равной 2ω $\left(\text{так как } \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)$; для света величина $2\omega \approx 10^{15}\ \text{с}^{-1}$. Приборы (и глаз человека) фиксируют среднее значение потока энергии ЭМВ. В связи с этим используют величину <u>*среднего значения плотности потока энергии*</u>:

$$I = \left\langle \frac{\phi_W}{S} \right\rangle; \qquad \text{Единица } I\text{: } 1\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \qquad (13)$$

Здесь I – ***интенсивность волны*** (излучения) – это средняя мощность излучения, проходящего через площадку $S = 1\ \text{м}^2$. Учитывая, что среднее значение $\langle \cos^2\varphi \rangle = \frac{1}{2}$, из формул (12) и (13) находим интенсивность электромагнитной волны:

$$I = \frac{1}{2} E_\mathrm{m} H_\mathrm{m}; \quad \text{так как величина } E_\mathrm{m} \sim H_\mathrm{m}, \text{ то } I \sim E_\mathrm{m}^2.$$

Таким образом, <u>*интенсивность ЭМВ (и света) пропорциональна квадрату амплитуды напряженности электрического поля волны*</u>. Приведем некоторые значения интенсивности электромагнитных волн (по порядку величины): 1) солнечная постоянная $I_{\text{Солн}} = 1{,}4 \cdot 10^3\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$; 2) лазерное излучение – $I_{\text{лаз}} > 10^{17}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$, так как сечение S лазерного луча малое; 3) радиоволна – $I_{RV} \approx 10^{-6}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. В идеальном колебательном контуре (ИКК) заряд конденсатора емкостью $C = 10$ пФ изменяется по закону $Q(t) = 2\cos\left(\pi \cdot 10^7\, t\right)$, мкКл. Определите циклическую частоту ω, амплитуду колебаний заряда Q_m, максимальный ток в контуре I_m и индуктивность катушки L.

Дано

ИКК: $R \approx 0$;

$C = 10$ пФ;

$Q(t) = 2\cos\left(\pi \cdot 10^7\, t\right)$, мкКл.

$\omega_0 - ?$ $Q_\mathrm{m} - ?$ $I_\mathrm{m} - ?$ $L - ?$

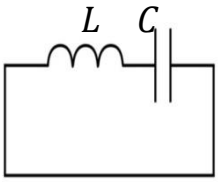


Рис. 5

Решение

Идеальный колебательный контур – это цепь, состоящая из конденсатора и катушки индуктивности с малым сопротивлением ($R \approx 0$) (рис. 5). В такой цепи закон гармонических колебаний заряда на обкладках конденсатора имеет следующий вид:

$$Q = Q_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (1)$$

Сравним этот закон с заданным уравнением колебаний заряда:

$$Q(t) = 2\cos(\pi \cdot 10^7 t)\text{, мкКл.} \qquad (2)$$

Из сопоставления уравнений (1) видим, что собственная частота контура

$$\omega_0 = \pi \cdot 10^7\ \text{с}^{-1} = 3{,}14 \cdot 10^7\ \text{с}^{-1};$$

а амплитуда колебаний заряда $Q_\mathrm{m} = 2$ мкКл.

Чтобы найти амплитуду тока I_m, необходимо получить закон колебаний тока в контуре. Для этого воспользуемся тем, что переменный ток, по определению:

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q'(t).$$

В соответствии с этим определением, продифференцируем уравнение (2):

$$I = 2 \cdot \pi \cdot 10^7(-\sin(\pi \cdot 10^7 t))\text{, мкА.} \qquad (3)$$

Максимальный ток I_m будет достигаться в такие моменты времени, для которых $\sin(\pi \cdot 10^7 t) = 1$. При этом, согласно уравнению (3), величина $I_\mathrm{m} = 2 \cdot \pi \cdot 10^7$ мкА $= 6{,}28 \cdot 10^1$ А $= 62{,}8$ А.

Более общий путь определения амплитуды тока состоит в дифференцировании закона гармонических колебаний заряда (1):

$$I = Q_\mathrm{m}\omega_0(-\sin(\omega_0 t + \varphi_0)). \qquad (4)$$

Записываем полученный закон гармонических колебаний тока в общем виде:

$$I = -I_\mathrm{m}\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (5)$$

Сравнивая уравнения (4) и (5), получаем формулу, связывающую амплитуды тока и заряда в любом ИКК:

$$I_\mathrm{m} = Q_\mathrm{m}\omega_0. \qquad (6)$$

Вычисляя по этой формуле, получаем тот же результат:

$$I_{\text{m}} = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{7}\ \text{с}^{-1} = 62{,}8\ \text{А}.$$

Собственная частота идеального колебательного контура зависит от его параметров L и C следующим образом:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \rightarrow \quad {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}. \tag{7}$$

Из этой формулы получаем расчетную формулу индуктивности катушки L:

$$L = \frac{1}{{\omega_0}^2 C}. \tag{8}$$

Вычисляем величину индуктивности:

$$L = \frac{1}{(\pi)^2 \cdot 10^{14}\ \text{с}^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф}} = 0{,}10 \cdot 10^{-3}\ \text{Гн} = 0{,}10\ \text{мГн}.$$

Задача 2. Идеальному колебательному контуру (ИКК), состоящему из конденсатора емкостью $C = 2$ пФ и катушки индуктивностью $L = 0{,}5$ мкГн, передали энергию $W = 1$ мкДж. Определите амплитудные значения заряда Q_{m}, напряжения U_{m} и тока I_{m} в контуре, а также действующие значения тока $I_{\text{д}}$ и напряжения $U_{\text{д}}$.

Дано

$C = 2$ пФ;
$L = 0{,}5$ мкГн;
$W = 1$ мкДж;

$Q_{\text{m}} - ?$ $U_{\text{m}} - ?$ $I_{\text{m}} - ?$
$I_{\text{д}} - ?$ $U_{\text{д}} - ?$

Решение

Энергия, сообщенная колебательному контуру, например, путем зарядки конденсатора (или возбуждением в катушке индукционного тока), содержится в двух силовых полях. Электрическое поле конденсатора, имеющего в данный момент времени t заряд $Q(t)$, содержит энергию

$$W_{\text{эл}}(t) = \frac{Q^2(t)}{2C}; \tag{1}$$

Магнитное поле катушки при протекании в ней тока $I(t)$ также имеет энергию, зависящую от времени:

$$W_{\text{магн}}(t) = \frac{LI^2(t)}{2}. \tag{2}$$

Полная энергия ИКК равна сумме этих энергий:

$$W = W_{\text{эл}}(t) + W_{\text{магн}}(t) = \frac{Q^2(t)}{2C} + \frac{LI^2(t)}{2}. \tag{3}$$

Запишем закон гармонических колебаний заряда конденсатора, полагая, что начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$:

$$Q(t) = Q_{\text{m}} \cos \omega_0 t. \tag{4}$$

Дифференцируя уравнение (4), получаем закон колебаний тока в контуре:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -Q_{\text{m}} \omega_0 \sin \omega_0 t = -I_{\text{m}} \sin \omega_0 t. \tag{5}$$

Подставим мгновенные значения заряда и тока по уравнениям (4) и (5) в формулу (3) энергии ИКК:

$$W = \frac{{Q_\text{m}}^2}{2C}\cos^2\omega_0 t + \frac{L{I_\text{m}}^2}{2}\sin^2\omega_0 t. \qquad (6)$$

В те моменты времени t_n, когда фаза колебаний $\omega_0 t_n = 0;\ \pi;\ 2\pi\ \ldots\ n\pi$, имеем $\cos^2(\omega_0 t_n) = 1$, а $\sin^2(\omega_0 t_n) = 0$; при этом полная энергия колебаний

$$W = \frac{{Q_\text{m}}^2}{2C} = (W_\text{эл})_\text{max}. \qquad (7)$$

В другие моменты времени t_m, в которые фаза колебаний $\omega_0 t_m = \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\ \ldots (2m+1)\frac{\pi}{2}$, имеем $\cos^2(\omega_0 t_m) = 0$, а $\sin^2(\omega_0 t_m) = 1$; при этом полная энергия колебаний

$$W = \frac{L{I_\text{m}}^2}{2} = (W_\text{магн})_\text{max}. \qquad (8)$$

Таким образом, когда заряд конденсатора и его энергия максимальны, ток в контуре равен нулю и энергия магнитного поля катушки также равна нулю; и наоборот, – при полностью разряженном конденсаторе ток в цепи и энергия магнитного поля этого тока максимальны.

Из формулы (7) получаем следующую расчетную формулу амплитуды заряда конденсатора:

$$Q_\text{m} = \sqrt{2CW}. \qquad (9)$$

Вычисляем максимальный заряд конденсатора по этой формуле:

$$Q_\text{m} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\ \text{Дж}} = 2 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл} = 2\ \text{нКл}.$$

Напряжение на конденсаторе пропорционально его заряду:

$$CU = Q; \quad \rightarrow \quad CU_\text{m} = Q_\text{m}; \quad \rightarrow \quad U_\text{m} = \frac{Q_\text{m}}{C}, \qquad (10)$$

т. е. амплитуды колебаний заряда и напряжения достигаются одновременно. Вычислим максимальное напряжение на конденсаторе по формуле (10):

$$U_\text{m} = \frac{2 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл}}{2 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф}} = 1 \cdot 10^3\ \text{В} = 1\ \text{кВ}.$$

Расчетную формулу максимального тока в контуре найдем с помощью формулы (8):

$$I_\text{m} = \sqrt{\frac{2W}{L}}. \qquad (11)$$

Вычисляем амплитуду колебаний тока по формуле (11):

$$I_\text{m} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 10^{-6}\ \text{Дж}}{0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{Гн}}} = 2\ \text{А}.$$

Действующие (эффективные) значения тока и напряжения в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем максимальные значения:

$$I_{\text{д}} = \frac{I_{\text{m}}}{\sqrt{2}}; \quad U_{\text{д}} = \frac{U_{\text{m}}}{\sqrt{2}}. \tag{12}$$

Вычислим действующие значения тока в цепи и напряжения на конденсаторе:

$$I_{\text{д}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\ \text{А} = 1{,}4\ \text{А}; \qquad U_{\text{д}} = \frac{1\cdot 10^3}{\sqrt{2}}\ \text{В} = 700\ \text{В} = 0{,}7\ \text{кВ}.$$

Задача 3. В излучающей радиоантенне ток изменяется по закону $I = 10\ \sin(4\pi \cdot 10^7\ t)$, мА. Определите циклическую частоту ω, частоту ν и длину волны λ излучающейся электромагнитной волны (ЭМВ).

Дано

$I = 10\ \sin(4\pi \cdot 10^7\ t)$, мА;

$\omega - ?\quad \nu - ?\quad \lambda - ?$

Решение

Частота излучаемой ЭМВ равна частоте электромагнитных колебаний в излучателе, т. е. в радиоантенне. Запишем закон гармонических колебаний тока в антенне (колебательном контуре) в следующем виде:

$$I = -I_{\text{m}} \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{1}$$

Закон колебаний тока в данной радиоантенне:

$$I = 10\ \sin(4\pi \cdot 10^7\ t),\ \text{мА}. \tag{2}$$

Сравнивая уравнения (1) и (2), отметим, что начальная фаза колебаний заряда, тока и напряжения в антенне $\varphi_0 = \pi$, а циклическая частота колебаний этих величин $\omega = 4\pi \cdot 10^7\ \text{с}^{-1} = 1{,}26 \cdot 10^8\ \text{с}^{-1}$.

Определим частоту колебаний ν из формулы соотношения частот:

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \rightarrow \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}; \tag{3}$$

Вычислим частоту колебаний величин Q, I и U в антенне:

$$\nu = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot 10^7\ \text{Гц} = 2 \cdot 10^7\ \text{Гц} = 20\ \text{МГц}.$$

Длина волны λ и частота колебаний ν электрического и магнитного полей в ЭМВ связаны следующим образом:

$$\lambda\nu = v; \quad \rightarrow \quad \lambda\nu = c; \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\nu}. \tag{4}$$

Здесь v – фазовая скорость ЭМВ; в воздухе, как и в вакууме, ее величина равна скорости света c.

Вычислим по формуле (4) длину волны λ радиоволны, излучаемой данной антенной:

$$\lambda = \frac{3\cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{2\cdot 10^7\ \frac{1}{\text{с}}} = 15\ \text{м}.$$

Часть 2

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА И КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

2.1. Теоретическая часть

Согласно современным представлениям свет имеет двойственную корпускулярно-волновую природу. В явлениях интерференции, дифракции, поляризации и дисперсии света проявляются его волновые свойства.

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Видимый свет – это электромагнитная волна с длиной волны λ в интервале от 400 до 750 нм (0,4 ... 0,75 мкм). Обычно рассматривают электрическое поле (ЭП) световой волны напряженностью $\vec{E}$, так как именно *ЭП действует на электроны в атомах вещества* и через посредство этих электронов – на все датчики (сетчатку глаза, фотопленку, фоторезисторы и др.). Вектор $\vec{E}$ называют ***световой вектор***.

Уравнение плоской монохроматической (с определенной длиной волны λ) световой волны, бегущей вдоль оси x:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_{\mathrm{m}}}\cos(\omega t - kx), \quad \text{или} \quad \vec{E} = \overrightarrow{E_{\mathrm{m}}}\cos\varphi. \qquad (1)$$

Здесь $\varphi = (\omega t - kx)$ – фаза колебаний; ее значение определяет величину и направление светового вектора $\vec{E}$.

Когерентные волны – это волны *с одинаковой частотой* ω и с постоянной разностью фаз.

2.1. Интерференция света

Интерференция света – явление, которое наблюдается при наложении двух *когерентных волн* ($\omega_1 = \omega_2$); при этом происходит *перераспределение энергии световых волн* в пространстве с образованием максимумов интенсивности света ($I_{\max}$) в одних местах и минимумов ($I_{\min}$) – в других. В интерференционной картине на экране максимумы интенсивности (светлые полосы) чередуются с минимумами интенсивности (темные полосы).

2.1.1. Условия максимума и минимума интерференции

При сложении двух колебаний амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (\omega_1 - \omega_2)t - (k_1x_1 - k_2x_2) = k_2x_2 - k_1x_1, \qquad (1)$$

так как $\omega_1 = \omega_2$. Здесь $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; длина волны λ зависит от показателя преломления n среды, в которой распространяется волна; величина λ в n раз меньше, чем длина волны λ_0 в вакууме:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \qquad (2)$$

С учетом этого соотношения разность фаз колебаний светового вектора двух волн в точке наблюдения M, согласно формуле (1):

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2x_2 - n_1x_1); \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta L. \qquad (3)$$

Здесь $\Delta L = (L_2 - L_1)$ – ***оптическая разность хода*** волн; $L = nx$ – ***оптическая длина пути***; это произведение геометрического пути волны x (от источника света до точки наблюдения) на показатель преломления n среды, в которой это расстояние пройдено.

<u>*Условие максимумов интенсивности*</u> ($I_{\max}$) света в точке наблюдения M:

$$\Delta\varphi = k \cdot 2\pi; \quad \rightarrow \quad \Delta L = k\lambda_0; \quad \text{где } k = 0; 1; 2 \ldots \qquad (4)$$

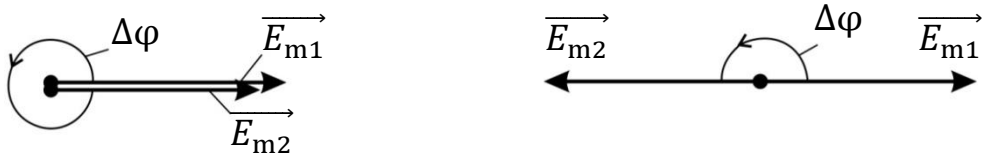
т. е. колебания световых векторов двух волн $\overrightarrow{E_1}$ и $\overrightarrow{E_2}$ в точке M происходят в одинаковой фазе, при этом в любой момент времени $\overrightarrow{E_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{E_2}$.

<u>*Условие минимумов интенсивности*</u> ($I_{\min}$) света в точке M:

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi; \quad \rightarrow \quad \Delta L = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}; \quad k = 0; 1;\ 2\ldots \qquad (5)$$

т. е. колебания складываемых световых векторов $\overrightarrow{E_1}$ и $\overrightarrow{E_2}$ в точке M происходят в противофазе, при этом в любой момент времени t $\overrightarrow{E_1} \downarrow\uparrow \overrightarrow{E_2}$.

Отметим, что при сложении двух колебаний на векторной диаграмме (где колебание изображают вращающимся *вектором амплитуды* $\overrightarrow{E_{\text{m}}}$) разность фаз колебаний $\Delta\varphi$ – это угол между векторами $\overrightarrow{E_{\text{m}1}}$ и $\overrightarrow{E_{\text{m}2}}$, а амплитуда результирующего колебания $\overrightarrow{E_{\text{m}}} = \overrightarrow{E_{\text{m}1}} + \overrightarrow{E_{\text{m}2}}$ (равна сумме векторов амплитуд). Условию максимумов интенсивности (4) соответствует рис. 6 а, а условию минимумов (5) – рис. 6 б.



$(E_{\text{m}})_{\max} = E_{\text{m}1} + E_{\text{m}2}$; $\qquad$ $(E_{\text{m}})_{\min} = E_{\text{m}1} - E_{\text{m}2} \approx 0$;

а $\qquad$ б

Рис. 6

2.1.2. Интерференция света в тонких пленках

Интерференционная картина возникает при наложении двух лучей, отраженных от двух поверхностей тонкой пленки.

а) плоскопараллельная пластинка (пленка)

На прозрачную пленку с показателем преломления n и толщиной d падает нормально монохроматическая волна с длиной волны λ_0 (рис. 7). В точке падения A луч разделяется на два: отраженный луч 1 и преломленный луч AB. На второй поверхности пленки – в точке B, луч

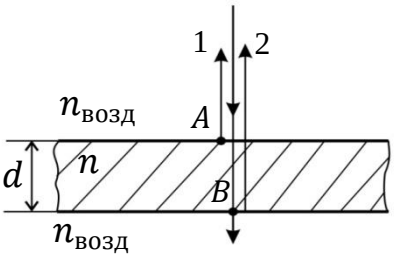


Рис. 7

также разделяется на отраженный луч 2 и преломленный луч, проходящий в воздух. Отраженные лучи 1 и 2 получены из одного падающего, поэтому они когерентны и при их наложении получается не зависящая от времени интенсивность отраженного света. Оптическая разность хода лучей 1 и 2, интерферирующих в отраженном свете:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 2dn - \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (7)$$

Здесь слагаемое $\frac{\lambda_0}{2}$ вызвано отражением 1-го луча от пленки, для которой $n > n_{возд}$, так как *при отражении волны от оптически более плотной среды* (с большим показателем преломления) световой вектор $\vec{E}$ *изменяет фазу на* π, что эквивалентно прохождению этим лучом $L_{доп} = \frac{\lambda_0}{2}$.

Если величина ΔL, найденная по формуле (7), удовлетворяет условию максимумов интенсивности (5): $\Delta L = k\lambda_0$, т. е. равна целому числу длин волн, то в отраженном свете пленка будет окрашенной в тот цвет, который соответствует длине волны λ_0.

Если же найденная величина ΔL равна нечетному числу полуволн $\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)$, то выполняется условие I_{min} (6), следовательно, пленка в отраженном свете будет темной, при этом вся энергия падающей волны проходит сквозь пленку.

б) просветляющая пленка в оптических приборах

В оптических приборах (фотоаппарат, очки, бинокль, телескоп и др.) требуется, чтобы энергия света, падающего на линзу объектива, проходила в прибор, а отраженный луч не уносил бы энергию. Для этого на линзу объектива наносят просветляющую пленку (рис. 8) с показателем преломления $n_{пл} < n_л$, где $n_л$ – показатель преломления материала линзы.

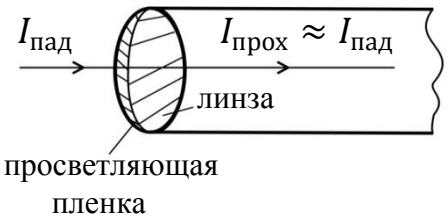


Рис. 8

Обычно $n_{пл} = \sqrt{n_л}$, чтобы амплитуды отраженных лучей $E_{m1} \approx E_{m2}$. Толщину пленки d подбирают из условия минимума интерференции (I_{min} в отраженном свете):

$$\Delta L = 2d \cdot n_{пл} = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2},$$

где $k = 0;\ 1;\ 2\ \ldots$. В оптической разности хода отраженных лучей 1 и 2

отсутствует слагаемое $\frac{\lambda_0}{2}$, так как и 1-й, и 2-й луч отражается от оптически более плотной среды с изменением фазы обоих лучей на π. Расчет величины d выполняют для света с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}55$ мкм (зеленый цвет), интенсивность которого наибольшая в солнечном свете. Наименьшая толщина просветляющей пленки (при $k = 0$): $d_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n_{\text{пл}}}$, что по порядку величины составляет $\approx 0{,}1$ мкм.

в) пленка переменной толщины (оптический клин)

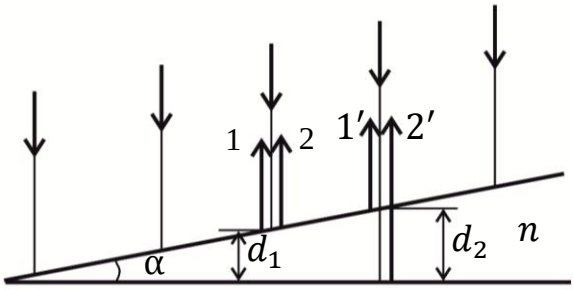


Рис. 9

В отраженном свете интерферируют лучи 1 и 2, отраженные от верхней и нижней поверхностей клина (рис. 9). Так как угол α обычно мал ($\alpha \approx 1'$), то в случае нормального падения света лучи 1 и 2 отражаются практически по нормали.

Оптическая разность хода этих лучей определяется формулой (7):

$$\Delta L = 2dn - \frac{\lambda_0}{2}.$$

Если на толщине d_1 выполняется условие $I_{\max}$: $\Delta L_1 = k\lambda_0$, (светлая полоса), то при увеличении толщины клина до d_2 выполнится условие $I_{\min}$: $\Delta L_2 = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}$ (темная полоса). Таким образом, в местах одинаковой толщины оптического клина d_1, d_2 и т. д. будут наблюдаться интерференционные <u>*полосы равной толщины*</u> клина.

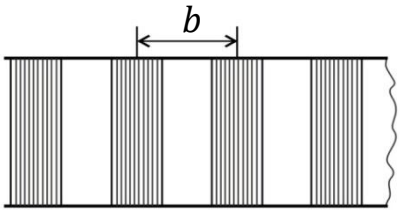


Рис. 10

Интерференционная картина (на виде сверху) представляет собой чередующиеся светлые и темные полосы (рис. 10). ***Ширина интерференционной полосы*** b – это расстояние между двумя соседними минимумами (или максимумами).

г) кольца Ньютона

Кольца Ньютона образуются при интерференции световых волн, отраженных от воздушного зазора между пластинкой и лежащей на ней линзой с большим радиусом кривизны R (рис. 11). Интерференционная картина в виде концентрических чередующихся светлых и темных колец образуется в результате наложения лучей 1 и 2. Оптическая разность хода этих лучей определяется следующей формулой:

$$\Delta L = 2dn + \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (8)$$

Здесь n – показатель преломления среды, находящейся в зазоре, причем, $n < n_{\text{ст}}$, где $n_{\text{ст}}$ – показатель преломления стеклянных линзы и пластинки; d – толщина зазора.

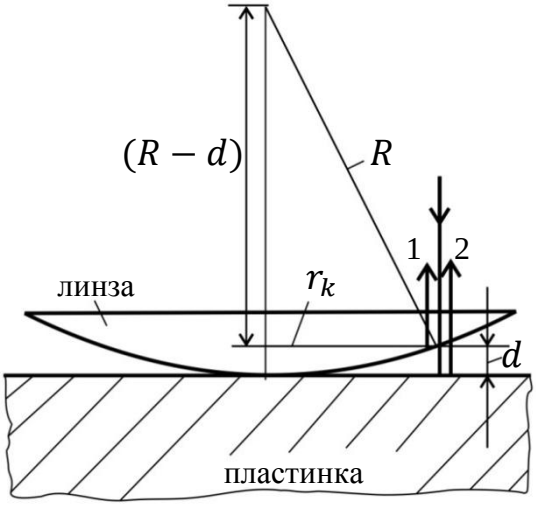


Рис. 11

Величина радиуса r_k -го кольца связана с шириной зазора теоремой Пифагора (см. треугольник на рис. 11):

$$R^2 = {r_k}^2 + (R-d)^2 \rightarrow (d^2 \ll 2Rd) \rightarrow$$

$$2Rd = {r_k}^2; \quad \rightarrow \quad d = \frac{{r_k}^2}{2R}.$$

Подставляя величину d в формулу (8), получаем соотношение в виде:

$$\Delta L = \frac{n{r_k}^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (9)$$

<u>*Для темных колец*</u> (в отраженном свете), полагая в выражении (9) $\Delta L = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}$, имеем следующую формулу:

$$\frac{n{r_k}^2}{R} = k\lambda_0. \qquad (10)$$

<u>*Для светлых колец*</u>, используя условие максимума интенсивности $\Delta L = k\lambda_0$, из соотношения (9) получаем выражение:

$$\frac{n{r_k}^2}{R} = (2k-1)\frac{\lambda_0}{2}. \qquad (11)$$

Измеряя с помощью микроскопа радиус кольца с номером k, и используя формулу (10) или (11), можно определить одну из следующих величин: n – показатель преломления среды; R – радиус линзы; λ_0 – длину волны света.

2.2. Дифракция света

Дифракцией называют прохождение волны в область геометрической тени, т. е. нарушение прямолинейного хода луча вблизи преград, размер которых соизмерим с длиной волны λ.

Дифракция света объясняется с помощью <u>*принципа Гюйгенса – Френеля*</u>*: любая точка фронта волны является источником вторичных сферических волн, которые когерентны; их интерференция дает результирующую интенсивность волны в любой точке наблюдения.* Так в точке M в области геометрической тени от непрозрачного диска наблюдается дифракционный максимум – светлое пятно (рис. 12). Таким образом, дифракция – это интерференция многих лучей от вторичных источников.

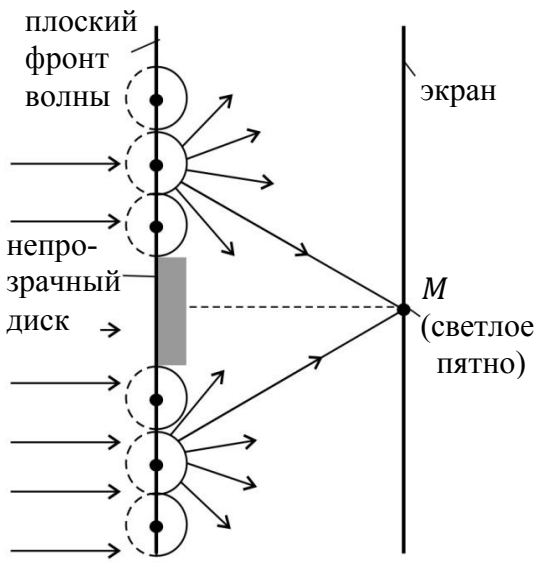


Рис. 12

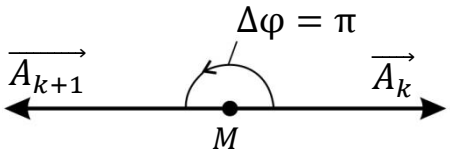


Рис. 13

Для сложения колебаний от многих источников используют *метод зон Френеля:* фронт волны мысленно разделяют на зоны – такие, чтобы оптическая разность хода лучей от соседних зон была равна $\frac{\lambda}{2}$:

$$\Delta L = L_{k+1} - L_k = \frac{\lambda}{2}.$$

В таком случае колебания в лучах, пришедших от соседних зон, будут в противофазе и при сложении лучи ослабляют друг друга (рис. 13). На рис. 13 вектор $\overrightarrow{A_k}$ – вектор амплитуды колебаний от вторичных источников -й зоны Френеля; $\overrightarrow{A_{k+1}}$ – та же величина для $(k+1)$-й зоны.

Амплитуда A результирующего колебания светового вектора в точке M, с учетом противофазы, описывается знакопеременным рядом:

$$A = A_1 - A_1 + A_1 - A_1 + \ \dots \ .$$

Интенсивность света I в точке M пропорциональна квадрату этой амплитуды: $I \sim A^2$.

2.2.1. Дифракция параллельных лучей на щели

На щель, которая расположена перпендикулярно плоскости рис. 14, падает нормально плоская световая волна. Оптическая разность хода ΔL крайних лучей от щели, идущих под углом φ к нормали, (см. рис. 14), определяется выражением:

$$\Delta L = a \sin \varphi,$$

где a – ширина щели; φ – угол дифракции.

Если на открытом щелью фронте волны укладывается четное число зон Френеля, равное $2k$, то оптическая разность хода лучей

$$\Delta L = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Так как при этом каждая пара зон Френеля взаимно погасят друг друга, то в точке наблюдения M будет ***дифракционный минимум при условии:***

$$a \sin \varphi = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2}; \qquad k = 1; 2; 3 \ \dots \ . \tag{13}$$

Если щель открывает фронт волны, содержащий нечетное число $(2k+1)$ зон Френеля, то остается одна непогашенная зона; поэтому в точке M будет наблюдаться ***дифракционный максимум*** $(I_{\max})$ ***при условии:***

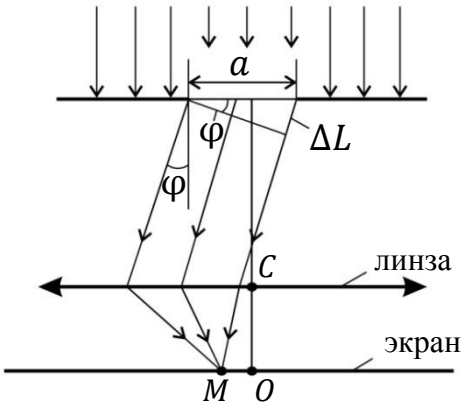


Рис. 14

$$a \sin\varphi = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}; \qquad (14)$$

$$k = 1;\ 2;\ 3 \ldots .$$

В точке экрана O (напротив центра линзы C) наблюдается <u>*центральный дифракционный максимум*</u>*:* при угле дифракции $\varphi = 0$ оптическая разность хода $\Delta L = 0$ для всех лучей, идущих от щели, и эти лучи усиливают друг друга.

2.2.2. Дифракция плоской волны на дифракционной решетке

Дифракционная решетка (ДР) представляет собой совокупность большого числа щелей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, равном d (рис. 15). Величина d называется ***постоянной (периодом) дифракционной решетки.***

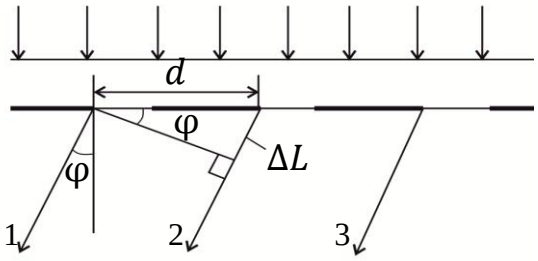


Рис. 15

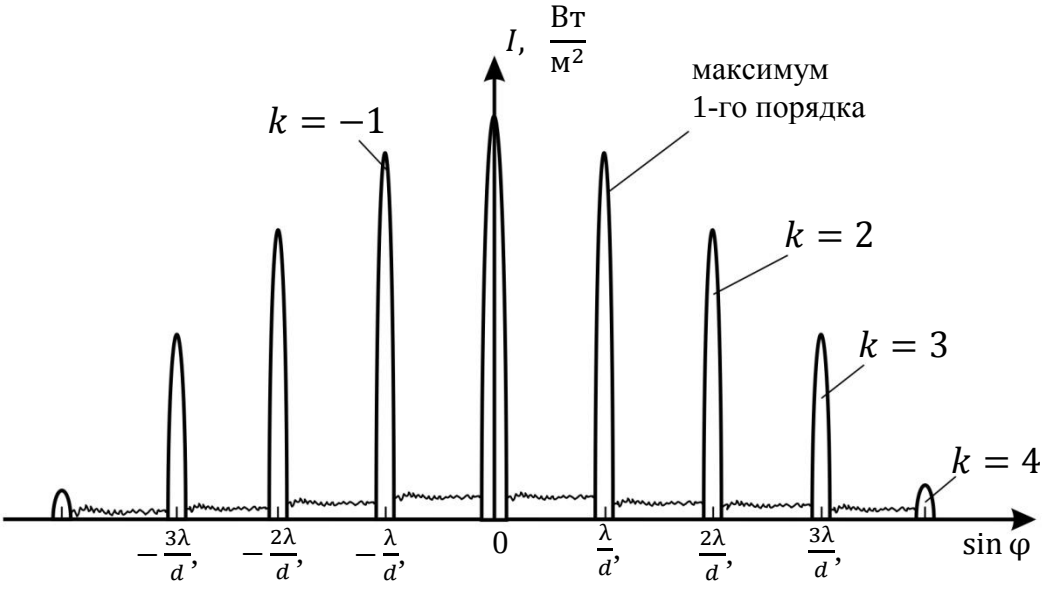
Соответственные лучи: 1; 2; 3 и т. д., – от всех щелей (см. рис. 15) усиливают друг друга, если их оптическая разность хода $\Delta L = k\lambda$. Из треугольника на рис. 15 выразим величину $\Delta L = d \sin\varphi$.

Таким образом, ***условие главных максимумов*** дифракционной решетки следующее:

$$d \sin\varphi = k\lambda; \quad k = 0;\ \pm1;\ \pm2 \ldots . \qquad (15)$$

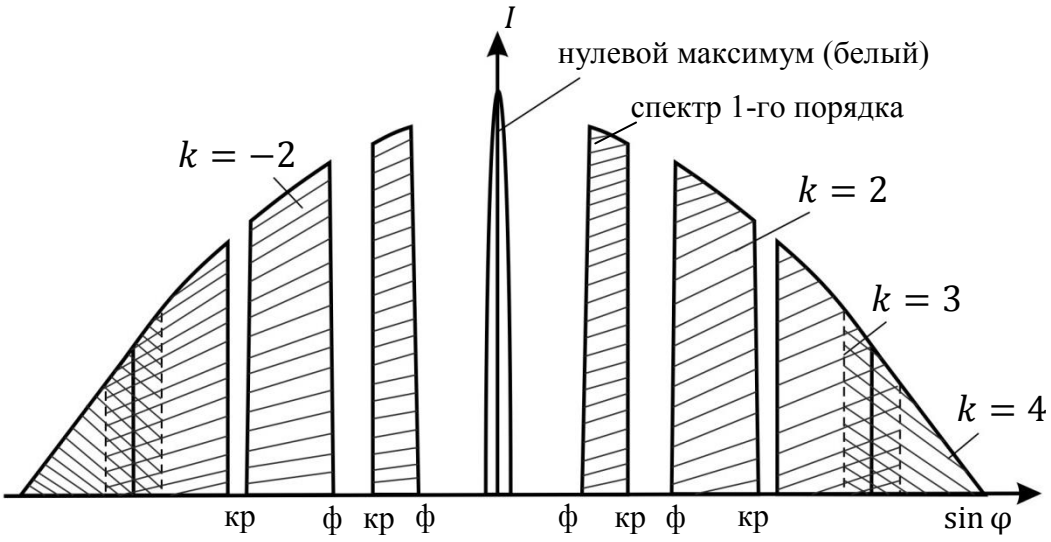
Здесь φ – угол дифракции; k – ***порядок (номер) максимума.***

Положение главных максимумов в дифракционном спектре на экране (рис. 16 а) определяется углом дифракции φ. Согласно условию главных максимумов (15), $\sin\varphi = k\frac{\lambda}{d}$, т. е. угол дифракции зависит от длины волны λ. При прохождении через решетку белого света только нулевой ($k = 0$; и $\sin\varphi = 0$) центральный максимум будет белым. Все остальные максимумы разложатся в спектр (рис. 16 б). При этом, так как длина волны $\lambda_{фиол} < \lambda_{кр}$, то и $\sin\varphi_{фиол} < \sin\varphi_{кр}$, следовательно, ближе к центральному максимуму будет фиолетовая область спектра. В результате излучение, содержащее световые волны с различными длинами волн λ, с помощью дифракционной решетки разложится в окрашенный спектр.



Дифракционный спектр монохроматического света

а



Дифракционный спектр белого света

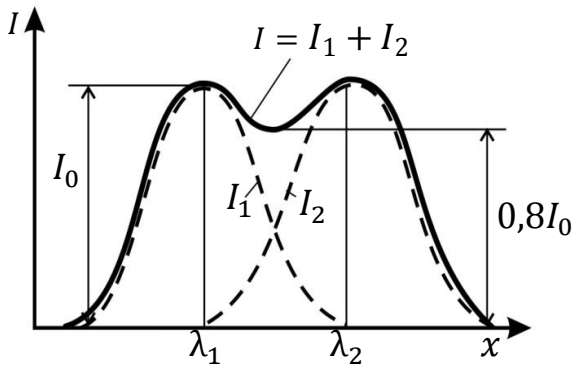
б

Рис. 16

Таким образом, дифракционная решетка является спектроскопом, т. е. она разделяет свет на составляющие, в зависимости от их длин волн. Это позволяет измерять длины волн λ светового излучения в спектрометрах.

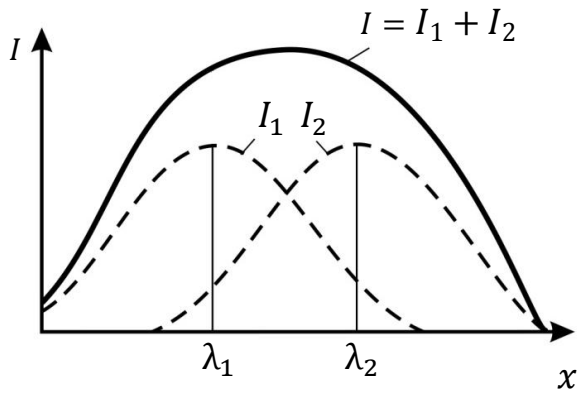
2.2.3. Разрешающая способность дифракционной решетки

Разрешение линий спектра дифракционной решеткой – это разделение на экране дифракционных максимумов двух близко расположенных линий с длинами волн λ_1 и λ_2 (рис. 17).



Линии λ_1 и λ_2 разрешены

а



Линии λ_1 и λ_2 не разрешаются данной решеткой

б

Рис. 17

Важнейшая характеристика оптического прибора: глаза, дифракционной решетки, объективов телескопа, бинокля, микроскопа и других, – его ***разрешающая способность R:***

$$R = \frac{\lambda}{|\lambda_1 - \lambda_2|} = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

где $\delta\lambda$ – наименьшая разность длин волн двух соседних линий спектра, которые видны раздельно.

Разрешающая способность дифракционной решетки зависит от общего числа N щелей решетки и от порядка спектра k, в котором наблюдаются линии:

$$R = kN.$$

С увеличением числа щелей N спектральные линии становятся более узкими; при этом разрешаются линии с меньшей разностью длин волн $\delta\lambda$. Величина разрешающей способности современных дифракционных решеток достигает $R \approx 10^5$.

2.2.4. Дифракция рентгеновских лучей на кристалле

Кристалл является ***пространственной дифракционной решеткой*** с периодом $d \approx 10^{-10}$ м, поэтому для наблюдения дифракционной картины используют излучение с длиной волны $\lambda \leq 10^{-10}$ м – это рентгеновские лучи ($10^{-12} < \lambda_{\text{рентг}} < 10^{-10}$ м). Дифракционную картину образуют лучи 1 и 2, отраженные от атомных плоскостей кристалла (рис. 18). Оптическая разность хода этих лучей $\Delta L = L_2 - L_1 = 2d\sin\theta$ (см. треугольники на рис. 18).

Условие дифракционных максимумов (формула Вульфа – Брэггов):

$$2d\sin\theta = k\lambda; \quad k = 1;\ 2;\ 3\ldots. \tag{18}$$

где d – период кристаллической решетки (расстояние между атомными плоскостями); θ – ***угол скольжения***, образованный падающим лучом и атомной плоскостью.

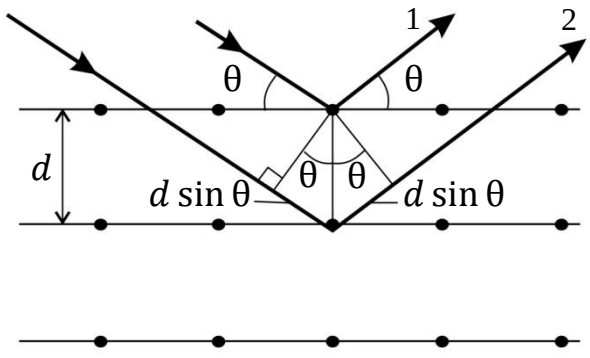


Рис. 18

Дифракция рентгеновских лучей позволяет осуществить два важных метода исследования.

1) Рентгеноструктурный анализ вещества: определение периода кристалла d – фазовой характеристики металлического сплава (при известной λ, измеряя угол θ для -го дифракционного максимума).

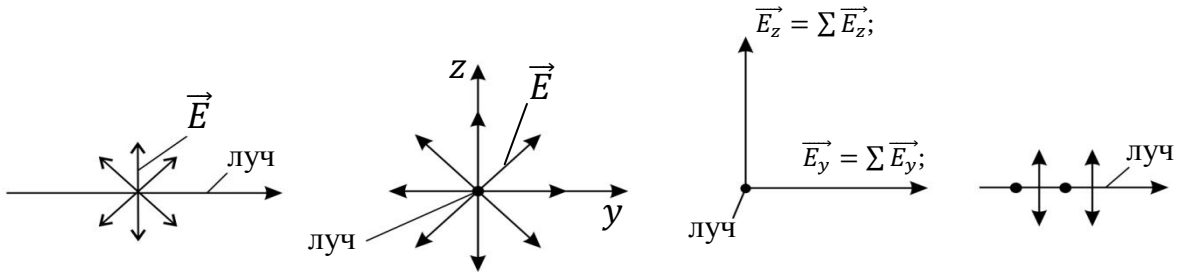
2) Рентгеноспектральный анализ излучения: определение длины волны λ характеристического рентгеновского излучения, например, с целью анализа элементного состава вещества (горной породы, руды, сплава и др.).

2.3. Поляризация света

Поляризованной называют волну, в которой колебания светового вектора $\vec{E}$ каким-либо образом *упорядочены.*

2.3.1. Естественный и поляризованный свет

Естественный свет излучается атомами вещества: возбужденный атом испускает за время $\tau \approx 10^{-8}$ с ***волновой цуг*** – участок световой волны длиной $l = c \cdot \tau \approx 3 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 10^{-8}\ \text{с} \approx 3$ м. Так как атомы излучают свет независимо (не согласованно), то в световой волне имеются всевозможные плоскости колебаний вектора $\vec{E}$. Следовательно, *естественный свет – неполяризованный*. Световые векторы $\vec{E}$ изображают в луче естественного света, как показано на рис. 19.



а б в

Рис. 19

Если векторы $\vec{E}$ всех цугов в естественном луче разложить по осям y и z, то полученные суммарные векторы $\overrightarrow{E_y} = \sum \overrightarrow{E_y}$ и $\overrightarrow{E_z} = \sum \overrightarrow{E_z}$ (рис. 19 в) будут одинакового модуля: $E_y = E_z$, – так как в естественном луче колебания светового вектора <u>*во всех направлениях равновероятны*</u>. Поэтому в схеме на рис. 19 г вдоль луча показывают одинаковое число точек (векторы $\overrightarrow{E_y}$) и черточек (векторы $\overrightarrow{E_z}$).

Свет, в котором вектор $\vec{E}$ колеблется в одной плоскости, называют ***плоскополяризованным*** (или ***линейно поляризованным***) (рис. 20).

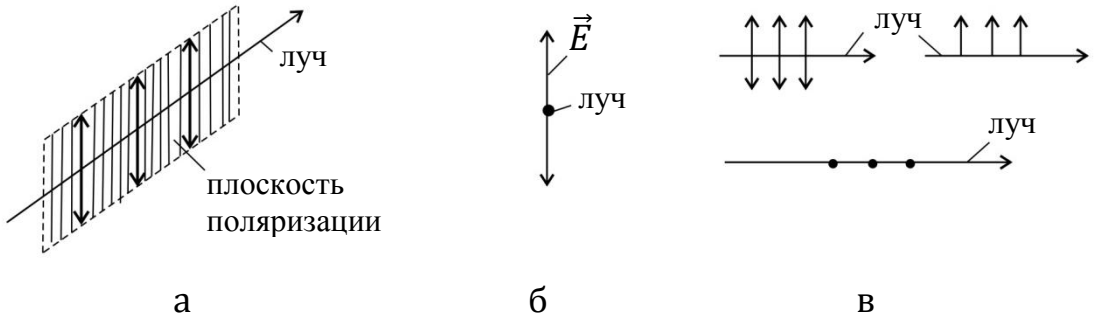


Рис. 20

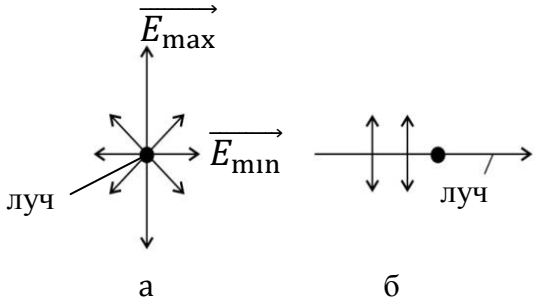


Рис. 21

Частично поляризованный свет – такой, в котором имеется преимущественное направление колебаний вектора $\vec{E}$ (рис. 21). В данном случае выполняется соотношение

$$(E_z = E_{\max}) > (E_y = E_{\min}).$$

Свет, поляризованный по кругу (в общем случае – ***эллиптически поляризованный***) – такой, в котором вектор $\vec{E}$ вращается вокруг луча с частотой света $\omega \approx 10^{15}$ с$^{-1}$.

Степень поляризации света P – это величина

$$P = \frac{E_{\max}^2 - E_{\min}^2}{E_{\max}^2 + E_{\min}^2} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \qquad (19)$$

Здесь $E_{\max}$ и $E_{\min}$ – световые векторы, показанные на рис. 21 а; $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором (связь величин: $I = kE^2$, где k – коэффициент пропорциональности). Для естественного света $I_{\max} = I_{\min}$ и $P = 0$; для плоскополяризованного света $I_{\min} = 0$ и $P = 1$. Таким образом, степень поляризации света $0 \le P \le 1$.

2.3.2. Получение и анализ поляризованного света. Закон Малюса

Отметим следующие способы преобразования естественного света в плоскополяризованный:

1) при прохождении через анизотропное тело, называемое ***поляроидом***;

2) при отражении света на границе двух диэлектриков;

3) в двойном лучепреломлении в кристаллах, в частности, в призме Николя.

В поляроиде имеется ***оптическая ось О*** – направление, вдоль которого электроны молекул вещества колеблются сравнительно легко и переизлучают свет. В результате из поляроида выходит свет с направлением вектора $\overrightarrow{E_{\parallel}}$ – параллельным оптической оси O, а векторы $\vec{E}$ поглощаются в поляроиде.

По назначению поляроида различают: а) ***поляризатор*** (ось $O_{\text{П}}$) – он служит для получения поляризованного света из естественного, и б) ***анализатор*** (ось $O_{\text{А}}$) – он предназначен для анализа степени поляризации света. Рассмотрим прохождение луча естественного света последовательно через два поляроида (рис. 22).

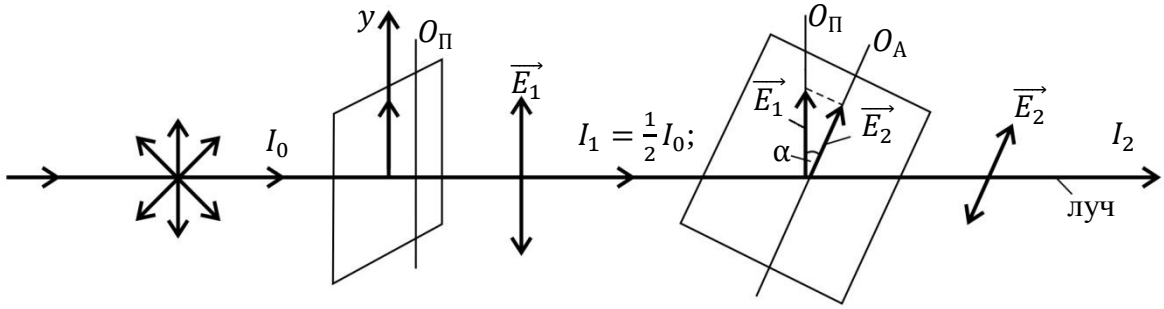


Рис. 22

При прохождении света через первый поляроид пропускаются только колебания светового вектора $\overrightarrow{E_y} \parallel O_{\text{П}}$ (а $\overrightarrow{E_z}$ – поглощаются) (см. рис. 19 в). Соответствующие интенсивности света $I_y = kE_y^2$ и $I_z = kE_z^2$ будут одинаковы: $I_y = I_z$ (так как $E_y = E_z$), а по закону сохранения энергии их сумма $I_y + I_z = I_0$ – интенсивности падающего естественного света. Следовательно, $2I_y = I_0$; в результате интенсивность I_1 выходящего из поляризатора плоскополяризованного света ($I_1 = I_y$):

$$I_1 = \frac{1}{2}I_0. \qquad (20)$$

При повороте оптической оси поляризатора $O_{\text{П}}$ вокруг луча только поворачивается плоскость поляризации выходящего света, а его интенсивность I_1 не изменяется, согласно формуле (20), благодаря симметрии распределения векторов $\vec{E}$ цугов в естественном луче.

При прохождении плоскополяризованного света через второй поляроид пропускаются только колебания $\overrightarrow{E_2} \parallel O_{\text{А}}$. Как видно по рис. 22,

величина $E_2 = E_1 \cos\alpha$; возводя это равенство в квадрат и умножая на коэффициент пропорциональности k (согласно формуле $I = kE^2$), получаем закон Малюса:

$$I_2 = I_1 \cos^2\alpha. \qquad (21)$$

Здесь I_1 и I_2 – интенсивности плоскополяризованного света на входе и на выходе 2-го поляроида; угол $\alpha = (\overline{O_П}, \overline{O_А})$ – угол между осями поляризатора и анализатора.

Вращение 2-го поляроида (и его оси $O_А$) вокруг луча приводит к изменению интенсивности выходящего света от максимальной $I_2 = I_1$ – при параллельных осях поляризатора и анализатора, до минимальной $I_2 = 0$ – если оси скрещены под прямым углом: $O_А O_П$. Таким образом, путем вращения поляроида вокруг луча осуществляется *анализ света* – по характеру изменения интенсивности света, выходящего из поляроида.

С учетом формулы (20) закон Малюса (21) позволяет определить интенсивность света, прошедшего через два поляроида:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\alpha. \qquad (22)$$

2.3.3 Поляризация света при отражении от диэлектрика. Закон Брюстера

Граница раздела двух диэлектриков *анизотропна*: электроны атомов сравнительно легко смещаются только вдоль поверхности и, совершая вынужденные колебания под действием электрического поля световой волны, переизлучают при этом отраженную и преломленную волну. В результате на границе диэлектриков естественный свет поляризуется.

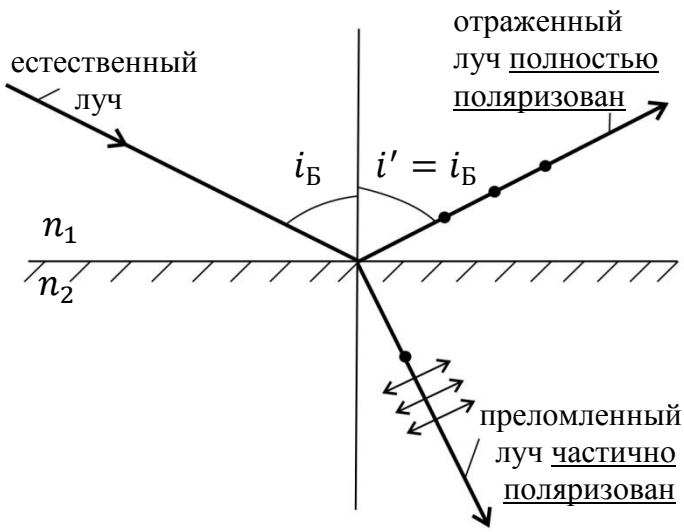


Рис. 23

Экспериментально было обнаружено (по изменению интенсивности отраженного луча при вращении вокруг него анализатора), что отраженный луч *полностью поляризован* при угле падения света $i_Б$ (***угол Брюстера***), который определяется относительным показателем преломления n_{21}:

$$\operatorname{tg} i_Б = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (23)$$

Здесь n_1 и n_2 – показатели преломления диэлектриков.

Отраженный луч, полученный при угле падения $i_Б$, содержит только колебания светового вектора, перпендикулярные плоскости падения (плоскость рисунка). Преломленный луч при угле падения, равном $i_Б$, поляризован максимально, но не полностью. При других углах падения и отраженный, и преломленный луч поляризованы частично.

В решении задачи 14 показано, что при падении света под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. Это позволяет понять, почему в отраженном луче нет колебаний вектора $\vec{E}$, лежащих в плоскости падения (черточки на рис. 23): они по отношению к отраженному лучу были бы продольными, а свет – поперечная электромагнитная волна: в ней <u>*световой вектор*</u> всегда <u>*перпендикулярен лучу*</u> (направлению распространения волны).

Явление поляризации отраженного луча используется для его устранения, чтобы убрать блики от воды или стекла в фотоаппаратах и биноклях, с помощью поляроида, оптическая ось которого устанавливается перпендикулярно плоскости колебаний вектора $\vec{E}$ в отраженном луче.

2.3.4. Двойное лучепреломление в кристаллах. Искусственная оптическая анизотропия

Явление ***двойного лучепреломления*** состоит в том, что при прохождении луча естественного света в кристалле он разделяется на два луча: $e-$луч и $o-$луч (рис. 24), – оба плоскополяризованные во взаимно перпендикулярных направлениях.

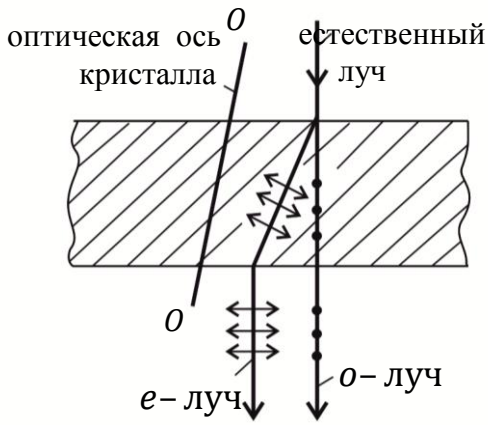


Рис. 24

В обыкновенном луче ($o-$луч) колебания светового вектора $\overrightarrow{E_o}$ перпендикулярны оптической оси кристалла. В необыкновенном луче ($e-$луч) колебания вектора $\overrightarrow{E_e}\overrightarrow{E_o}$ и световой вектор $\overrightarrow{E_e}$ лежит в одной плоскости с оптической осью кристалла. Для этих лучей показатели преломления кристалла различны: $n_e \neq n_o$.

Двойное лучепреломление используют в следующих оптических приборах:

– для получения плоскополяризованного света <u>*в призме Николя*</u> (николь), из которой выходит только $-$луч (см. решение задачи 16);

– <u>*в поляризационном микроскопе*</u>, применяемом для анализа минералов: в нем определяют разность показателей преломления $(n_o - n_e)$, которая является характеристикой кристалла;

– в методах, использующих искусственную оптическую анизотропию: оптически изотропные вещества превращаются в анизотропные под действием на молекулы вещества следующих сил:

1) $\overrightarrow{F_{эл}}$ – в электрическом поле (эффект Керра, используется в световых затворах быстрого действия: $\tau \approx 10^{-10}$ с);

2) $\overrightarrow{F_{магн}}$ – в магнитном поле;

3) $\overrightarrow{F_{мех}}$ – при деформациях сжатия и растяжения для изучения таких деформаций на оптических моделях (метод фотоупругости).

При искусственной анизотропии в веществе мерой внешнего воздействия является разность показателей преломления лучей $(n_o - n_e)$.

2.3.5. Вращение плоскости поляризации оптически активными веществами

Существуют ***оптически активные*** вещества (твердые – кварц, сахар; жидкости – водный раствор сахара, никотин, скипидар и др.), которые поворачивают плоскость поляризации проходящего в них света.

Угол поворота φ плоскости поляризации для оптически активных твердых тел и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d, \tag{24}$$

для растворов:

$$\varphi = \alpha C d. \tag{25}$$

Здесь α – удельное вращение $\left(\alpha = \varphi \text{ при значениях } d = 1 \text{ м и } C = 1 \text{ кгм3}\right.$; d – путь, пройденный светом в веществе (толщина слоя оптически активного вещества); C – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Вращение плоскости поляризации света лежит в основе точного метода сахариметрии – определения концентрации раствора сахара.

КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

В ряде явлений: тепловое излучение, фотоэффект, эффект Комптона и давление света, проявляются корпускулярные свойства излучения. Излучение, поглощение и распространение света, согласно современной теории, происходит в виде ***потока фотонов – световых квантов.***

2.4. Тепловое излучение

Тепловое излучение (ТИ) – это излучение энергии телом за счет своей внутренней энергии, обладающее следующими свойствами: 1) спектр ТИ *сплошной*: $0 < \lambda < \infty$; 2) спектр ТИ *зависит от термодинамической температуры* тела T; так как величина $T > 0$, то все тела, без исключения, испускают ТИ; 3) тепловое излучение *равновесное* (см. п. 2.4.2).

2.4.1. Характеристики теплового излучения

Характеристики теплового излучения зависят от температуры T и от длины волны излучения λ, или от его частоты ν (так как эти величины связаны: $\lambda\nu = c$). Эту зависимость показывают индексами величин, которые подчеркивают, что величина относится к узкому интервалу dλ вблизи данной λ на шкале длин волн спектра ТИ (рис. 25). Параметры и функции теплового излучения приведены в таблице.

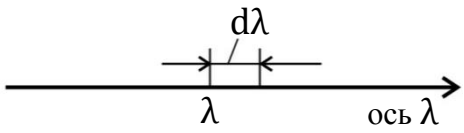


Рис. 25

Таблица

Параметр, функция	Его величина вблизи λ	Полная величина	Физический смысл
Мощность излучения (поток энергии)	$\mathrm{d}\phi_{\lambda,T} = \frac{\mathrm{d}W_{\lambda,T}}{t}$. Единица: 1 Вт = 1 $\frac{\text{Дж}}{\text{с}}$.	$\phi_T = \int_0^\infty \mathrm{d}\phi_{\lambda,T}$.	Энергия излучения в единицу времени.
Энергетическая светимость	$\mathrm{d}R_{\lambda,T} = \frac{\mathrm{d}\phi_{\lambda,T}}{S}$. Единица: 1 $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.	(интегральная) $R_T = \int_0^\infty \mathrm{d}R_{\lambda,T}$. $R_T = \int_0^\infty r_{\lambda,T}\mathrm{d}\lambda$.	Мощность излучения с единицы площади.
Спектральная плотность энергетической светимости	$r_{\lambda,T} = \frac{\mathrm{d}R_{\lambda,T}}{\mathrm{d}\lambda}$. Единица: 1 $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{нм}}$; или 1 $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$.	–	Мощность излучения с 1 м^2 в единичном интервале $\Delta\lambda = 1$ нм или 1 м.
Поглощательная способность (степень черноты)	$a_{\lambda,T} = \frac{\mathrm{d}\phi_{\lambda,T}^{\text{погл}}}{\mathrm{d}\phi_{\lambda,T}^{\text{пад}}}$. безразмерная величина	$0 \le a_{\lambda,T} \le 1$.	Доля (часть) поглощенной мощности от падающей мощности.

Тело, поглощающее все падающее излучение любых длин волн при любой температуре, называют ***абсолютно черным телом (АЧТ)***; для такого тела $a_{\lambda,T}^* = 1$ (здесь и далее *символ ** означает, что величина относится к АЧТ). Близки к АЧТ сажа ($a_{\lambda,T} = 0{,}99$), поверхность Солнца ($a_{\lambda,T} = 0{,}99$), малое отверстие в замкнутой полости и др.

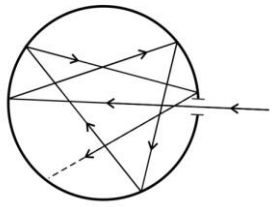


Рис. 26

Совершенной моделью абсолютно черной поверхности является площадь малого отверстия в замкнутой сфере (рис. 26). Луч света любой длины волны, вошедший через отверстие внутрь полости, многократно отражаясь от ее стенок, рассеивает на них энергию света и потому не выходит из полости, т. е. полностью поглощается.

2.4.2. Тепловое равновесие. Закон Кирхгофа

В изолированной системе (не обменивающейся энергией с окружающей средой) в вакууме, где теплообмен осуществляется только посредством излучения, находятся два тела, температуры которых T_1 и T_2; причем первоначально $T_1 > T_2$. Тогда поток излучения 1-го тела $\phi_1 > \phi_2$, и его температура будет снижаться, а 2-го тела – увеличиваться. Это будет происходить до тех пор, пока не сравняются температуры тел: $T_1 = T_2$; при этом $\phi^{\text{изл}} = \phi^{\text{погл}}$ для каждого тела. Если по какой-то причине тепловое равновесие нарушится, например, температура одного из тел снизится, то для него поток излучения станет меньше, чем $\phi^{\text{погл}}$. При поглощении большей энергии внутренняя энергия этого тела и его температура будут повышаться до выравнивания потоков: $\phi^{\text{изл}} = \phi^{\text{погл}}$.

Таким образом, *тепловое равновесие самоподдерживающееся*, так как оно регулируется потоком излучаемой энергии $\phi^{\text{изл}} \sim T^4$. Признаки теплового равновесия – одинаковые и постоянные температуры тел, как следствие равенства потоков энергии для каждого тела: $\phi^{\text{изл}} = \phi^{\text{погл}}$.

Закон Кирхгофа:

$$\left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}}\right)_2 = \cdots = \left(\frac{r^*_{\lambda,T}}{1}\right)_{\text{АЧТ}} \equiv f(\lambda, T). \qquad (26)$$

При тепловом равновесии тел отношения спектральной плотности энергетической светимости к поглощательной способности одинаково для всех тел и равно спектральной плотности энергетической светимости $r^*_{\lambda,T}$ АЧТ, которая является функцией длины волны и температуры. Функция $f(\lambda, \mathrm{T})$ позже выведена Планком (см. п. 2.4.4).

Из закона Кирхгофа (26) следует, что для любого тела характеристики теплового излучения могут быть получены из соответствующих характеристик излучения АЧТ:

$$r_{\lambda,T} = a_{\lambda,T} \cdot r^*_{\lambda,T}; \qquad (27)$$

$$R_T = \int_0^\infty r_{\lambda,T} \mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty a_{\lambda,T} \cdot r^*_{\lambda,T} \mathrm{d}\lambda. \qquad (28)$$

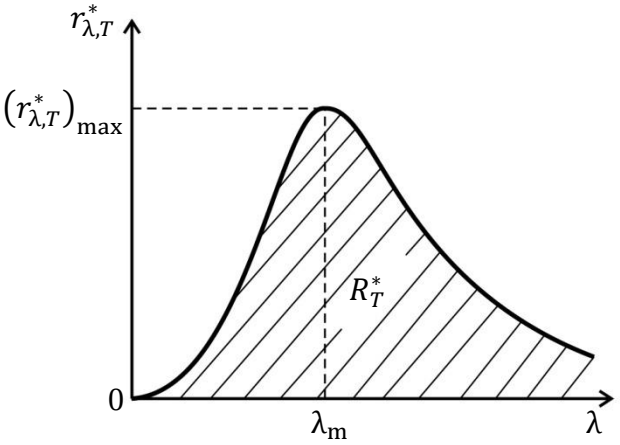
Для серого тела величина a_T не зависит от длины волны λ, и формула (28), в которой интеграл берется по интервалу длин волн, принимает такой вид:

$$R_T^{\text{сер}} = a_T \int_0^\infty r_{\lambda,T}^* \mathrm{d}\lambda; \quad \rightarrow \quad R_T^{\text{сер}} = a_T R_T^*. \qquad (29)$$

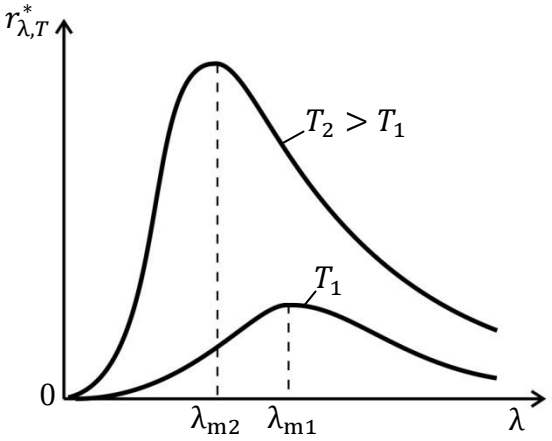
Из последней формулы, с учетом того, что поглощательная способность любого тела $a_T < 1$, следует, что *при одинаковой температуре T энергетическая светимость серого тела меньше, чем черного*.

2.4.3. Экспериментальный спектр теплового излучения. Закон Стефана – Больцмана. Законы Вина

Экспериментально получены спектры теплового излучения черного тела (рис. 27) – зависимости $r_{\lambda,T}^* = f(\lambda)$ при различных температурах T. Эти спектры свидетельствуют о неравномерном распределении энергии излучения $\mathrm{d}W_{\lambda,T}$ по длинам волн.



а



б

Рис. 27

Площадь под кривой спектра – это интеграл $\int_0^\infty r_{\lambda,T}^* \mathrm{d}\lambda = R_T^*$, который равен энергетической светимости АЧТ (см. таблицу).

По экспериментальным спектрам теплового излучения черного тела установлены следующие законы.

Закон Стефана – Больцмана:

$$R_T^* = \sigma T^4, \qquad (30)$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная Стефана – Больцмана. Согласно формуле закона (30), с увеличением температуры T энергетическая светимость черной поверхности растет пропорционально четвертой степени термодинамической температуры.

Законы Вина: 1) *закон смещения Вина:*

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \qquad (31)$$

где λ_m – длина волны, на которую приходится $(r_{\lambda,T}^*)_{\max}$ – максимум спектральной плотности энергетической светимости АЧТ (см. рис. 27 а); $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м · К – постоянная Вина. Формула закона (31) показывает смещение положения максимума функции $(r_{\lambda,T}^*)_{\max}$: с ростом температуры T максимум кривой спектра ТИ смещается в коротковолновую область (см. рис. 27 б).

2) <u>*Второй закон Вина*</u> определяет зависимость высоты максимума функции $r^*_{\lambda,T}$ от температуры:

$$\left(r^*_{\lambda,T}\right)_{\max} = CT^5, \tag{32}$$

где $C = 1{,}3 \cdot 10^{-14}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{нм}\cdot\text{К}^5}$ – постоянная; иногда используется величина $C' = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3\cdot\text{К}^5}$ (см. решение задачи 18).

2.4.4. Квантовая природа теплового излучения. Формула Планка

Планк предположил, что атомы, совершающие колебания, излучают энергию квантами ε, величина которых определяется формулой Планка:

$$\varepsilon = h\nu; \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{hc}{\lambda}, \tag{33}$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка; ν и λ – частота и длина волны излучения соответственно; c – скорость света в вакууме.

Планк теоретически вывел зависимость спектральной плотности энергетической светимости черного тела $r^*_{\nu,T}$ от частоты и температуры в следующем виде:

$$r^*_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}. \tag{34}$$

Здесь $r^*_{\nu,T} = \frac{\mathrm{d}R^*_{\nu,T}}{\mathrm{d}\nu}$ – спектральная плотность энергетической светимости, характеризующая распределение энергии по шкале частот излучения, в то время как величина $r^*_{\lambda,T} = \frac{\mathrm{d}R^*_{\lambda,T}}{\mathrm{d}\lambda}$ – по длинам волн излучения.

Так как $\mathrm{d}R^*_{\nu,T} = \mathrm{d}R^*_{\lambda,T}$ – это одна и та же величина, то $r^*_{\lambda,T} = r^*_{\nu,T} \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}$. Здесь производная $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}$ определяется по формуле связи ν и λ: $\lambda\nu = c$; $\rightarrow$ $\nu = \frac{c}{\lambda}$; $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$; (знак " − " обычно опускают, так как он указывает только на то, что с увеличением ν убывает λ).

Таким образом, используя формулы $r^*_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} r^*_{\nu,T}$ и $\nu = \frac{c}{\lambda}$, можно из формулы Планка (34) получить функцию $r^*_{\lambda,T} = f(\lambda, T)$ в следующем виде:

$$r^*_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1}. \tag{35}$$

С помощью формул (34) и (35) Планк не только идеально объяснил форму кривой спектра теплового излучения черного тела, но и теоретически вывел все экспериментальные законы (см. п. 2.4.3). При этом в законах Стефана – Больцмана и Вина опытные постоянные σ, b и C были выражены через универсальные физические постоянные h, k и c.

2.5. Фотоэлектрический эффект

2.5.1. Виды фотоэффекта. Законы внешнего фотоэффекта

Фотоэлектрический эффект (фотоэффект) – это электрический эффект: появление тока, – под действием электромагнитного излучения (света, ультрафиолетового, рентгеновского или γ-излучения).

Различают следующие виды фотоэффекта.

1. *Внешний фотоэффект* – испускание электронов из вещества: из металлов, полупроводников, диэлектриков.
2. *Внутренний фотоэффект* – увеличение концентрации носителей тока (электронов и дырок) и, как следствие, снижение электрического сопротивления полупроводника (*фотосопротивление*).
3. *Вентильный фотоэффект* – возникновение ЭДС в контактах металл–полупроводник или двух полупроводников; используется в солнечных батареях, преобразующих энергию света в электрическую энергию.

Далее рассматривается только *внешний фотоэффект.* Для него А.Г. Столетовым получены ***вольт-амперные характеристики*** (ВАХ) фотоэлемента – вакуумного фотодиода, катод которого освещается. ВАХ для двух различных световых потоков ϕ_1 и ϕ_2 приведены на рис. 28.

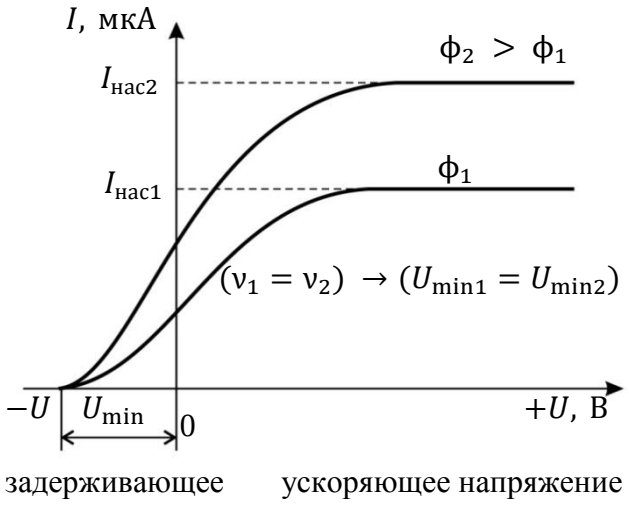


Рис. 28

Экспериментальные законы внешнего фотоэффекта:

1) Ток насыщения $I_{нас}$ пропорционален световому потоку ϕ: $I_{нас} = K\phi$;

2) Существует для каждого вещества ***красная граница фотоэффекта*** – минимальная частота ν_0 или максимальная длина волны λ_0: свет с частотой $\nu < \nu_0$ и с длиной волны $\lambda > \lambda_0$ *не вызывает эмиссию электронов*, т. е. фотоэффект не происходит.

3) Максимальная скорость испускаемых электронов (и их кинетическая энергия) зависит только от частоты света и не зависит от светового потока.

2.5.2. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

Основные положения квантовой теории фотоэффекта следующие.

1) Свет распространяется и поглощается веществом квантами – фотонами; энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \quad (\text{так как } \lambda\nu = c).$$

2) Фотоэффект – *абсолютно неупругое соударение* двух частиц: фотона и свободного электрона в металле (Ме), – осуществляется по схеме:

$$(\text{фотон} + e^-_{\text{своб. в Ме}}) \rightarrow e^-_{\text{вылет. из Ме}}.$$

Для такого взаимодействия запишем закон сохранения энергии (ЗСЭ):

$$\varepsilon = A + (E_{\text{К}})_{\max}; \quad \rightarrow \quad h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2}, \tag{36}$$

где A – работа выхода свободного электрона из металла, в котором потенциальная энергия свободных электронов отрицательна $(E_{\text{П}} < 0)$, так как они находятся в электростатическом поле положительно заряженных ионов кристалла; $(E_{\text{К}})_{\max}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вылетевших из металла. Так как в справочных таблицах приводится минимальное значение работы выхода электрона $A \equiv A_{\min}$ (с верхних энергетических уровней зоны проводимости металла), то по уравнению (36) вычисляется только максимальная кинетическая энергия электронов $(E_{\text{К}})_{\max}$, в то время как электроны вылетают из катода с различными скоростями (о чем свидетельствует плавное уменьшение тока по мере увеличения задерживающего потенциала: см. ВАХ на рис. 28).

Уравнение (36) называют уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Квантовая теория объясняет закономерности фотоэффекта следующим образом.

1) <u>*Закон Столетова*</u>: $I_{\text{нас}} = K\text{ф}$, – фототок $I_{\text{нас}}$, и световой поток ф определяется потоком частиц n – соответственно, числом падающих фотонов $n_{\text{ф}}$ и числом вылетевших электронов n_e за 1 секунду:

$$I_{\text{нас}} = e \cdot n_e; \quad \phi = (h\nu) \cdot n_{\text{ф}}.$$

Согласно квантовому механизму фотоэффекта, один фотон может выбить только один электрон, поэтому

$$n_e = k_\nu n_{\text{ф}},$$

где k_ν – коэффициент пропорциональности, зависящий от частоты света; он мал $(k_\nu \approx 10^{-2})$ т. е. лишь $(3-5)\%$ фотонов вызывают эмиссию электронов. С учетом записанных соотношений получаем закон Столетова:

$$I_{\text{нас}} = \left(\frac{k_\nu e}{h\nu}\right)\text{ф}; \quad \rightarrow \quad I_{\text{нас}} = K_\nu \text{ф}.$$

2) <u>*Граничная частота*</u> ν_0 (<u>*красная граница фотоэффекта*</u>) согласно уравнению (36), соответствует $(E_{\text{К}})_{\max} = 0$; при этом, так как $\lambda_0\nu_0 = c$, то

$$h\nu_0 = A, \quad \text{и} \quad \frac{hc}{\lambda_0} = A. \tag{37}$$

3) <u>*Зависимость кинетической энергии электронов от частоты*</u>: $\frac{mv^2}{2} = f(\nu)$. Максимальную кинетическую энергию электронов $(E_{\text{К}})_{\max}$ измеряют по приложенному задерживающему напряжению $U \equiv U_{\min}$, при котором задерживающее электрическое поле уменьшает кинетическую энергию электрона до нуля. Работа этого поля

$$A_{\text{ЭП}} = eU; \quad \text{и} \quad A_{\text{ЭП}} = \Delta E_{\text{К}}; \quad \rightarrow \quad A_{\text{ЭП}} = 0 - \left(\frac{mv^2}{2}\right)_{\max}.$$

Из этих формул получаем, что

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU, \tag{38}$$

где U – задерживающее напряжение.

С учетом соотношения (38) уравнение Эйнштейна (36) принимает вид:

$$h\nu = A + eU. \tag{39}$$

Из уравнения (39) следует линейная зависимость задерживающего напряжения U от частоты света ν, падающего на фотокатод:

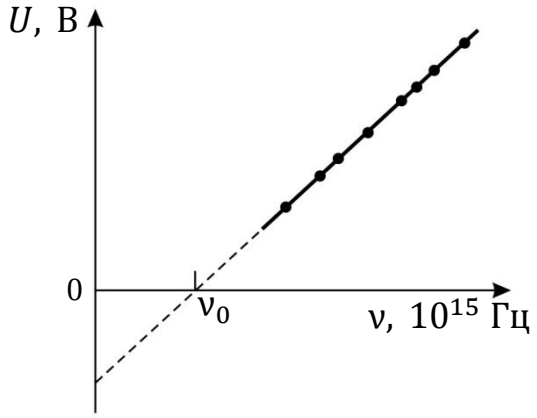


Рис. 29

$$U = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}; \quad \rightarrow \quad y = kx + b. \tag{40}$$

Уравнение (40) – это уравнение прямой линии с угловым коэффициентом $k = \frac{h}{e}$.

Определение постоянной Планка по угловому коэффициенту экспериментальной линейной зависимости задерживающего напряжения от частоты света (рис. 29) – один из наиболее точных методов определения величины h.

2.6. Фотоны. Давление света

Фотон – это световой квант. Свет испускается, поглощается и распространяется как поток фотонов. Энергия фотона ε:

$$\varepsilon = h\nu; \quad (\lambda\nu = c); \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{hc}{\lambda}. \tag{41}$$

Используя формулу взаимосвязи массы и энергии частиц, найдем ***массу фотона*** m:

$$\varepsilon = mc^2; \quad \rightarrow \quad m = \frac{\varepsilon}{c^2}. \tag{42}$$

<u>*Скорость движения фотона всегда равна c*</u> – скорости света в вакууме, поэтому фотон имеет нулевую массу покоя. ***Импульс фотона*** p:

$$p = mc = \frac{\varepsilon}{c}; \quad \rightarrow \quad p = \frac{h}{\lambda}. \tag{43}$$

Давление света связано с изменением импульса потока фотонов, падающих на поверхность. Величина давления p при нормальном падении света на поверхность зависит от энергетической освещенности E_e поверхности и описывается следующей формулой:

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho), \tag{44}$$

где $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – скорость света в вакууме; ρ – коэффициент отражения света от поверхности $(0 \le \rho \le 1)$; энергетическая освещенность

поверхности E_e равна энергии W фотонов, падающих на единицу площади S в единицу времени t: $E_e = \frac{W}{S \cdot t}, \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right)$. По смыслу величина E_e совпадает с интенсивностью света I, падающего на поверхность.

2.7. Эффект Комптона

Эффект Комптона – это упругое рассеяние рентгеновского или γ-излучения атомами вещества, при котором длина волны излучения увеличивается на $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda,$$

где λ' и λ – длины волн рассеянного и первичного излучения.

Для рассеяния излучения на слабосвязанных электронах атомов величина $\Delta\lambda$ определяется экспериментальной формулой Комптона:

$$\Delta\lambda = 2{,}43 \cdot 10^{-12}(1 - \cos\theta), \text{ м}, \tag{45}$$

где θ – угол рассеяния (между направлением движения первичного и рассеянного фотона (рис. 30)).

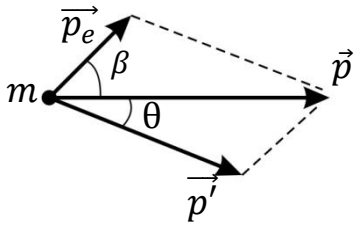


Рис. 30

Комптоновское рассеяние объясняется квантовой теорией как упругое соударение двух частиц: налетающего фотона и электрона, находящегося на одной из внешних оболочек атома. Согласно схеме такого взаимодействия:

$$\begin{pmatrix}\text{первичный} \\ \text{фотон, } \lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{электрон} \\ \text{в атоме}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\text{рассеянный} \\ \text{фотон, } \lambda'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{электрон отдачи} \\ \text{(вне атома)}\end{pmatrix}.$$

Запишем законы сохранения, которые выполняются при упругом ударе.

Закон сохранения энергии (ЗСЭ):

$$E_0 + \varepsilon = E + \varepsilon'; \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon' + E_{\text{К}_e}, \tag{46}$$

где ε и ε' – энергия первичного и рассеянного фотона; E_0 и E – энергия покоя и полная энергия электрона: $E = E_0 + E_{\text{К}_e}$, а $E_{\text{К}_e}$ – кинетическая энергия электрона отдачи.

Закон сохранения импульса (ЗСИ):

$$\vec{p} = \overrightarrow{p'} + \overrightarrow{p_e}, \tag{47}$$

где $\vec{p}$ и $\overrightarrow{p'}$ – векторы импульсов первичного и рассеянного фотона, $\overrightarrow{p_e}$ – импульс электрона отдачи (см. рис. 30 – векторную диаграмму импульсов).

При решении системы уравнений (46) и (47) получают формулу Комптона (45) в следующем виде:

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta); \quad \lambda_C = \frac{h}{mc}. \tag{48}$$

Здесь λ_C – комптоновская длина волны.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

3.1. План решения задач по теме «Интерференция света»

1. Прежде всего, необходимо на рисунке показать интерферирующие лучи и обозначить отрезки, определяющие геометрический путь этих лучей. Записывая оптическую разность хода, умножайте геометрический путь луча на показатель преломления той среды, в которой пройден путь.

2. Если интерферируют отраженные лучи, то следует указать соотношение показателей преломления n среды и отражающей пластинки (пленки). Это необходимо для того, чтобы учесть изменение фазы светового вектора при отражении от оптически более плотной среды (с большей величиной n) путем прибавления к оптической разности хода лучей слагаемого, равного $\frac{\lambda_0}{2}$.

3. При использовании условий максимума интенсивности $(\Delta L = k\lambda_0)$ или минимума $I_{\min}$ $\left(\Delta L = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}\right)$ величину λ_0 – длину волны света в вакууме можно с успехом заменить величиной λ в воздухе, так как их отличие незначительно: $\lambda = \frac{\lambda_0}{n_{\text{возд}}} = \frac{\lambda_0}{1{,}00029} \approx \lambda_0$.

Задача 4. В опыте Юнга расстояние от щелей до экрана $l = 2$ м; длина волны света $\lambda_0 = 0{,}6$ мкм. Определите расстояние d между щелями, если ширина интерференционной полосы $b = 2{,}0$ мм.

Дано

$l = 2$ м;

$\lambda_0 = 0{,}6$ мкм;

$b = 2{,}0$ мм.

$d - ?$

Решение

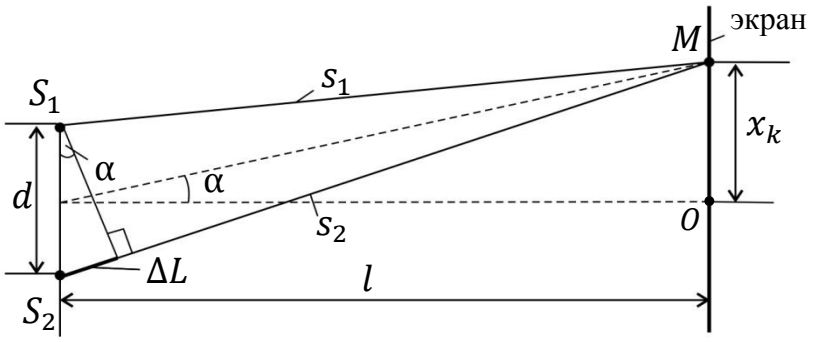


Рис. 31

В опыте Юнга интерферируют волны от двух щелей S_1 и S_2, расположенных на малом расстоянии d друг от друга (рис. 31). Эти щели являются когерентными источниками света, так как они находятся на одном фронте волны. Щели достаточно узкие и расположены перпендикулярно плоскости рисунка. Интерференционная картина на экране имеет вид полос, параллельных щелям. В центре картины (точка O на рис. 31) будет светлая полоса (нулевой максимум), так как для этой точки оптическая разность хода лучей $\Delta L = s_1 - s_2 = 0$.

Пусть в точке M на экране будет -й интерференционный максимум, для которого оптическая разность хода волн от источников S_1 и S_2:

$$\Delta L = s_1 - s_2 = k\lambda_0. \quad (1)$$

Для двух подобных треугольников (малого и большого на рис. 31), учитывая, что расстояние $d \ll l$ и угол α – весьма малый, запишем следующие соотношения:

$$\sin\alpha = \frac{\Delta L}{d} \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{x_k}{l}. \quad (2)$$

Здесь x_k – расстояние от центрального (нулевого) максимума (в точке O) до -го максимума – в точке M (см. рис. 31). Из соотношений (2) выразим величину x_k:

$$x_k = \frac{l}{d}\Delta L. \quad (3)$$

С учетом оптической разности хода волн, которая при показателе преломления воздуха $n_{\text{возд}} \approx 1$ совпадает с разностью геометрических путей волн, записанной в формуле (1), равенство (3) принимает вид:

$$x_k = \frac{l}{d}k\lambda_0. \quad (4)$$

Для соседнего $(k+1)$-го максимума запишем формулу, аналогичную (4):

$$x_{k+1} = (k+1)\frac{l}{d}\lambda_0. \quad (4а)$$

Используя формулы (4а) и (4), определим ширину интерференционной полосы как расстояние между двумя соседними максимумами:

$$b = (x_{k+1} - x_k) = \frac{l}{d}\lambda_0. \quad (5)$$

Из этой формулы получаем расчетную формулу расстояния d:

$$d = \frac{l}{b}\lambda_0.$$

Вычисляем расстояние d между щелями в опыте Юнга:

$$d = \frac{2{,}0\ \text{м}\cdot 0{,}60\cdot 10^{-6}\ \text{м}}{2{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{м}} = 0{,}60\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 0{,}60\ \text{мм}.$$

Задача 5. На тонкую пленку мыльной воды с показателем преломления $n = 1{,}33$ и толщиной $d = 2{,}0$ мкм падает белый свет по нормали к поверхности пленки. Определите длины волн λ лучей видимого участка спектра ($0{,}40 \le \lambda_0 \le 0{,}75$ мкм), которые в отраженном свете будут усилены в результате интерференции.

Дано

$n = 1{,}33$;

$d = 2{,}0$ мкм;

$0{,}4 \le \lambda_0 \le 0{,}75$ мкм.

$I_{\max}$ для λ_0 – ?

Решение

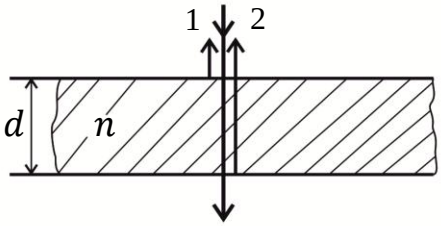


Рис. 32

В отраженном свете будут интерферировать два луча: 1-й, отраженный от верхней поверхности пленки, и 2-й, отраженный от нижней поверхности (рис. 32). Оптическая разность хода этих лучей:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 2d \cdot n - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (1)$$

Дополнительное слагаемое, равное $\frac{\lambda_0}{2}$, обусловлено отражением 1-го луча от оптически более плотной пленки.

Условие максимумов интенсивности при интерференции волн:

$$\Delta L = k\lambda_0. \quad (2)$$

Приравняем величины ΔL по формулам (1) и (2):

$$2dn - \frac{\lambda_0}{2} = k\lambda_0; \quad \rightarrow \quad 2dn = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}. \quad (3)$$

Из соотношения (3) выразим длины волн, удовлетворяющие условию $I_{\max}$:

$$\lambda_0 = \frac{4dn}{(2k+1)}; \quad (4)$$

Полагая в этой формуле величину $k = 0; 1; 2 \ldots$, вычислим длины волн λ_0, усиленные в отраженном свете:

$k = 0; \rightarrow \lambda_0 = \frac{4 \cdot 2 \text{ мкм} \cdot 1{,}33}{1} = 10{,}64$ мкм; это инфракрасная область спектра.

Видимая область спектра начинается с номера максимума $k = 7$ и соответствующие длины волн усиленных лучей, рассчитанные по формуле (4), будут следующие:

$k = 7; \rightarrow \lambda_0 = \frac{10{,}64 \text{ мкм}}{15} = 0{,}709$ мкм; – красный цвет;

$k = 8; \rightarrow \lambda_0 = \frac{10{,}64 \text{ мкм}}{17} = 0{,}625$ мкм; – желтый;

$k = 9; \rightarrow \lambda_0 = \frac{10{,}64 \text{ мкм}}{19} = 0{,}560$ мкм; – зеленый;

$k = 10; \rightarrow \lambda_0 = \frac{10{,}64 \text{ мкм}}{21} = 0{,}507$ мкм; – голубой;

$k = 11; \rightarrow \lambda_0 = \frac{10{,}64 \text{ мкм}}{23} = 0{,}462$ мкм; – синий;

$k = 12; \rightarrow \lambda_0 = \frac{10{,}64 \text{ мкм}}{25} = 0{,}425$ мкм; – фиолетовый;

$k = 13; \rightarrow \lambda_0 = \frac{10{,}64 \text{ мкм}}{27} = 0{,}394$ мкм; – фиолетовый;

$k = 14; \rightarrow \lambda_0 = \frac{10{,}64 \text{ мкм}}{29} = 0{,}370$ мкм; – начало ультрафиолетовой области спектра.

Задача 6. На стеклянную линзу объектива с показателем преломления $n_л = 1{,}5$ нанесена тонкая прозрачная пленка вещества с показателем преломления $n_{пл} = 1{,}2$. Объектив освещен падающим на него нормально пучком света с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}55$ мкм. Определите наименьшую толщину пленки d_{min}, при которой отраженный свет будет иметь минимальную интенсивность.

Дано

$n_л = 1{,}5$;

$n_{пл} = 1{,}2$;

$\lambda_0 = 0{,}55$ мкм.

$d_{min} - ?$

Решение

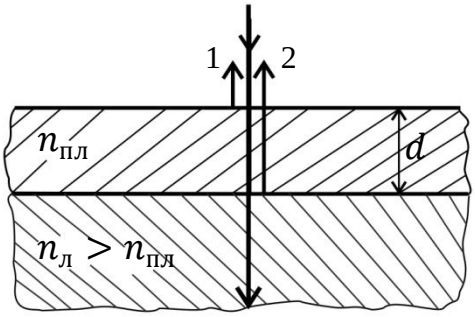


Рис. 33

В отраженном свете происходит интерференция лучей 1 и 2 (рис. 33), отраженных от пленки (луч 1) и от линзы (луч 2). Оптическая разность хода этих лучей определяется следующим образом:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 2d \cdot n_{пл} + \frac{\lambda_0}{2} - \frac{\lambda_0}{2} = 2d \cdot n_{пл}. \quad (1)$$

Здесь слагаемое, равное $\left(+\frac{\lambda_0}{2}\right)$ – при отражении 2-го луча, а слагаемое $\left(-\frac{\lambda_0}{2}\right)$ входит в вычитаемый оптический путь L_1 1-го луча, так как и тот, и другой луч отражается от оптически более плотной среды.

Чтобы отраженный луч имел наименьшую интенсивность, оптическая разность хода лучей 1 и 2 ΔL должна удовлетворять условию интерференционного минимума:

$$\Delta L = (2k + 1)\frac{\lambda_0}{2}. \quad (2)$$

Приравниваем оптическую разность хода лучей по формулам (1) и (2):

$$2d \cdot n_{пл} = (2k + 1)\frac{\lambda_0}{2}; \quad \rightarrow \quad d_k = \frac{(2k+1)\lambda_0}{4n_{пл}}; \quad (3)$$

Формула (3) дает дискретный набор толщин d_k, соответствующих значениям $k = 0; 1; 2 \ldots$, при которых $I_{отр} \approx 0$. Минимальное значение d достигается при $k = 0$:

$$d_{min} \equiv d_0 = \frac{\lambda_0}{4n_{пл}} = \frac{0{,}55 \text{ мкм}}{4 \cdot 1{,}2} = 0{,}114 \text{ мкм}.$$

Отметим, что пленки толщиной $d_1 = 0{,}342$ мкм $(k = 1)$, $d_2 = 0{,}570$ мкм и др. также обеспечивают минимальную интенсивность отраженного света. При этом, согласно закона сохранения энергии,

$$I_{\text{пад}} = I_{\text{отр}} + I_{\text{прох}},$$

интенсивность света, проходящего в объектив, – $I_{\text{прох}}$ будет наибольшая, т. е. такая пленка просветляет область за объективом. Линзы с просветленной оптикой широко используются в оптических приборах.

Задача 7. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой линзой с радиусом кривизны $R = 0{,}60$ м находится жидкость. При наблюдении в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 0{,}50$ мкм измерен радиус третьего *темного* кольца Ньютона: $r_3 = 0{,}82$ мм. Определите толщину слоя жидкости d в том месте, где наблюдается это кольцо, и показатель преломления n жидкости.

Дано

$R = 0{,}60$ м;

$\lambda = 0{,}50$ мкм;

$r_3 = 0{,}82$ мм;

темное кольцо: $k = 3$.

$d - ?$

$n - ?$

Решение

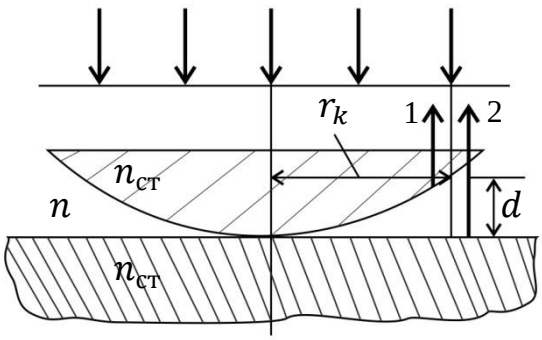


Рис. 34

В отраженном свете происходит интерференция лучей 1 и 2: 1-й отражается от жидкости, 2-й – от стекла (рис. 34). Предположим, что показатель преломления n жидкости меньше, чем стеклянной пластинки и линзы $n_{\text{ст}}$: $n < n_{\text{ст}}$. В этом случае 2-й луч отражается от оптически более плотной среды с изменением фазы колебаний светового вектора на π, что и учтем, прибавляя к оптической длине пути 2-го луча слагаемое $\frac{\lambda_0}{2}$. Тогда оптическая разность хода лучей 1 и 2 представится формулой:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 2d \cdot n + \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (1)$$

Радиус r_k кольца Ньютона с номером k связан с параметрами установки (см. «Теоретическая часть», п. 2.1.2 г), формула (9)):

$$2Rd = r_k^2; \quad \rightarrow \quad d = \frac{r_k^2}{2R}. \qquad (2)$$

По этой формуле вычислим толщину слоя d жидкости в том месте, где измерен радиус третьего кольца, подставляя $r_k = r_3$:

$$d = \frac{0{,}82^2 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2}{2 \cdot 0{,}60\ \text{м}} = 0{,}560 \cdot 10^{-6}\ \text{м} = 0{,}560\ \text{мкм}.$$

Чтобы найти показатель преломления n жидкости из формулы (1), учтем, что -е темное кольцо – это k-й интерференционный минимум интенсивности, для которого оптическая разность хода лучей определяется условием минимума:

$$\Delta L = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}. \qquad (3)$$

Приравнивая величину ΔL по формулам (1) и (3), получаем следующую расчетную формулу величины n:

$$2dn + \frac{\lambda_0}{2} = 2k \cdot \frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_0}{2}; \quad \rightarrow \quad n = \frac{k\lambda_0}{2d}. \qquad (4)$$

Вычисляем показатель преломления жидкости:

$$n = \frac{3 \cdot 0{,}50 \text{ мкм}}{2 \cdot 0{,}56 \text{ мкм}} = 1{,}34.$$

Полученное значение n, с учетом погрешности измеренных величин R, λ_0 и r_3, совпадает с табличным значением показателя преломления воды $n = 1{,}33$. Относительная погрешность $\delta_n = \frac{1{,}34-1{,}33}{1{,}34} \cdot 100\ \% \approx 0{,}8\ \%$.

Задача 8. Между двумя плоскопараллельными пластинками на расстоянии $l = 10$ см от линии их соприкосновения находится тонкая проволока диаметром d. Пластинки, образующие воздушный клин, освещаются нормально падающим монохроматическим светом с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}50$ мкм. Определите диаметр проволоки d, если ширина интерференционных полос, наблюдаемых в отраженном свете, $b = 4{,}0$ мм.

Дано

$l = 0{,}10$ м;

$\lambda_0 = 0{,}50$ мкм;

$b = 4{,}0$ мм.

$d - ?$

Решение

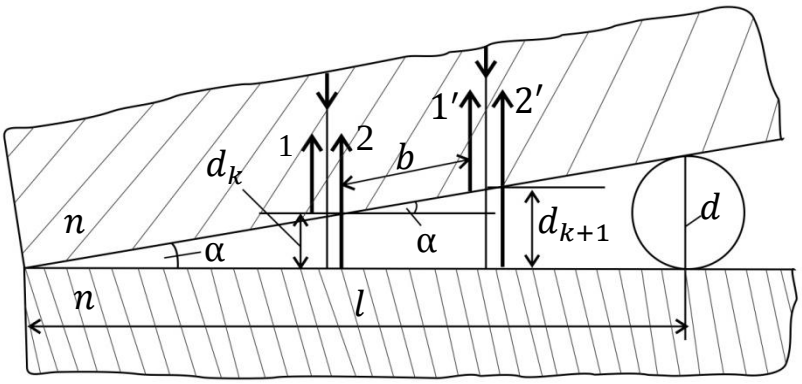


Рис. 35

На рис. 35 показаны две пары отраженных лучей: (1 и 2) и ($1'$ и $2'$), при интерференции которых наблюдаются соседние полосы – с номером k и $(k+1)$ соответственно. Запишем оптическую разность хода лучей 1 и 2:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 2d_k \cdot n_{\text{возд}} + \frac{\lambda_0}{2}; \quad n_{\text{возд}} \approx 1. \qquad (1)$$

Пусть эти лучи при наложении дают темную полосу, т. е. величина ΔL удовлетворяет условию интерференционного минимума:

$$\Delta L = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}. \qquad (2)$$

Приравнивая величину ΔL по формулам (1) и (2), выразим толщину слоя воздуха d_k в том месте, где наблюдается -я темная полоса:

$$2d_k + \frac{\lambda_0}{2} = k\lambda_0 + \frac{\lambda_0}{2}; \quad \rightarrow \quad d_k = \frac{k\lambda_0}{2}. \qquad (3)$$

Аналогичную формуле (3) величину d_{k+1} получим для соседней $(k+1)$-й темной полосы:

$$d_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda_0}{2}. \qquad (4)$$

Чтобы найти искомую величину диаметра проволоки d, на рисунке рассмотрим два подобных прямоугольных треугольника: малый – со сторонами b и $(d_{k+1} - d_k)$ и большой – со сторонами l и d. Для малого угла α (он мал, так как $d \ll l$) в этих треугольниках выполняется следующее равенство:

$$\sin\alpha = \frac{(d_{k+1} - d_k)}{b} \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{l}. \qquad (5)$$

Здесь, в соответствии с полученными выше формулами (3) и (4), разность величин $(d_{k+1} - d_k) = (k+1-k)\frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2}$. Учитывая это, из выражения (5) получаем следующую расчетную формулу:

$$d = \frac{l}{b}(d_{k+1} - d_k) = \frac{l}{b} \cdot \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (6)$$

Вычисляем диаметр проволоки d:

$$d = \frac{0{,}10\ \text{м}}{4 \cdot 10^{-3}\ \text{м}} \cdot \frac{0{,}50\ \text{мкм}}{2} = 6{,}25\ \text{мкм}.$$

Таким образом, интерференционную картину полос равной толщины воздушного клина можно использовать для точного определения размеров малых тел.

3.2. **План решения задач по теме «Дифракция света»**

1. Условия дифракционных максимумов и минимумов различны для дифракции на щели, плоской дифракционной решетке и на кристалле – пространственной дифракционной решетке. Поэтому, согласно условию задачи, нужно выбрать соответствующие формулы (см. «Теоретическая часть», п. 2.2).

2. На рисунке, сопровождающем решение задачи, следует показать угол дифракции φ. В решении задачи для малых углов ($\varphi \leq 7°$) можно использовать формулу приближенных вычислений: $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi$. В случае больших углов дифракции следует использовать тригонометрическое соотношение $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$.

Задача 9. На диафрагму со щелью шириной $a = 0{,}20$ мм падает нормально плоская монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определите ширину изображения l щели на экране как расстояние между первыми дифракционными минимумами. Экран расположен параллельно плоскости диафрагмы на расстоянии $L = 1{,}0$ м от нее. Дифракционная картина проецируется на экран линзой, расположенной близко к щели.

Решение

Дано

$a = 0{,}20$ мм;

$\lambda = 550$ нм;

$L = 1{,}0$ м.

$l - ?$

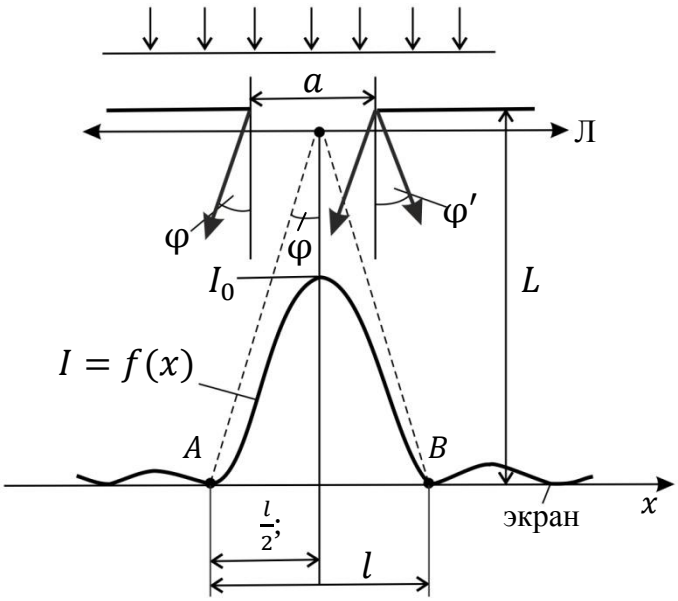


Рис. 36

Дифракционный спектр от щели – график распределения интенсивности света вдоль экрана $I = f(x)$, – показан на рис. 36. Расчет интенсивностей дифракционных максимумов показывает, что интенсивности 1-го, 2-го, 3-го и последующих максимумов малы по сравнению с I_0 – высотой нулевого максимума: $I_1 = 0{,}047I_0$; $I_2 = 0{,}017I_0$; $I_3 = 0{,}0083I_0$ ... . Таким образом, основная часть энергии приходится на центральный (нулевой) максимум; поэтому его ширина l и является изображением щели на экране.

Ширина центрального максимума ограничивается примыкающими к нему дифракционными минимумами первого порядка: $k = 1$. Условие этих минимумов: размещение на открытом щелью фронте волны 2-х зон Френеля, – при этом оптическая разность хода ΔL крайних лучей, идущих от щели под углом дифракции φ, равна четному числу полуволн $\frac{\lambda}{2}$:

$$\Delta L = a \sin\varphi = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2}; \quad k = 1. \tag{1}$$

Из этого условия получаем, что для углов дифракции φ и $\varphi' = \varphi$ синус угла:

$$\sin\varphi = k\frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{a}. \tag{2}$$

Параллельные интерферирующие лучи, идущие от щели под углами φ и φ', собираются линзой в точках A и B соответственно (см. рис 36). Из треугольника на рисунке видно, что полуширина $\frac{l}{2}$ искомого изображения щели на экране определяется через тангенс угла дифракции:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l/2}{L}; \quad \rightarrow \quad l = 2L\operatorname{tg}\varphi. \tag{3}$$

Учитывая, что для малых углов φ значение $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$ и используя условие (2), получаем следующую расчетную формулу величины l:

$$l = \frac{2L\lambda}{a}. \tag{4}$$

Вычисляем ширину изображения щели на экране как ширину центрального дифракционного максимума:

$$l = \frac{2\cdot 1\text{ м}\cdot 0{,}55\cdot 10^{-6}\text{ м}}{0{,}2\cdot 10^{-3}\text{ м}} = 0{,}55\cdot 10^{-2}\text{ м} = 5{,}5\text{ мм}.$$

Проверим использованное в решении условие малости угла φ: определим этот угол по формуле (3):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l/2}{L} = \frac{2{,}75\cdot 10^{-3}\text{ м}}{1\text{ м}} = 2{,}75\cdot 10^{-3}. \quad \rightarrow \quad \varphi = 2{,}75\cdot 10^{-3}\text{ рад} = 0{,}17°.$$

Задача 10. На дифракционную решетку (ДР), содержащую $n = 500$ штрихов на одном миллиметре длины, падает нормально белый свет. Линзой, помещенной вблизи решетки, дифракционный спектр проецируется на экран. Определите длину l спектра второго порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана $L = 1{,}0$ м. Длины волн границ видимого спектра: $\lambda_{кр} = 780$ нм, $\lambda_{фиол} = 400$ нм.

Дано

$n = 500\ \frac{1}{мм}$;

$L = 1{,}0$ м;

$\lambda_{кр} = 780$ нм;

$\lambda_{фиол} = 400$ нм;

$k = 2$.

$l - ?$

Решение

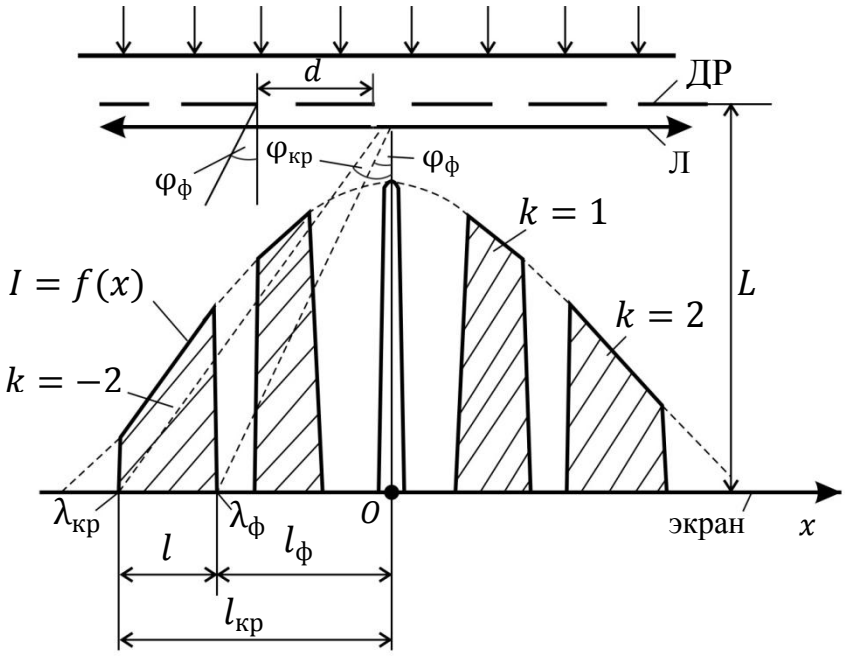


Рис. 37

Дифракционный спектр от решетки – график распределения интенсивности света I вдоль экрана: $I = f(x)$, – показан на рис. 37. Запишем условие главных максимумов в спектре дифракционной решетки для границ белого света – фиолетового и красного лучей:

$$d\sin\varphi_{ф} = k\lambda_{ф}\,; \quad k = 2. \tag{1}$$

$$d\sin\varphi_{кр} = k\lambda_{кр}; \quad k = 2. \tag{2}$$

Здесь период дифракционной решетки d связан с числом щелей на 1 мм решетки очевидным соотношением:

$$d = \frac{1}{n} = \frac{1\text{ мм}}{500} = 2\cdot 10^{-6}\text{ м} = 2\text{ мкм}.$$

Так как длина волны красного света $\lambda_{кр} > \lambda_{ф}$, то, согласно уравнениям (1) и (2), угол дифракции $\varphi_{кр} > \varphi_{ф}$. Соответственно, красная линия в спектре ДР отстоит от центрального максимума (точка O на рис. 37) на расстояние $l_{кр}$, а фиолетовая линия – на $l_{ф}$; причем $l_{кр} > l_{ф}$ (см. рис. 37). Как видно по графику спектра, длина l спектра второго порядка равна разности этих расстояний:

$$l = l_{кр} - l_{ф}. \tag{3}$$

Каждое из этих расстояний определяется углом дифракции φ и расстоянием L от решетки до экрана (линза установлена вблизи дифракционной решетки); как следует из треугольников на рисунке:

$$l_{ф} = L\mathrm{tg}\varphi_{ф}; \quad l_{кр} = L\mathrm{tg}\varphi_{кр}. \tag{4}$$

Расчетная формула (3) длины спектра l, с учетом формул (4), принимает следующий вид:

$$l = L\left(\mathrm{tg}\varphi_{кр} - \mathrm{tg}\varphi_{ф}\right). \tag{5}$$

Определим углы дифракции для спектра 2-го порядка ($k = 2$) из условий максимумов (2) и (1):

$$\sin\varphi_{кр} = \frac{k\lambda_{кр}}{d} = \frac{2\cdot 0{,}78\text{ мкм}}{2\text{ мкм}} = 0{,}78; \quad \sin\varphi_{ф} = \frac{2\cdot 0{,}40\text{ мкм}}{2\text{ мкм}} = 0{,}40.$$

Значения, синусов углов дифракции существенно больше нуля, следовательно, углы дифракции не являются малыми; поэтому определим величину $\mathrm{tg}\,\varphi$ по известному тригонометрическому соотношению:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}; \quad \rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_{кр} = \frac{0{,}78}{\sqrt{1-0{,}78^2}} = 1{,}246; \quad \mathrm{tg}\,\varphi_{ф} = \frac{0{,}4}{\sqrt{1-0{,}4^2}} = 0{,}436.$$

Используя эти значения тангенсов углов дифракции, вычисляем по формуле (5) длину спектра 2-го порядка при дифракции белого света на данной дифракционной решетке:

$$l = 1\text{ м}\cdot(1{,}246 - 0{,}436) = 0{,}81\text{ м}.$$

Задача 11. На дифракционную решетку (ДР), постоянная которой $d = 4$ мкм, падает нормально свет с длиной волны $\lambda = 0{,}58$ мкм. Определите наибольший порядок максимума $k_{\max}$, который дает эта решетка, угол дифракции $\varphi_{\max}$ для этого максимума и общее число максимумов N.

Дано

$d = 4$ мкм;

$\lambda = 0{,}58$ мкм.

$k_{\max} - ?$ $\varphi_{\max} - ?$

$N - ?$

Решение

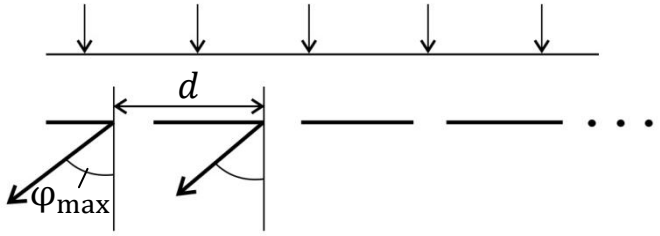


Рис. 38

Запишем условие главных максимумов для дифракционной решетки:

$$d\sin\varphi = k\lambda. \qquad (1)$$

Из равенства (1) выразим порядок максимума k:

$$k = \frac{d\sin\varphi}{\lambda}. \qquad (2)$$

Формула (2) показывает, что наибольший порядок спектра $k_{\max}$ при заданных значениях d и λ соответствует максимальному значению $\sin\varphi = 1$. Вычисляем величину $k_{\max}$ по формуле (2):

$$k_{\max} = \frac{4\text{ мкм}\cdot 1}{0{,}58\text{ мкм}} = (6{,}9)_{\text{целое}}; \quad \rightarrow \quad k_{\max} = 6.$$

Взята целая часть найденного числа, так как порядок максимума k – целое число; Округление до 7 недопустимо, поскольку $\sin\varphi$ не может быть больше единицы.

Значение угла дифракции $\varphi_{\max}$ (рис. 38) для максимума 6-го порядка определим по условию главных максимумов (1):

$$\sin\varphi_{\max} = \frac{k\lambda}{d} = \frac{6\cdot 0{,}58\text{ мкм}}{4\text{ мкм}} = 0{,}87; \quad \rightarrow \quad \varphi_{\max} = 60{,}5° = 60°30'.$$

Общее число максимумов в спектре ДР определим следующим образом. По графику дифракционного спектра решетки (см. «Теоретическая часть», рис. 16 а) видно, что в спектре есть центральный (нулевой: $k = 0$) максимум, а слева и справа от него располагаются максимумы с номерами $k = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3\ \ldots \pm k_{\max}$. Суммируя число всех максимумов, определяем величину N:

$$N = 1 + 2k_{\max} = 1 + 2\cdot 6 = 13.$$

Задача 12. Дифракционная решетка (ДР) длиной $l = 2$ см позволяет разрешить в спектре первого порядка две спектральные линии калия: $\lambda_1 = 578$ нм и $\lambda_2 = 580$ нм. Определите общее число щелей N этой ДР и ее постоянную d.

Дано

$l = 2$ см;

$k = 1$;

$\lambda_1 = 578$ нм;

$\lambda_2 = 580$ нм.

$N - ?$ $d - ?$

Данные спектральные линии с длинами волн λ_1 и λ_2 разрешаются данной дифракционной решеткой (см. «Теоретическая часть», рис. 17 а), следовательно, ее разрешающая способность определяется формулой:

$$R = \frac{\lambda}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{580 \text{ нм}}{(580-578) \text{ нм}} = 290. \quad (1)$$

Величина разрешающей способности R зависит от общего числа щелей N дифракционной решетки следующим образом:

$$R = kN, \quad (2)$$

где k – порядок спектра, в котором разрешены линии.

Выразим из формулы (2) число щелей N дифракционной решетки и вычислим величину N, полагая, по условию задачи, $k = 1$:

$$N = \frac{R}{k}; \quad \rightarrow \quad N = \frac{290}{1} = 290.$$

Период дифракционной решетки d повторяется N раз на длине решетки l, что позволяет записать очевидное соотношение этих величин:

$$l = d \cdot N; \quad \rightarrow \quad d = \frac{l}{N} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{290} = 6{,}90 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 69{,}0 \text{ мкм}.$$

Задача 13. На грань кристалла под углом $\theta = 60^{\circ}$ к ней падает параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}50$ нм. Определите расстояние d между атомными плоскостями кристалла, при отражении от которых наблюдается дифракционный максимум первого порядка.

Дано

$\theta = 60^{\circ}$;

$\lambda = 0{,}50$ нм;

$k = 1$; $I_{\max}$

$d - ?$

Решение

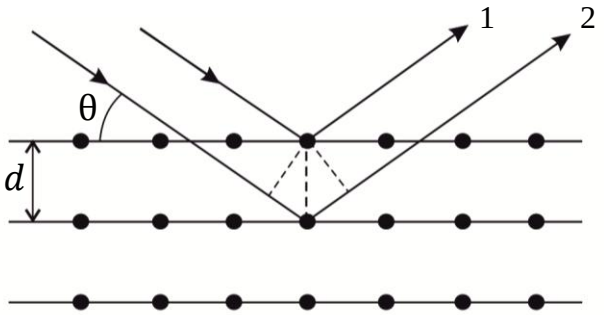


Рис. 39

Условие дифракционных максимумов при дифракции рентгеновского излучения на кристалле – это формула Вульфа – Брэггов:

$$2d \sin\theta = k\lambda, \quad (1)$$

где d – расстояние между атомными плоскостями, отражающими рентгеновские лучи (рис. 39).

Определим из формулы (1) величину d и вычислим ее:

$$d = \frac{k\lambda}{2\sin\theta}; \quad \rightarrow \quad d = \frac{1\cdot 0{,}50\ \text{нм}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0{,}289\ \text{нм} = 2{,}89\cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

3.3. План решения задач по теме «Поляризация света»

1. Выясните, какое явление: поляризация света при отражении, прохождение света через поляроиды, двойное лучепреломление или поворот плоскости поляризации света оптически активным веществом, – рассматривается в данной задаче. Изучите описание явления по разделу «Теоретическая часть».

2. При решении задач, связанных с поляризацией света при отражении от диэлектриков с использованием закона Брюстера: $\operatorname{tg} i_Б = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$, – следует иметь в виду, что нумерация сред – 1-я и 2-я (индекс их показателей преломления n_1 и n_2) выполняется по ходу луча.

Задача 14. Параллельный луч света переходит из воды в стекло; при этом луч, отраженный от границы раздела этих сред, оказывается максимально поляризованным. Определите угол γ между падающим и преломленным лучами.

Дано

$n_1 = 1{,}33$;

$n_2 = 1{,}5$;

$i_Б$.

$\gamma - ?$

Решение

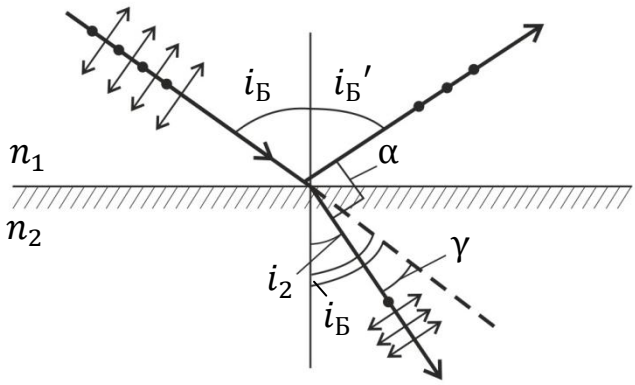


Рис. 40

Так как по условию задачи отраженный от стекла луч полностью поляризован, то угол падения луча на границу раздела сред равен углу Брюстера $i_Б$, удовлетворяющему закону Брюстера:

$$\operatorname{tg} i_Б = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (1)$$

Определим угол Брюстера:

$$\operatorname{tg} i_Б = \frac{1{,}5}{1{,}33} = 1{,}13; \quad \rightarrow \quad i_Б = 48{,}5°.$$

По рис. 40, на котором падающий луч продолжен во 2-ю среду – в стекло, видно, что угол γ между падающим и преломленным лучом определяется соотношением:

$$\gamma = i_Б - i_2, \qquad (2)$$

где i_2 – угол преломления луча.

Определим угол преломления i_2 по закону преломления света:

$$\frac{\sin i_Б}{\sin i_2} = n_{21}. \qquad (3)$$

Сравнивая формулы законов (3) и (1), получаем следующие соотношения:

$$\operatorname{tg} i_Б = \frac{\sin i_Б}{\sin i_2}, \quad \text{или} \quad \frac{\sin i_Б}{\cos i_Б} = \frac{\sin i_Б}{\sin i_2}; \quad \rightarrow \quad \cos i_Б = \sin i_2. \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует, что углы $i_Б$ и i_2 – дополнительные:

$$(i_Б + i_2) = \frac{\pi}{2} = 90°. \qquad (5)$$

По рис. 40 видно, что сумма углов $(i_Б{}' + \alpha + i_2) = 180°$; $\rightarrow$ $\alpha = 90°$, т. е. *при падении света под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны*.

Из соотношения углов (5) находим угол преломления:

$$i_2 = 90° - i_Б = 90° - 48{,}5° = 41{,}5°.$$

По формуле (2) вычисляем угол между падающим и преломленным лучами:

$$\gamma = 48{,}5° - 41{,}5° = 7{,}0°.$$

Задача 15. Угол между плоскостями пропускания двух поляроидов $\alpha = 55^o$. Естественный свет, проходя через такую систему, ослабляется в 8 раз. Пренебрегая потерями света при отражении, определите коэффициент поглощения k света в поляроидах.

Дано

Естественный свет, I_0;

$\alpha = 55^o$;

$\frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{8}$.

$k - ?$

Решение

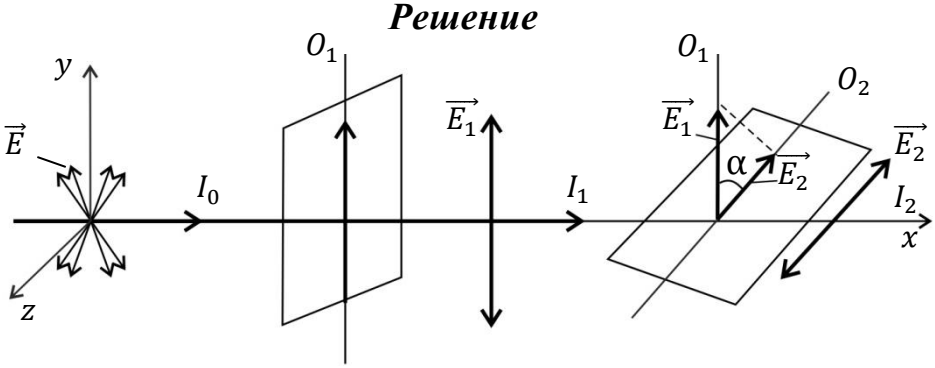


Рис. 41

Если векторы $\vec{E}$ всех цугов в естественном луче разложить по осям y и z, то полученные суммарные векторы $\vec{E_y} = \sum \vec{E_y}$ и $\vec{E_z} = \sum \vec{E_z}$ будут одинакового модуля $E_y = E_z$, так как в естественном луче колебания светового вектора *во всех направлениях равновероятны*. Соответствующие интенсивности света $I_y = KE_y^2$ и $I_z = KE_z^2$ будут одинаковы: $I_y = I_z$ (так как $E_y = E_z$), а по закону сохранения энергии их сумма $I_y + I_z = I_0$ – интенсивности падающего естественного света. Следовательно, $2I_y = I_0$; в результате интенсивность I_1 плоскополяризованного света ($I_1 = I_y$), выходящего из поляризатора (рис. 41):

$$I_1 = \frac{I_0}{2}. \qquad (1)$$

Соотношение интенсивностей (1) записано без учета поглощения света в поляроиде. Коэффициент поглощения равен доле поглощенной энергии:

$$k = \frac{I_{\text{погл}}}{I_0/2}; \quad \rightarrow \quad I_{\text{погл}} = k\frac{I_0}{2}.$$

Согласно закону сохранения энергии интенсивность падающего света:

$$I_{\text{пад}} = \frac{I_0}{2} = (I_1 + I_{\text{погл}}) = I_1 + k\frac{I_0}{2}; \quad \rightarrow \quad I_1 = (1-k)\frac{I_0}{2}. \qquad (2)$$

Соотношение интенсивностей плоскополяризованного света, проходящего через систему двух последовательных поляроидов, определяется законом Малюса:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha. \qquad (3)$$

Формула (3), с учетом поглощения света во втором поляроиде, запишется в виде:

$$I_2 = (1-k) I_1 \cos^2 \alpha. \qquad (4)$$

Подставим интенсивность I_1 по формуле (2) в формулу (4):

$$I_2 = (1-k)^2 \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha. \qquad (5)$$

Из последнего выражения определяем сомножитель $(1-k)$ и вычисляем коэффициент k поглощения света в поляроиде:

$$(1-k) = \sqrt{\frac{2I_2}{I_0 \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2}{8\cdot(0{,}574)^2}} = 0{,}87; \quad \rightarrow \quad k = 0{,}13.$$

Задача 16. Пластинку кварца толщиной $d = 2$ мм поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол $\varphi = 53^{\circ}$. Какой наименьшей толщины $d_{\min}$ следует взять пластинку, чтобы поле зрения поляриметра а) стало совершенно темным, б) оказалось максимально просветленным?

Дано

$O_1 \parallel O_2$;

Кварцевая пластинка:

$d = 2$ мм;

$\varphi = 53^{\circ}$.

---

1) $d_{\min_1} - ?$ $I_{\min} = 0$;

2) $d_{\min_2} - ?$ $I_{\max}$.

Решение

Николь – это двойная призма Николя, в которой луч естественного света разделяется, благодаря двойному лучепреломлению, на два поляризованных луча: обыкновенный (o) и необыкновенный (e). Плоскость колебаний светового вектора в $-$луче лежит в плоскости рисунка (рис. 42), а в $o-$луче – перпендикулярна плоскости рисунка. Обыкновенный луч отклоняется (вследствие полного внутреннего отражения от границы склейки призм) и поглощается зачерненной гранью призмы. Необыкновенный луч проходит через николь.

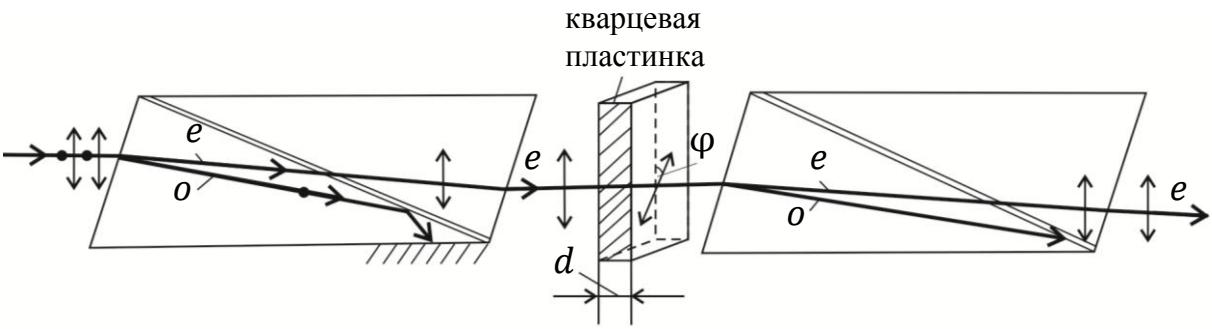


Рис. 42

Таким образом, первый по ходу луча николь (см. рис. 42) является поляризатором, так как из него выходит полностью поляризованный – луч. Если николи параллельны, т. е. в них плоскости пропускания – луча совпадают, то e– луч, вышедший из 1-го николя, полностью пройдет через 2-й николь.

Кварц является <u>*оптически активным*</u> веществом, способным вращать плоскость поляризации света. Угол поворота φ плоскости поляризации для оптически активных кристаллов

$$\varphi = \alpha d, \qquad (1)$$

где α – удельное вращение; d – путь света в кристалле, равный толщине кварцевой пластинки (см. рис. 42).

Используя данные задачи, вычислим постоянную вращения для кварца:

$$\alpha = \frac{\varphi}{d} = \frac{53^{\circ}}{2\ \text{мм}} = 26{,}5\ \frac{\text{град}}{\text{мм}}.$$

1) Для того, чтобы поляризованный свет не проходил через 2-й николь, его плоскость колебаний должна быть такой, как в – луче, т. е. перпендикулярной плоскости рисунка. Таким образом, нужно с помощью пластинки кварца повернуть световой вектор – луча, входящего в пластинку, на угол $\varphi_{\min_1} = 90°$ (а также на любой $\varphi_{k_1} = (2k+1)\cdot 90°$; $k = 0;\ 1;\ 2;\ 3\ldots$). Согласно формуле (1), такой угол поворота обеспечивает пластинка, толщина которой

$$d_1 = \frac{\varphi_1}{\alpha}. \qquad (2)$$

Вычисляем по этой формуле:

$$d_{\min_1} = \frac{\varphi_{\min_1}}{\alpha} = \frac{90°}{26{,}5\ \frac{\text{град}}{\text{мм}}} = 3{,}4\ \text{мм}.$$

2) Для того, чтобы свет, вышедший из кварцевой пластинки толщиной d_2, максимально проходил через 2-й николь, необходимо, чтобы плоскость колебаний светового вектора совпадала с плоскостью рисунка. Это достигается поворотом плоскости колебаний – луча на угол $\varphi_{k_2} = 2k\cdot 90°$; $k = 0;\ 1;\ 2;\ 3\ldots$), т. е. наименьший угол $\varphi_{\min_2} = 180°$. Толщину соответствующей пластинки вычисляем по формуле (2):

$$d_{\min_2} = \frac{\varphi_{\min_2}}{\alpha} = \frac{180°}{26{,}5\,\frac{\text{град}}{\text{мм}}} = 6{,}8 \text{ мм}.$$

Задача 16. При прохождении света в трубке длиной $l_1 = 20$ см, содержащей раствор сахара концентрацией $C_1 = 10$ %, плоскость поляризации света повернулась на угол $\varphi_1 = 13{,}3^{\circ}$. В другом растворе сахара в трубке длиной $l_2 = 25$ см плоскость поляризации света повернулась на угол $\varphi_2 = 15{,}2^{\circ}$. Определите концентрацию C_2 второго раствора.

Дано

$l_1 = 20$ см;

$C_1 = 10$ %;

$\varphi_1 = 13{,}3^{\circ}$;

$l_2 = 25$ см;

$\varphi_2 = 15{,}2^{\circ}$.

$C_2 - ?$

Решение

Сахар, его водный раствор, скипидар, никотин (чистая жидкость) являются <u>*оптически активными*</u> веществами, т. е. эти вещества поворачивают плоскость поляризации проходящего в них света. Угол поворота φ плоскости поляризации в растворах определяется следующей формулой:

$$\varphi = \alpha C d, \qquad (1)$$

где α – удельное вращение; C– массовая концентрация оптически активного вещества в растворе; d – путь, пройденный светом в жидкости.

Запишем формулу (1) для двух трубок с различными растворами:

$$\varphi_1 = \alpha C_1 l_1; \qquad (2)$$

$$\varphi_2 = \alpha C_2 l_2. \qquad (3)$$

Можно определить удельное вращение α для сахара в водном растворе по формуле (2), а затем подставить величину α в формулу (3), а можно просто исключить неизвестную величину α делением уравнения (3) на (2) и получить расчетную формулу искомой концентрации раствора в виде:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{C_2 l_2}{C_1 l_1}; \quad \rightarrow \quad C_2 = C_1 \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Вычисляем неизвестную концентрацию сахара во втором растворе:

$$C_2 = 10\ \% \cdot \frac{20 \text{ см}}{25 \text{ см}} \cdot \frac{15{,}2°}{13{,}3°} = 9{,}1\ \%.$$

3.4. План решения задач по теме «Тепловое излучение»

1. При записи краткого условия задачи необходимо перевести заданные величины в единицы системы СИ, так как в этих единицах заданы постоянные во всех экспериментальных законах теплового излучения АЧТ.

2. Следует иметь в виду, что экспериментальные законы излучения Стефана – Больцмана и Вина получены для ТИ абсолютно черного тела. Характеристики излучения АЧТ отмечены символом "$*$": $r^*_{\lambda,T}$ и R^*_T. Для серого тела ($a_T \neq f(\lambda)$) закон Стефана – Больцмана имеет следующий вид: $R_T^{\text{сер}} = a_T \sigma T^4$.

3. Спектральную плотность энергетической светимости черного тела $r^*_{\lambda,T}$ или $r^*_{\nu,T}$ можно вычислить по формулам Планка для этих величин. Переход от законов и характеристик излучения АЧТ к законам и величинам ТИ нечерных тел осуществляется с помощью закона Кирхгофа: $r_{\lambda,T} = a_{\lambda,T} \cdot r^*_{\lambda,T}$.

Задача 17. Из смотрового окна печи излучается поток энергии $\phi = 6{,}0\ \frac{\text{кДж}}{\text{мин}}$. Определите температуру T печи, если площадь окна $S = 10\ \text{см}^2$.

Дано

$\phi = 6{,}0\ \frac{\text{кДж}}{\text{мин}} = \frac{6 \cdot 10^3\ \text{Дж}}{60\ \text{с}} = 100\ \text{Вт}$;

$S = 10\ \text{см}^2 = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2$.

$T - ?$

Решение

Окошко в печи малой площади S представляет собой модель черного тела – сферу с малым отверстием (см. «Теоретическая часть», п. 2.4.1, рис. 26).

Поэтому для излучения, выходящего из малого отверстия в печи, можно использовать законы теплового излучения черного тела. Закон Стефана – Больцмана:

$$R^*_T = \sigma T^4, \tag{1}$$

который представляет собой зависимость энергетической светимости черного тела R^*_T от его термодинамической температуры T; величина $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная Стефана – Больцмана.

По определению, энергетическая светимость любого тела, в том числе и АЧТ, – это мощность ϕ (поток энергии) излучения с единицы поверхности тела ($S = 1\ \text{м}^2$):

$$R_T = \frac{\phi}{S}. \tag{2}$$

С учетом формулы (2) перепишем закон Стефана – Больцмана и получим из него расчетную формулу температуры:

$$\frac{\phi}{S} = \sigma T^4; \quad \rightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{\phi}{\sigma S}}. \tag{3}$$

Вычисляем температуру в печи по формуле (3):

$$T = \sqrt[4]{\frac{100\ \text{Вт}}{5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2}} = 1{,}15 \cdot 10^3\ \text{К} = 1150\ \text{К}.$$

Задача 18. Температура абсолютно черного тела $T = 3{,}2$ кК. Определите его энергетическую светимость R^*_T, длину волны λ_m, на которую приходится максимум энергии излучения, и спектральную плотность энергетической светимости $\left(r^*_{\lambda,T}\right)_{\max}$ для этой длины волны.

Дано

$T = 3{,}2$ кК;

$R_T^* - ?$

$\lambda_m - ?$

$\left(r_{\lambda,T}^*\right)_{max} - ?$

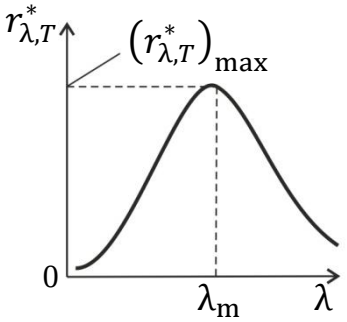


Рис. 43

Решение

Для нахождения параметров спектра теплового излучения АЧТ используем следующие законы. Интегральную энергетическую светимость $R_T^* = \int_0^\infty r_{\lambda,T}^* d\lambda$ (равную площади под кривой спектра (рис. 43)), находим по закону Стефана – Больцмана:

$$R_T^* = \sigma T^4, \qquad (1)$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная Стефана – Больцмана.

Вычисляем энергетическую светимость черного тела:

$$R_T^* = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} \cdot 3{,}2^4 \cdot (10^3)^4\ \text{К}^4 = 5{,}95 \cdot 10^6\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 5{,}95\ \frac{\text{МВт}}{\text{м}^2}.$$

Длина волны λ_m, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $\left(r_{\lambda,T}^*\right)_{max}$ (см. рис. 43), определяется законом смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \qquad (2)$$

где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м · К – постоянная Вина.

Вычисляем длину волны излучения λ_m:

$$\lambda_m = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{К}}{3{,}2 \cdot 10^3\ \text{К}} = 0{,}906 \cdot 10^{-6}\ \text{м} = 0{,}906\ \text{мкм}.$$

Максимум энергии теплового излучения АЧТ при температуре $T = 3200$ К лежит в инфракрасной области спектра.

Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела $\left(r_{\lambda,T}^*\right)_{max}$ от температуры дает второй закон Вина:

$$\left(r_{\lambda,T}^*\right)_{max} = CT^5; \qquad (3)$$

где $C = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^5}$ – постоянная величина.

Вычисляем высоту максимума кривой спектра АЧТ при данной температуре:

$$\left(r_{\lambda,T}^*\right)_{max} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^5} \cdot 3{,}2^5 \cdot (10^3)^5\ \text{К}^5 = 4{,}4 \cdot 10^{12}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Полученная величина весьма большая, так как она относится к интервалу $\Delta\lambda = 1$ м, который практически неприемлем для оптического диапазона: $\Delta\lambda_{опт} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ м. Если вычислить ее для интервала шириной $\Delta\lambda = 1$ нм, используя постоянную $C' = 1{,}3 \cdot 10^{-14}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{нм} \cdot \text{К}^5}$, то получим вполне разумную величину $\left(r_{\lambda,T}^*\right)_{max} = 4{,}4 \cdot 10^3\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{нм}} = 4{,}4\ \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2 \cdot \text{нм}}$.

Задача 19. Нагревательная печь, потребляющая мощность $P = 2{,}5$ кВт, имеет отверстие площадью $S = 10$ см^2. Определите долю η мощности, излучаемой из отверстия, если температура внутренней поверхности печи $T = 1{,}6$ кК.

Дано

$P = 2{,}5$ кВт;

$S = 10$ см^2 $= 10^{-3}$ м^2;

$T = 1{,}6$ кК.

$\eta = \dfrac{\phi_{отв}}{P} - ?$

Решение

Согласно закону сохранения энергии, при установившейся температуре $T = 1{,}6$ кК $=$ const подводимая электрическая мощность P излучается стенками печи и отверстием:

$$P = \phi_{ст} + \phi_{отв}, \qquad (1)$$

где $\phi_{ст}$ и $\phi_{отв}$ – потоки энергии излучения, испускаемые стенками печи и отверстием.

Учитывая, что площадь отверстия в печи сравнительно мала, будем считать отверстие моделью черного тела и для излучения из отверстия используем закон Стефана – Больцмана:

$$R_T^* = \sigma T^4. \qquad (2)$$

Здесь $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$ – постоянная Стефана – Больцмана.

По определению, величина энергетической светимости R_T – это мощность теплового излучения с поверхности площадью $S = 1$ м^2:

$$R_T = \frac{\phi}{S}. \qquad (3)$$

Из этой формулы выразим величину мощности, излучаемой из отверстия, учитывая формулу (2):

$$\phi_{отв} = \sigma T^4 S.$$

Определим долю η мощности, излучаемой из отверстия:

$$\eta = \frac{\phi_{отв}}{P} = \frac{\sigma T^4 S}{P}. \qquad (4)$$

Вычисляем величину η:

$$\eta = \frac{5{,}67\cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}\cdot 1{,}6^4\cdot(10^3)^4\ \text{К}^4\cdot 10^{-3}\ \text{м}^2}{2{,}5\cdot 10^3\ \text{Вт}} = 0{,}15 = 15\ \%.$$

Задача 20. Вычислите истинную температуру T раскаленной вольфрамовой ленты, если радиационный пирометр показывает температуру $T_{рад} = 2{,}3$ кК. Примите, что поглощательная способность вольфрама $a_T = 0{,}33$ и не зависит от длины волны излучения.

Дано

$T_{рад} = 2{,}3$ кК;

$a_T = 0{,}33$.

$T - ?$

Решение

<u>*Радиационная температура*</u> – <u>*это температура черного тела*</u>, имеющего такую же энергетическую светимость, как и серое тело:

$$R^*_{T_{рад}} = R_T^{сер}. \qquad (1)$$

Запишем закон Стефана – Больцмана для излучения АЧТ:

$$R_T^* = \sigma T^4. \qquad (2)$$

Энергетическая светимость серого тела, для которого поглощательная способность a_T не зависит от длины волны излучения, определяется следующей формулой:

$$R_T^{\text{сер}} = a_T \sigma T^4. \qquad (3)$$

Согласно определению радиационной температуры (1), приравниваем формулы (2) и (3):

$$\sigma T_{\text{рад}}^4 = a_T \sigma T^4; \quad \rightarrow \quad T = \frac{T_{\text{рад}}}{\sqrt[4]{a_T}}. \qquad (4)$$

Так как поглощательная способность тел $a_T < 1$, то, в соответствии с расчетной формулой (4), истинная температура тела T всегда больше, чем радиационная $T_{\text{рад}}$, измеренная по радиационному пирометру.

Вычисляем истинную температуру вольфрамовой ленты:

$$T = \frac{2300\ \text{К}}{\sqrt[4]{0{,}33}} = 3030\ \text{К} = 3{,}03\ \text{кК}.$$

3.5. План решения задач по теме «Фотоэффект»

1. В уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта входит величина A – работа выхода электрона из металлического фотокатода. Эту величину можно определить одним из следующих способов: 1) для известного материала фотокатода – по справочной таблице; 2) рассчитать по заданной величине λ_0 – красной границе фотоэффекта для данного металла, используя формулу $A = \frac{hc}{\lambda_0}$; 3) пренебречь величиной $A \ll h\nu$ – это неравенство справедливо в том случае, если фотоэффект вызывается рентгеновским или γ-излучением.

2. Энергию фотона, работу выхода электрона и его кинетическую энергию нередко выражают в электрон-вольтах. Энергию, равную 1 эВ, приобретает электрон, прошедший в ЭСП разность потенциалов (напряжение) $U = 1$ В. Формула работы ускоряющего (задерживающего) поля: $A = eU$, – показывает соотношение единиц энергии 1 эВ и 1 Дж:

$$1\ \text{эВ} = 1\ e \cdot 1\ \text{В} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot 1\ \text{В} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

Таким образом, единица энергии частицы $1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж – весьма малая по сравнению с единицей 1 Дж.

Задача 21. На металлический фотокатод направлен пучок света с частотой $\nu = 6{,}0 \cdot 10^{14}$ Гц. Красная граница фотоэффекта для данного металла $\lambda_0 = 0{,}75$ мкм. Определите максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов $(E_{\text{К}})_{\max}$ и их максимальную скорость $v_{\max}$.

Дано

$\nu = 6{,}0 \cdot 10^{14}$ Гц;

$\lambda_0 = 0{,}75$ мкм;

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

$(E_К)_{max} - ?$ $v_{max} - ?$

Решение

Запишем уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + (E_К)_{max}; \qquad h\nu = A + (E_К)_{max}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon = h\nu$ – энергия фотона; A – работа выхода электрона из металла.

Согласно уравнению (1), граничная частота ν_0 (красная граница фотоэффекта) соответствует энергии фотоэлектрона $(E_К)_{max} = 0$; при этом

$$h\nu_0 = A, \quad \rightarrow \quad A = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad (\text{так как } \lambda_0\nu_0 = c). \qquad (2)$$

Подставим найденную в формуле (2) величину работы выхода в уравнение (1) и выразим из него максимальную кинетическую энергию электрона:

$$(E_К)_{max} = h\nu - \frac{hc}{\lambda_0} = h\left(\nu - \frac{c}{\lambda_0}\right). \qquad (3)$$

Вычисляем величину $(E_К)_{max}$:

$(E_К)_{max} = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с $\cdot \left(6 \cdot 10^{14}\ \text{с}^{-1} - \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{0{,}75 \cdot 10^{-6}\ \text{м}}\right) = 1{,}3 \times 10^{-19}$ Дж $= \frac{1{,}3 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}} = 0{,}82$ эВ.

Максимальную скорость фотоэлектрона найдем из формулы кинетической энергии:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = (E_К)_{max}; \quad \rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2(E_К)_{max}}{m}}. \qquad (4)$$

Здесь m – масса электрона.

Вычисляем величину v_{max}:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{кг}}} = \sqrt{29 \cdot 10^{10}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = 5{,}4 \cdot 10^5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 22. Излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}12$ мкм падает на поверхность цинка. Определите долю η энергии фотона, которая расходуется на сообщение электрону кинетической энергии $(E_К)_{max}$.

Дано

$\lambda = 0{,}12$ мкм;

Zn: $A = 6{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж;

$\eta = \frac{(E_К)_{max}}{\varepsilon} - ?$

Решение

Запишем уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + (E_К)_{max}, \qquad (1)$$

где ε – энергия фотона; A – работа выхода электрона из металла, для цинка $A = 6{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж (по справочной таблице).

Из уравнения (1) выразим величину максимальной кинетической энергии фотоэлектрона:

$$(E_К)_{max} = \varepsilon - A,$$

и определим долю, которую составляет $(E_К)_{max}$ от энергии фотона, как отношение:

$$\eta = \frac{(E_К)_{max}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - A}{\varepsilon} = 1 - \frac{A}{\varepsilon}. \quad (2)$$

Здесь энергия фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$; с учетом этой формулы расчетная формула (2) доли энергии η принимает следующий вид:

$$\eta = 1 - \frac{A\lambda}{hc}. \quad (3)$$

Вычисляем долю η кинетической энергии электрона от энергии фотона:

$$\eta = 1 - \frac{6{,}4\cdot10^{-19}\ \text{Дж}\cdot0{,}12\cdot10^{-6}\ \text{м}}{6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}\cdot3\cdot10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 1 - 0{,}39 = 0{,}61.$$

Задача 23. На металлическую пластину направлен пучок ультрафиолетового излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}23$ мкм. Фототок прекращается, если приложить минимальную задерживающую разность потенциалов $U_{min} = 0{,}75$ В. Определите работу выхода A электрона из металла.

Дано

$\lambda = 0{,}23$ мкм;

$U_{min} = 0{,}75$ В.

$A - ?$

Решение

Запишем уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта и определим из него работу выхода A электрона из металла:

$$\frac{hc}{\lambda} = A + (E_К)_{max} \quad \rightarrow \quad A = \frac{hc}{\lambda} - (E_К)_{max}. \quad (1)$$

Здесь $\frac{hc}{\lambda}$ – энергия фотона; $(E_К)_{max}$ – максимальная кинетическая энергия электрона.

Работа электростатического поля $A_{ЭП}$, уменьшающего до нуля скорость и кинетическую энергию электрона, равна приращению его кинетической энергии:

$$A_{ЭП} = eU_{min}; \quad A_{ЭП} = 0 - (E_К)_{max}.$$

Из этих формул определяем максимальную кинетическую энергию электрона:

$$(E_К)_{max} = eU_{min}. \quad (2)$$

Эту величину энергии электрона $(E_К)_{max}$ подставим в уравнение (1) и получим расчетную формулу работы выхода электрона в виде:

$$A = \frac{hc}{\lambda} - eU_{min}. \quad (3)$$

Вычисляем искомую работу выхода электрона из металлического фотокатода:

$$A = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}\cdot3\cdot10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{0{,}23\cdot10^{-6}\ \text{м}} - 1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{Кл}\cdot0{,}75\ \text{В} = (8{,}6-1{,}2)10^{-19}\ \text{Дж} = 7{,}4\cdot10^{-19}\ \text{Дж}.$$

Учтем, что $1\text{Дж} = \frac{1}{1{,}6\cdot10^{-19}}$ эВ, и выразим величину A в электрон-вольтах:

$$A = \frac{7{,}4\cdot10^{-19}\ \text{Дж}}{1{,}6\cdot10^{-19}\ \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}} = 4{,}6\ \text{эВ}.$$

Полученное значение работы выхода электрона близко к табличной величине для серебра.

Задача 24. Фотон с энергией $\varepsilon = 10$ эВ падает на цинковую пластинку и вызывает фотоэффект. Определите импульс $\vec{p}$, полученный пластинкой, считая, что скорости движения фотона и фотоэлектрона лежат на одной прямой, перпендикулярной поверхности пластинки.

Дано

$\varepsilon = 10$ эВ;

Zn: $A = 6{,}4\cdot10^{-19}$ Дж = 4 эВ;

$\overrightarrow{v_\text{ф}} \parallel \overrightarrow{v_e}$.

$\vec{p}$–?

Решение

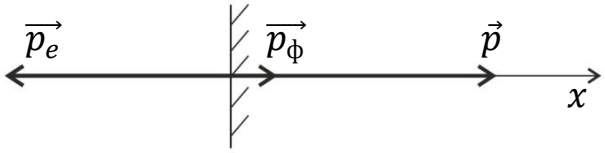


Рис. 44

На рис. 44 показаны импульсы частиц, взаимодействующих с пластинкой: импульс фотона $\overrightarrow{p_\text{ф}}$, падающего на пластинку, и импульс $\overrightarrow{p_e}$ вылетающего из пластинки электрона. Механическую систему, состоящую из пластинки и двух частиц, будем считать замкнутой, и применим для нее закон сохранения импульса (ЗСИ):

$$\overrightarrow{p_\text{нач}} = \overrightarrow{p_\text{кон}}. \qquad (1)$$

Импульсы системы до взаимодействия фотона со свободным электроном в металле и после их взаимодействия:

$$\overrightarrow{p_\text{нач}} = \overrightarrow{p_\text{ф}}; \qquad \overrightarrow{p_\text{кон}} = \overrightarrow{p_e} + \vec{p},$$

приравниваем, согласно уравнению ЗСИ (1):

$$\overrightarrow{p_\text{ф}} = \overrightarrow{p_e} + \vec{p}. \qquad (2)$$

Запишем уравнение (2) в проекциях на ось x (см.рис.44):

$$p_\text{ф} = -p_e + p; \quad \rightarrow \quad p = p_\text{ф} + p_e. \qquad (3)$$

Определим импульс фотона, движущегося со скоростью света c:

$$p_{\text{ф}} = mc, \qquad (4)$$

где m – масса фотона, пропорциональная его энергии, согласно формуле Эйнштейна: $\varepsilon = mc^2 \;\; \rightarrow \;\; m = \frac{\varepsilon}{c^2}$. Тогда формула (4) для импульса фотона принимает следующий вид:

$$p_{\text{ф}} = \frac{\varepsilon}{c}. \qquad (5)$$

Определим импульс электрона $p_e = mv_{\max}$ через его кинетическую энергию $(E_{\text{К}})_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{p_e^2}{2m}$:

$$p_e = \sqrt{2m(E_{\text{К}})_{\max}}. \qquad (6)$$

Чтобы определить кинетическую энергию электрона, запишем уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + (E_{\text{К}})_{\max}; \quad \rightarrow \quad (E_{\text{К}})_{\max} = \varepsilon - A. \qquad (7)$$

Найденную величину $(E_{\text{К}})_{\max}$ подставим в формулу (6); при этом импульс электрона

$$p_e = \sqrt{2m(\varepsilon - A)}. \qquad (8)$$

Расчетная формула (3) импульса пластинки, с учетом формул (5) и (8) для импульсов частиц, принимает следующий вид:

$$p = \frac{\varepsilon}{c} + \sqrt{2m(\varepsilon - A)}, \;\; \text{где} \;\; m = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}. \qquad (9)$$

Вычисляем импульс, полученный пластинкой:

$$p = \frac{10 \text{ эВ} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}} + \sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot (10 - 4) \text{ эВ} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}} =$$
$$(5{,}3 \cdot 10^{-27} + 1{,}3 \cdot 10^{-24}) \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 1{,}3 \cdot 10^{-24} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Проведенный расчет показывает, что импульс электрона $p_e \gg p_{\text{ф}}$, поэтому, согласно ЗСИ: $0 = \vec{p_e} + \vec{p}$, пластинка приобретает импульс $\vec{p} = -\vec{p_e}$ – в результате явления отдачи при вылете электрона.

3.6. План решения задач по теме «Фотоны. Давление света. Эффект Комптона»

1. В формуле для расчета давления света: $p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho)$, – величина E_e – энергетическая освещенность поверхности по физическому смыслу совпадает с интенсивностью света $I, \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right)$, падающего на поверхность. Величина E_e, как и I, равна мощности (потоку энергии) излучения, падающего на единичную площадь: $S = 1 \text{ м}^2$.

2. При решении задач на эффект Комптона: упругое соударение фотона со свободным электроном, – наиболее простой путь состоит в использовании законов сохранения энергии и импульса, соответственно:

$$\varepsilon = \varepsilon' + E_{\text{к}}; \qquad (1)$$

$$\vec{p} = \overrightarrow{p'} + \overrightarrow{p_e}. \qquad (2)$$

Для определения импульса электрона отдачи полезна векторная диаграмма импульсов, соответствующая уравнению ЗСИ (2).

3. Приведем порядок величин, характеризующих фотоны. *Энергия фотона* $\varepsilon = h\nu$ возрастает от 0,1 эВ для инфракрасного (ИК) излучения до 100 эВ для мягких рентгеновских лучей и до 10^7 эВ (т. е. 10 МэВ) – фотонов жесткого излучения. Единица энергии $1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж. Соответствующая этим энергиям ($\varepsilon = mc^2$) *масса фотонов* m возрастает от 10^{-37} кг для ИК-излучения до 10^{-29} кг (что составляет $\approx 10\ m_e$ – масс электрона) – для жестких рентгеновских лучей.

4. Импульс фотонов, а также релятивистских электронов (скорость которых $v \leq c$ – скорости света), измеряют в единицах $\left(\frac{\text{МэВ}}{c}\right)$, в соответствии с формулой импульса фотона $p = \frac{\varepsilon}{c}$, где c – скорость света в вакууме, а энергия частицы выражена в мегаэлектрон-вольтах (МэВ):

$$1\,\frac{\text{МэВ}}{c} = \frac{10^6\ \text{эВ} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}}{3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 5{,}3 \cdot 10^{-22}\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Порядок величин импульса фотонов: от $2 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{МэВ}}{c}$ для видимого света до $10\ \frac{\text{МэВ}}{c}$ – жесткого рентгеновского излучения.

Задача 25. Для фотона рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 1{,}0$ пм определите энергию, массу и импульс.

Дано

$\lambda = 1{,}0$ пм.

$\varepsilon - ?\ \ m - ?\ \ p - ?$

Решение

Энергия фотона определяется следующей формулой:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \qquad (1)$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка; ν и λ – частота и длина волны излучения соответственно; $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – скорость света в вакууме.

Вычисляем величину энергии фотона:

$$\varepsilon = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \text{м}} = 2{,}0 \cdot 10^{-13}\ \text{Дж} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-13}\ \text{Дж}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}} = 1{,}2\ \text{МэВ}.$$

Согласно специальной теории относительности, энергия фотона пропорциональна его массе:

$$\varepsilon = mc^2. \qquad (2)$$

Вычисляем по этой формуле массу фотона:

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{2{,}0\cdot 10^{-13}\ \text{Дж}}{3^2\cdot 10^{16}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = 2{,}2\cdot 10^{-30}\ \text{кг}.$$

Полученное значение массы фотона примерно в 2 раза больше массы покоя электрона $m_e = 0{,}911\cdot 10^{-30}$ кг.

Импульс фотона определяем, как произведение массы на скорость фотона, по следующей формуле:

$$p = mc = \frac{\varepsilon}{c^2}\cdot c = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad (3)$$

Вычисляем импульс фотона:

$$p = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}}{1{,}0\cdot 10^{-12}\ \text{м}} = 6{,}62\cdot 10^{-22}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Определим импульс фотона в единицах $\frac{\text{МэВ}}{c}$, где c – скорость света в вакууме, по следующей формуле:

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{1{,}2\ \text{МэВ}}{c} = 1{,}2\ \frac{\text{МэВ}}{c}.$$

Задача 26. На зеркальную поверхность площадью $S = 5\ \text{см}^2$ падает нормально поток излучения $\phi = 10$ Вт. Определите давление p и силу давления излучения F на эту поверхность.

Дано

$\rho = 1$;

$S = 5\ \text{см}^2 = 5\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2$;

$\phi = 10$ Вт.

$p - ?\quad F - ?$

Решение

Давление p света, падающего по нормали на поверхность с коэффициентом отражения ρ, описывается следующей формулой:

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho), \qquad (1)$$

где $c = 3\cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – скорость света в вакууме; ρ – коэффициент отражения света от поверхности;

E_e – энергетическая освещенность поверхности, равная энергии N фотонов, падающих на единицу площади в единицу времени:

$$E_e = \frac{N\cdot h\nu}{St}, \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right),\ \text{или}\ \ E_e = \frac{\phi}{S}. \qquad (2)$$

С учетом этой формулы из уравнения (1) получаем следующую расчетную формулу давления, оказываемого светом на поверхность:

$$p = \frac{\phi}{Sc}\,(1+\rho). \qquad (3)$$

Вычисляем величину давления излучения на зеркальную поверхность, имеющую коэффициент отражения $\rho = 1$:

$$p = \frac{10\ \text{Вт}}{5\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2\cdot 3\cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}\,(1+1) = 1{,}33\cdot 10^{-4}\ \text{Па} = 0{,}133\ \text{мПа}.$$

Чтобы найти силу, с которой излучение действует на поверхность площадью S, используем определительную формулу величины давления:

$$p = \frac{F}{S}; \quad \rightarrow \quad F = pS. \qquad (4)$$

Вычисляем искомую силу по формуле (4):

$$F = 1{,}33 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 6{,}7 \cdot 10^{-8}\ \text{Н} = 67\ \text{нН}.$$

Задача 27. На расстоянии $r = 2$ м от точечного изотропного источника света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм находится площадка $S = 10$ мм^2, расположенная перпендикулярно падающим лучам. Мощность источника $P = 100$ Вт. Определите число фотонов N, падающих на площадку за время $t = 10$ с.

Дано

$r = 2$ м;

$\lambda = 0{,}5$ мкм;

$S = 10^{-5}$ м^2;

$P = 100$ Вт;

$t = 10$ с.

$N_s -$?

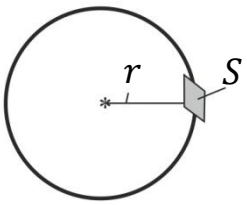


Рис. 45

Решение

Мощность излучения P, по определению, равна энергии всех N фотонов, излучаемых в единицу времени:

$$P = \frac{N \cdot \varepsilon}{t} = \frac{N \cdot \frac{hc}{\lambda}}{t}; \quad \rightarrow \quad N = \frac{P\lambda t}{hc}. \qquad (1)$$

Излучение изотропного источника распространяется равновероятно по всем направлениям; поэтому на расстоянии r от источника излученное число фотонов N распределится равномерно по поверхности сферы площадью $S_{\text{сф}} = 4\pi r^2$ (рис. 45).

На единицу площади приходится число фотонов $\frac{N}{S_{\text{сф}}}$, $\left(\frac{1}{\text{м}^2}\right)$. Тогда на заданную в задаче площадку S будет падать число фотонов

$$N_s = \left(\frac{N}{S_{\text{сф}}}\right) \cdot S.$$

С учетом формулы (1) получаем следующую расчетную формулу:

$$N_s = \frac{P\lambda t S}{4\pi r^2 hc}. \qquad (2)$$

Проверим эту формулу по единицам входящих в нее величин:

$$[N_s] = \frac{1\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} \cdot 1\ \text{м} \cdot 1\ \text{с} \cdot 1\ \text{м}^2}{1\ \text{м}^2 \cdot 1\ [\text{Дж} \cdot \text{с}] \cdot 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 1.$$

Видим, что формула (2) дает безразмерную величину числа фотонов.

Вычисляем по формуле (2) число фотонов N_s, падающих за время t на площадку S:

$$N_s = \frac{100\ \text{Вт} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{м} \cdot 10\ \text{с} \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2\ \text{м}^2 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 5 \cdot 10^{14}.$$

Задача 28. Определите угол θ, на который был рассеян фотон с энергией $\varepsilon = 1{,}53$ МэВ при эффекте Комптона, если кинетическая энергия электрона отдачи $E_К = 0{,}51$ МэВ.

Дано

$\varepsilon = 1{,}53$ МэВ;

$E_К = 0{,}51$ МэВ.

$\theta - ?$

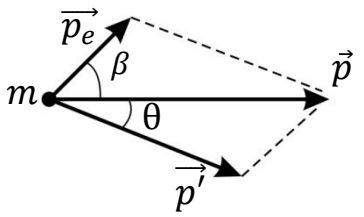


Рис. 46

Решение

Согласно формуле Комптона, от угла рассеяния θ (рис. 46) зависит изменение длины волны Δλ при рассеянии фотона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta). \qquad (1)$$

Здесь λ' и λ – длины волн рассеянного и падающего фотона; λ_C – комптоновская длина волны; при рассеянии на свободных электронах ($m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг) ее величина:

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = 2{,}43 \text{ пм}.$$

Длина волны связана с энергией фотона следующей формулой:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}; \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{\varepsilon}; \quad \text{и} \quad \lambda' = \frac{hc}{\varepsilon'}. \qquad (2)$$

Энергию рассеянного фотона ε' определим по закону сохранения энергии (ЗСЭ), который выполняется при упругом соударении налетающего фотона и электрона:

$$\varepsilon + E_0 = \varepsilon' + E, \qquad (3)$$

где E_0 – энергия покоя электрона; E – полная энергия электрона отдачи: $E = E_0 + E_К$. С учетом этой формулы ЗСЭ (3) принимает следующий вид:

$$\varepsilon = \varepsilon' + E_К; \quad \rightarrow \quad \varepsilon' = \varepsilon - E_К. \qquad (4)$$

Тогда, согласно формуле (2), длина волны рассеянного фотона

$$\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon - E_К}. \qquad (5)$$

Искомый угол рассеяния θ определим по формуле (1):

$$\cos\theta = 1 - \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda_C}. \qquad (6)$$

С учетом формул (2) и (5) для длин волн фотонов расчетная формула (6) имеет следующий вид:

$$\cos\theta = 1 - \frac{hc\left(\frac{1}{\varepsilon - E_К} - \frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lambda_C} = 1 - \frac{hcE_К}{\varepsilon(\varepsilon - E_К)\lambda_C}. \qquad (7)$$

Определяем по этой формуле угол рассеяния фотона:

$$\cos\theta = 1 - \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}\cdot3\cdot10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot0{,}51\ \text{МэВ}}{1{,}53\ \text{МэВ}\ (1{,}53-0{,}51)\cdot10^{6}\ \text{эВ}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\ \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}\cdot2{,}43\cdot10^{-12}\ \text{м}} = 1 - 0{,}17 = 0{,}83.$$

Угол рассеяния $\theta = 34°$.

Задача 29. В эффекте Комптона фотон был рассеян на свободном электроне на угол $\theta = \frac{\pi}{2}$. Определите кинетическую энергию электрона $E_К$ и его импульс $\overrightarrow{p_e}$ $\left(\text{в единицах } \frac{\text{МэВ}}{c}\right)$, если энергия фотона до рассеяния $\varepsilon = 1{,}53$ МэВ.

Дано

$\theta = \frac{\pi}{2}$;

$\varepsilon = 1{,}53$ МэВ.

1) $E_К - ?$ 2) $\overrightarrow{p_e} - ?$

Решение

1) Кинетическая энергия электрона определяется по закону сохранения энергии (ЗСЭ), который выполняется при упругом соударении налетающего фотона и электрона:

$$\varepsilon + E_0 = \varepsilon' + E; \ \rightarrow \ \varepsilon = \varepsilon' + (E - E_0); \ \rightarrow \ \varepsilon = \varepsilon' + E_К. \quad (1)$$

Здесь ε и ε' – энергия фотона падающего и рассеянного излучения; $E_К$ – кинетическая энергия электрона отдачи, равная разности полной энергии E частицы и ее энергии покоя E_0.

Энергия рассеянного фотона ε' связана с его длиной волны λ':

$$\varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'}. \quad (2)$$

Изменение длины волны $\Delta\lambda$ при рассеянии фотона зависит от угла θ (см. рис. 46) и определяется формулой Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta). \quad (3)$$

где $\lambda_C = \frac{h}{mc}$ – комптоновская длина волны. Так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, то по формуле (3) находим величину $\lambda' = \lambda + \lambda_C$, где длина волны λ падающего излучения, согласно формуле (2): $\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}$. Тогда $\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon} + \lambda_C$ и, в соответствии с формулой (2), энергия рассеянного фотона

$$\varepsilon' = \frac{hc}{\frac{hc}{\varepsilon}+\lambda_C} = \frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon\lambda_C}{hc}}. \quad (4)$$

Подставим в последнюю формулу величину комптоновской длины волны $\lambda_C = \frac{h}{mc}$; при этом формула (4) принимает следующий вид:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{mc^2}} = \frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{E_0}}. \quad (5)$$

Здесь $E_0 = mc^2 = 0{,}511$ МэВ – энергия покоя электрона.

Вычисляем энергию рассеянного фотона по формуле (5):

$$\varepsilon' = \frac{1{,}53\ \text{МэВ}}{1+\frac{1{,}53\ \text{МэВ}}{0{,}51\ \text{МэВ}}} = \frac{\varepsilon}{4} = 0{,}38\ \text{МэВ}.$$

По уравнению (1) ЗСЭ определим кинетическую энергию электрона отдачи как разность энергий фотона до и после соударения:

$$E_{\text{К}} = \varepsilon - \varepsilon' = (1{,}53 - 0{,}38)\ \text{МэВ} = 1{,}15\ \text{МэВ}.$$

Так как кинетическая энергия электрона $E_{\text{К}} > E_0$, то электрон релятивистский.

2) Импульс электрона отдачи $\overrightarrow{p_e}$ найдем по закону сохранения импульса, который также выполняется при соударении частиц:

$$\vec{p} = \overrightarrow{p'} + \overrightarrow{p_e}. \qquad (6)$$

Покажем векторы частиц на векторной диаграмме (рис. 47). Величина импульса фотона

$$p = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{\varepsilon}{c}. \qquad (7)$$

Соответственно, импульс рассеянного фотона

$$p' = \frac{\varepsilon'}{c}. \qquad (7\ \text{а})$$

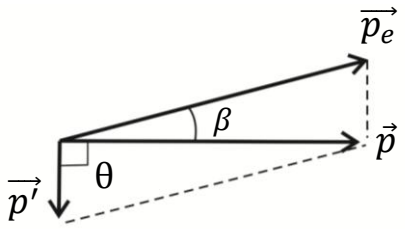


Рис. 47

Так как при рассеянии энергия фотона уменьшилась в 4 раза: $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4}$, то и импульс рассеянного фотона $p' = \frac{p}{4}$. Поскольку угол рассеяния $\theta = \frac{\pi}{2}$, то из прямоугольного треугольника (см. рис. 47) находим импульс электрона по теореме Пифагора:

$$p_e{}^2 = p^2 + (p')^2 = p^2 + \frac{p^2}{16} = \frac{17}{16}p^2. \qquad (8)$$

С учетом формулы (7) для импульса фотона преобразуем формулу (8) в следующую расчетную формулу:

$$p_e = \frac{\sqrt{17}}{4}\frac{\varepsilon}{c}. \qquad (9)$$

Вычисляем импульс электрона в единицах $\frac{\text{МэВ}}{c}$, где c – скорость света в вакууме:

$$p_e = \frac{\sqrt{17}}{4} \cdot \frac{1{,}53\ \text{МэВ}}{c} = 1{,}58\ \frac{\text{МэВ}}{c}.$$

Часть 3

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И АТОМНОЙ ФИЗИКИ

4. Теоретическая часть

4.1. Теория атома водорода по Бору

Резерфорд на основании опытов в 1911 г. предложил ***ядерную (планетарную) модель атома***.

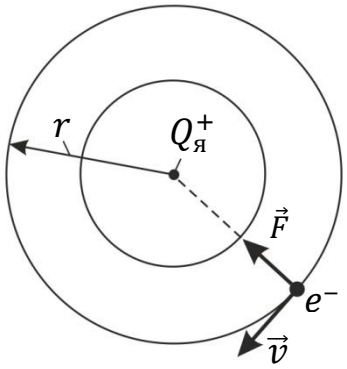


Рис. 48

Подобно Солнечной системе, где гравитационная сила $F_{грав}$ обеспечивает движение планеты вокруг Солнца, в атоме электрон вращается вокруг ядра, удерживаясь на круговой орбите центростремительной силой $\vec{F}$ кулоновского взаимодействия с ядром (рис. 48). В ядре, линейный размер которого 10^{-15} ... 10^{-14} м, сосредоточен положительный заряд. На расстоянии $r \geq 10^{-10}$ м от ядра располагаются электронные орбиты.

4.1.1. Планетарная модель атома. Постулаты Бора

Для движения электрона массой m по окружности радиусом r с нормальным ускорением $a = \frac{v^2}{r}$ второй закон Ньютона запишем в виде:

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{k(Ze)\cdot e}{r^2}, \qquad (1)$$

где $k = 9 \cdot 10^9 \ \frac{м}{Ф}$ – коэффициент пропорциональности в законе Кулона; $Ze = Q_я^+$ – заряд ядра элемента с порядковым номером Z (в системе Менделеева), для водорода $Z = 1$; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона.

Бор в 1913 г. создал первую квантовую теорию атома водорода, основанную на двух постулатах. ***Первый постулат Бора***: *атом, находящийся <u>в стационарных состояниях, не излучает энергию</u>; при этом электрон движется вокруг ядра по стационарной орбите с постоянным радиусом r, на которой момент импульса электрона квантован по условию:*

$$mv_n r_n = n\hbar; \quad n = 1; 2; 3 \ldots \ . \qquad (2)$$

Здесь m – масса электрона, v_n – его скорость на -й орбите, n – главное квантовое число; $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

Второй постулат Бора: *при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую орбиту атом излучает (или поглощает) фотон с энергией $h\nu$, равной разности энергий электрона на орбитах с номерами n_1 и n_2 (это квантовые числа стационарных состояний):*

$$h\nu = E_{n_1} - E_{n_2}. \qquad (3)$$

Здесь E_{n_1} – энергия атома до излучения (поглощения) фотона; E_{n_2} – после излучения (поглощения). При $E_{n_1} > E_{n_2}$ излучается энерия при переходе электрона с более удаленной от ядра орбиты на близлежащую орбиту. Поглощение фотона сопровождается переходом электрона на орбиту, более удаленную от ядра.

4.1.2. Энергетические уровни и спектр излучения атома водорода

Используя уравнение (1) динамики движения электрона в атоме и формулу (2) первого постулата, Бор получил выражение для радиуса r_n -й стационарной орбиты (см. решение задачи 30) в следующем виде:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{ke^2m}; \quad \rightarrow \quad r_n = n^2 r_1, \qquad (4)$$

где $r_1 = a = \frac{\hbar^2}{ke^2m} = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м – первый боровский радиус.

Формула (4) показывает, что радиусы орбит увеличиваются с ростом квантового числа n пропорционально его квадрату n^2.

Полная энергия E электрона в атоме водорода (и в любом другом атоме) равна сумме кинетической энергии $E_К$ электрона и потенциальной энергии $E_{Пn}$ его взаимодействия с зарядом ядра (в атоме водорода $Q_я^+ = e$):

$$E_{Пn} = \frac{ke\cdot(-e)}{r_n} = -\frac{ke^2}{r_n}.$$

Таким образом, величина полной энергии атома водорода в состоянии с главным квантовым числом n

$$E_n = E_{Кn} + E_{Пn} = \frac{m{v_n}^2}{2} - \frac{ke^2}{r_n}. \qquad (5)$$

Здесь v_n – скорость электрона на -й стационарной орбите, она определяется законом динамики (1); r_n – радиус этой орбиты (см. формулу (4)). Расчет энергии атома водорода по формуле (5) (см. решение задачи 32) приводит к следующему результату:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{ke^2}{2a}; \quad \rightarrow \quad E_n = \frac{E_1}{n^2}; \quad n = 1; 2; 3 \ldots . \qquad (6)$$

Здесь $E_1 = -\frac{ke^2}{2a} = -13{,}6$ эВ – энергия атома водорода <u>*в основном состоянии*</u> – с квантовым числом $n = 1$. Состояния атома с энергиями E_2, E_3, … , называют возбужденными. Величина $E_1 = -13{,}6$ эВ является минимальной энергией атома водорода. Максимальная энергия: $E_\infty = 0$, – соответствует ионизации атома путем отрыва электрона от ядра.

Полная энергия атома водорода, согласно формуле (6), отрицательна; это означает, что электрон находится в связанном состоянии. Расчет по формуле (6), где n – целые числа, дает <u>*дискретный набор значений энергии*</u> атома, которые называют ***энергетические уровни***. Схема энергетических уровней атома водорода и переходы с излучением энергии показаны на рис. 49. Эти переходы атома из одного состояния в другое

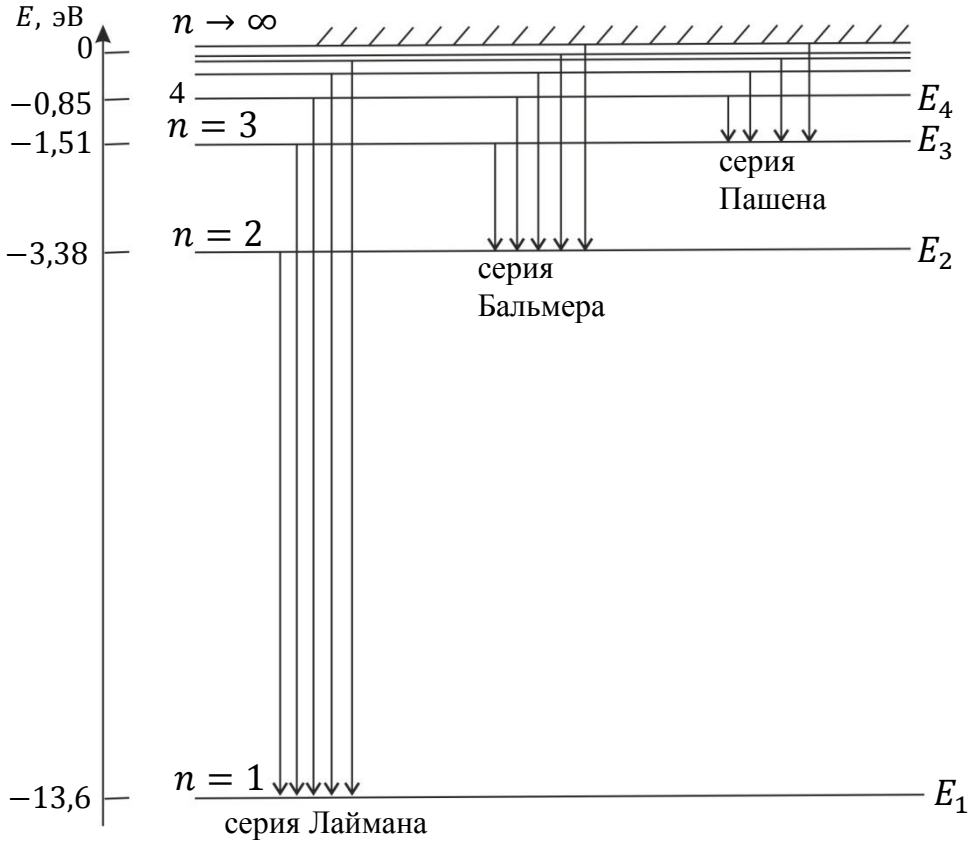


Рис. 49

изображены вертикальными линиями, а направление перехода показано стрелкой. Атом переходит в возбужденное состояние при соударении с другим атомом, с заряженной частицей или при поглощении фотона. Время жизни атома в возбужденном состоянии порядка 10^{-8} с. Затем атом самопроизвольно переходит в основное состояние, излучая квант энергии.

Частота ν и длина волны λ излучаемых фотонов определяются вторым постулатом Бора, который, с учетом формулы (6) для энергии атома, запишем в следующем виде:

$$h\nu = 13{,}6\text{эВ}\left(\frac{1}{{n_1}^2} - \frac{1}{{n_2}^2}\right); \quad \frac{hc}{\lambda} = 13{,}6\text{эВ}\left(\frac{1}{{n_1}^2} - \frac{1}{{n_2}^2}\right). \tag{7}$$

Формула (7) совпадает с сериальной формулой, полученной ранее экспериментально:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{{n_1}^2} - \frac{1}{{n_2}^2}\right), \tag{8}$$

где $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ – постоянная Ридберга; n_1 и n_2 – квантовые числа стационарных состояний, причем $n_2 > n_1$.

По формулам (7) и (8) можно вычислить длины волн спектральных линий всех серий в спектре излучения атома водорода: серия Лаймана ($n_1 = 1$) принадлежит ультрафиолетовой области спектра; серия Бальмера ($n_1 = 2$) – видимой области; серия Пашена ($n_1 = 3$) и последующие серии ($n_1 > 3$) – инфракрасной области спектра.

4.2. Элементы квантовой механики

4.2.1. Корпускулярно-волновая природа материи. Волна де Бройля. Дифракция электронов

Луи де Бройль в 1923 г., основываясь на симметрии природы, предположил, что *все материальные объекты* (как и свет) имеют свойства и частиц, и волн. Это означает, что не только фотон, но и такие частицы, как электрон, протон, нейтрон, атом, молекула, проявляют себя в эксперименте как волна. Формулы, связывающие характеристики корпускулярных свойств частиц (*энергия E и импульс p*) с их волновыми свойствами (*частота ν и длина волны λ*) такие же, как для фотонов (см. таблицу).

Фотон	Общие формулы	Частица (например, электрон)
Фотон – квант энергии ЭМВ Частота волны $\nu = \frac{E}{h}$ Импульс фотона $p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$. Длина волны $\lambda = \frac{h}{p}$.	Энергия $E = h\nu$ $E = mc^2$. Импульс $p = \frac{h}{\lambda}$. $p = \hbar k$, $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$.	Электрон – частица вещества (в атомах, молекулах); Электрон – волна де Бройля с частотой $\nu = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}$. Импульс частицы $p = mv$; Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$, $\rightarrow$ $\lambda = \frac{h}{mv}$.

Экспериментальным подтверждением гипотезы де Бройля явилась дифракция пучка электронов на кристалле никеля. Для электронов, ускоренных в электрическом поле напряжением U, длина волны де Бройля $\lambda_{\text{теор}}$ описывается формулой (см. решение задачи 34):

$$\lambda_{\text{теор}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \approx 10^{-10}\text{м}. \qquad (10)$$

Величину $\lambda_{\text{эксп}}$ определили в дифракционном опыте по формуле Вульфа – Брэггов (см. решение задачи 35):

$$2d\sin\theta = k\lambda; \ \rightarrow \ \lambda_{\text{эксп}} = \frac{2d\sin\theta}{k}. \qquad (11)$$

В этом опыте получено, что $\lambda_{\text{эксп}} = \lambda_{\text{теор}}$, что подтвердило справедливость гипотезы де Бройля.

В дальнейших экспериментах осуществлена 1) дифракция быстрых электронов, проходящих сквозь металлическую фольгу, 2) дифракция атомов гелия и молекул водорода, а затем и нейтронов на кристалле NaCl.

Дифракция частиц используется в следующих методах исследования тонких пленок для определения величины d – межатомного расстояния:
а) электронография – для металлических пленок;
б) нейтронография и в) протонография – для водородсодержащих пленок.

Волновые свойства электронов позволяют создавать приборы и устройства электронной оптики: электронные и магнитные линзы, электронные микроскопы, электронно-оптические преобразователи. Причем, разрешающая сила электронных микроскопов примерно в 100 раз больше, чем оптических микроскопов.

4.2.2. Соотношение неопределенностей

В классической механике частица движется по определенной траектории; при этом в любой момент времени можно точно определить ее координаты (x, y, z) и импульс $\vec{p}$ (проекции p_x, p_y, p_z).

В микромире, который описывает *квантовая механика*, благодаря волновым свойствам частиц, проявляются ограничения для некоторых величин (см. далее п. 1, 1а и 2).

1) ***Соотношение неопределенностей Гейзенберга***: микрочастица (например, электрон) не может одновременно иметь точные значения двух величин: координаты x и p_x – соответствующей проекции импульса, (а также y и p_y; z и p_z). Неопределенности этих величин связаны следующими соотношениями:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h; \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq h; \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq h. \qquad (12)$$

Таким образом, произведение неопределенности координаты Δx и неопределенности проекции импульса Δp_x не может быть меньше, чем $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, т. е. при увеличении Δx уменьшается Δp_x.

То, что это обусловлено волновыми свойствами частиц, видно из опыта по дифракции пучка электронов на щели шириной a (рис. 50).

x

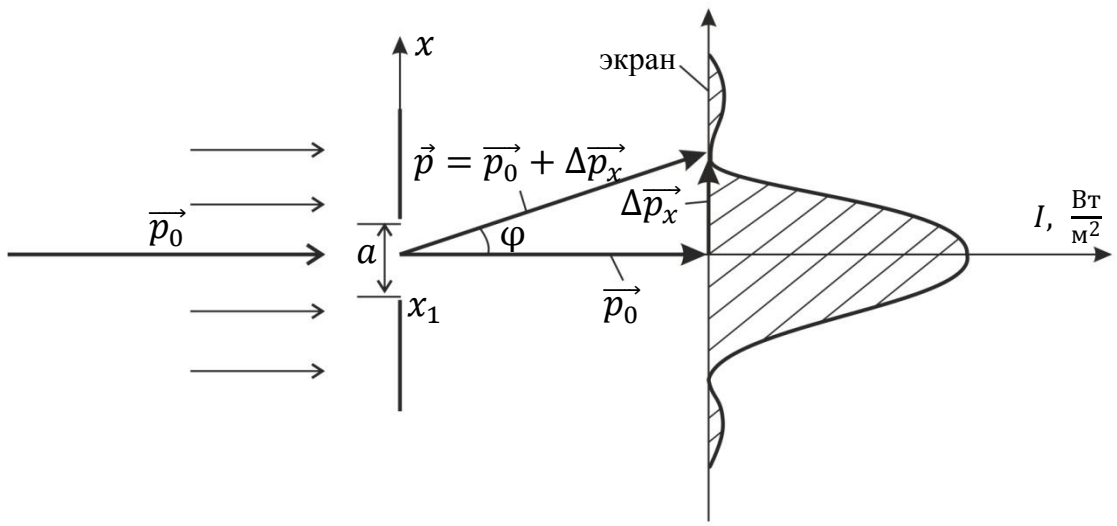


Рис. 50

<u>*До щели*</u> электрон имел импульс $\vec{p_0}$ – точное значение в параллельном пучке электронов, т. е. $\Delta p_x = 0$. Но при этом координата x электрона в пучке была любая: $\Delta x \to \infty$ (точнее $\Delta x \gg a$).

<u>*После щели*</u> стала известна координата электрона, прошедшего щель: $(x_1 + \Delta x)$ (см. рис. 50), где $\Delta x \leq a$, т. е. с точностью до ширины щели a. Но на экране, по графику распределения интенсивности $I(x)$ пучка электронов, видим дифракционное расхождение пучка, так как появилась составляющая импульса $p_x = \Delta p_x$. Приравнивая значение $\sin\varphi = \frac{\Delta p_x}{p_x}$ (по треугольнику на рисунке) и по условию первого дифракционного минимума на щели: $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{\Delta x}$, где $\lambda = \frac{h}{p}$ – длина волны электрона, получаем соотношение неопределенностей – $\Delta p_x \cdot \Delta x \approx h$.

1а) Неопределенность импульса частицы $\Delta p_x = m\Delta v_x$ проявляется <u>*в неопределенности скорости частицы*</u> $\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m}$. Оценим минимальную неопределенность скорости частиц:

$$\Delta v_x = \frac{1}{m} \cdot \frac{h}{\Delta x}. \qquad (13)$$

Для пылинки массой $m = 1$ мкг $= 10^{-9}$ кг, координата которой известна с неопределенностью $\Delta x = 10^{-10}$ м, величина $\Delta v_x \approx 10^{-15}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; такая неопределенность незаметна, так как даже для малой скорости $v = 1\ \frac{\text{мкм}}{\text{с}}$ величина $\Delta v_x \ll v$.

Из формулы (13) следует, что неопределенность Δv_x растет с уменьшением массы частицы и для электрона ($m \approx 10^{-30}$ кг) величина $\Delta x \cdot \Delta v_x = \frac{h}{m} = 7 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$. Так, для электронного луча, толщиной $\Delta x =$ 0,1 мм, распространяющегося вдоль оси y, величина $\Delta v_x \approx 7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; эта

поперечная лучу скорость $\Delta v_x \ll \left(v \approx 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$. Следовательно, траектория электрона в пучке (его трек) – это линия, параллельная оси y, она не размывается из-за волновых свойств электрона.

Иначе ведет себя электрон в атоме, где неопределенность координаты $\Delta x \approx r_{\text{ат}} \approx 10^{-10}$ м. Для такого электрона $\Delta v_x \approx 7 \cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а его скорость, например, в атоме водорода, $v \approx 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ (при $n = 1$), т. е. $\Delta v_x \approx v$. Поскольку вектор $\overrightarrow{\Delta v_x}\vec{v}$, то траектория электрона в атоме не имеет определенной формы, она не является замкнутой линией.

2) <u>*Соотношение неопределенностей для энергии и времени:*</u>

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h, \tag{14}$$

где ΔE – неопределенность энергии какого-либо состояния частицы с энергией E; Δt – время существования этого энергетического состояния, или время жизни системы с энергией E.

Атом в основном состоянии существует сколь угодно долго: $\Delta t \to \infty$, - поэтому $\Delta E \approx 0$ (энергетический уровень основного состояния узкий). Но в возбужденном состоянии время жизни атома $\Delta t \approx 10^{-8}$ с; тогда по формуле (14) получаем $\Delta E_{\text{возб}} \approx 10^{-27}$ Дж $\approx 10^{-8}$ эВ – это ширина размытого возбужденного уровня энергии. В результате энергия фотона, излучаемого при переходе электрона с такого уровня, имеет неопределенность

$$\Delta E = h\Delta\nu; \quad \left(\Delta E \approx \frac{h}{\Delta t}\right) \quad \to \quad \Delta\nu \approx \frac{1}{\Delta t}. \tag{15}$$

Эта, так называемая, <u>*естественная ширина спектральной линии*</u> $\Delta\nu \approx 10^8$ Гц $\ll 10^{15}$ Гц – частоты ν линий оптических спектров. Так как длина волны $\lambda = \frac{c}{\nu}$, то, дифференцируя, имеем $\mathrm{d}\lambda = -\frac{c\mathrm{d}\nu}{\nu^2}$; принимая, что $\Delta\lambda \approx \mathrm{d}\lambda$ и $\Delta\nu \approx \mathrm{d}\nu$, получаем соотношение $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 10^{-7}$. Такова монохроматичность $\left(\text{относительная ширина } \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$ спектральной линии. По величине $\Delta\nu$ линии спектра, используя формулу (15), можно определить Δt – время жизни атома в возбужденном состоянии.

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

5.1. План решения задач по теме «Теория атома водорода по Бору»

1. Следует обратить внимание, что созданная Бором теория атома водорода – первая <u>*квантовая теория атома*</u>, согласно которой электрон в атоме может находиться только в определенных стационарных состояниях. Параметры электрона в атоме: радиус круговой орбиты, скорость и его момент импульса, период обращения, энергия электрона, – имеют в этих состояниях дискретные значения, которые определяются

главным квантовым числом n (номер орбиты). Эта зависимость отражается индексом величин: $r_n,\ v_n,\ L_n,\ T_n,\ E_n$.

2. По мере увеличения номера орбиты n ее радиус увеличивается ($r_n = n^2 r_1$), а скорость электрона уменьшается $\left(v_n = \frac{v_1}{n}\right)$; в результате период обращения растет ($T_n = n^3 T_1$), возрастает момент импульса электрона ($L_n = n\hbar$) и увеличивается его энергия $E_n = -\frac{13{,}6\ \text{эВ}}{n^2}$.

3. Порядок величин параметров электрона в атоме водорода можно оценить по указанным зависимостям и значениям величин для основного состояния ($n = 1$). В этом состоянии радиус орбиты $r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м, скорость электрона $v_1 = 2{,}2 \cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, период обращения $T_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-16}$ с, момент импульса $L_1 = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}$, и полная энергия электрона $E_1 = -13{,}6$ эВ.

Задача 30. Для электрона, находящегося на первой орбите ($n = 1$) атома водорода, определите радиус орбиты r_1, момент импульса электрона L_1 и его скорость v_1.

Дано

Электрон в атоме Н: $n = 1$.

$r_1 - ?\ \ L_1 - ?$

$v_1 - ?$

Решение

По теории Бора электрон в атоме водорода движется по окружности радиусом r. На орбите электрон удерживается кулоновской силой F притяжения к ядру, имеющему положительный заряд. Эта сила создает нормальное (центростремительное) ускорение, которое, в соответствии со вторым законом Ньютона:

$$ma_n = F; \quad \rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{ke\cdot e}{r^2}. \tag{1}$$

Здесь m и v – масса и скорость электрона; e – заряд электрона и ядра ($Q_я^+ = e$); $k = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$ – коэффициент пропорциональности в законе Кулона.

В уравнении (1) две неизвестные величины: r и v. Другое уравнение, которое также содержит эти величины, – первый постулат Бора, определяющий условие квантования момента импульса электрона:

$$mvr_n = n\hbar. \tag{2}$$

Здесь r_n – радиус -ой стационарной орбиты; n – главное квантовое число; $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

Выразим из уравнения (2) скорость электрона:

$$v = \frac{n\hbar}{mr_n}. \tag{3}$$

Подставим это значение скорости v в уравнение (1) и определим из него радиус -ой орбиты электрона:

$$\frac{mn^2\hbar^2}{m^2{r_n}^3} = \frac{ke^2}{r^2}; \qquad \rightarrow \qquad r_n = n^2\frac{\hbar^2}{ke^2m}. \tag{4}$$

Полученную формулу представим в следующем виде:

$$r_n = n^2 r_1, \tag{5}$$

где $r_1 = a = \frac{\hbar^2}{ke^2m}$ – первый боровский радиус.

Вычисляем величину радиуса первой орбиты электрона в атоме водорода:

$$r_1 = \frac{\left(1{,}05\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}\right)^2}{9\cdot10^9\ \frac{\text{м}}{\text{Ф}}\cdot\left(1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{Кл}\right)^2\cdot9{,}11\cdot10^{-31}\ \text{кг}} = 0{,}53\cdot10^{-10}\ \text{м}.$$

Момент импульса электрона $L_n = mvr_n$ вычисляем по уравнению (2) первого постулата Бора:

$$L_n = n\hbar; \quad \rightarrow \quad L_1 = 1\cdot1{,}05\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с} = 1{,}05\cdot10^{-34}\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Скорость электрона на первой орбите в атоме водорода определим по величине момента импульса электрона (согласно уравнению (3)):

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr_n}; \quad (r_n = n^2a) \quad \rightarrow \quad v_n = \frac{\hbar}{nma}. \tag{6}$$

Вычисляем скорость электрона на первой орбите в атоме водорода:

$$v_1 = \frac{1{,}05\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}}{1\cdot9{,}11\cdot10^{-31}\ \text{кг}\cdot0{,}53\cdot10^{-10}\ \text{м}} = 2{,}2\cdot10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 31. Для электрона, находящегося на третьей орбите ($n = 3$) атома водорода, определите радиус орбиты r_3, скорость электрона на этой орбите v_3 и период его обращения T_3.

Дано

Электрон в атоме H: $n = 3$.

$r_3 - ?$ $v_3 - ?$ $T_3 - ?$

Решение

Запишем второй закон Ньютона для движения электрона по окружности радиусом r вокруг ядра атома водорода, заряд которого $Q_я^+ = e$ (рис. 51). Сила Кулона F направлена по радиусу окружности к ее центру и является центростремительной, поэтому уравнение закона Ньютона запишем в проекции на нормаль к траектории:

$$ma_n = F; \qquad \rightarrow \qquad \frac{mv^2}{r} = \frac{ke\cdot e}{r^2}. \tag{1}$$

Здесь m и v – масса и скорость электрона; e – заряд электрона и ядра; $k = 9\cdot10^9\ \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$ – кулоновская постоянная в системе единиц СИ.

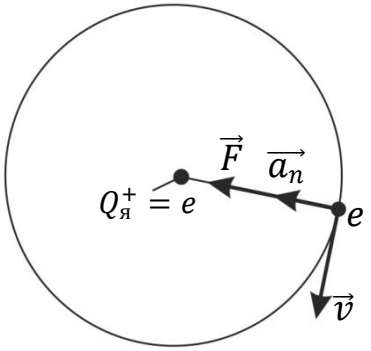


Рис. 51

Так как уравнение (1) содержит две неизвестные величины: скорость v движения электрона и радиус его орбиты r, – то используем еще одно уравнение, которое связывает эти величины, – первый постулат Бора (условие квантования момента импульса электрона):

$$mvr_n = n\hbar; \quad n = 1; 2; 3 \dots . \qquad (2)$$

Выразим скорость электрона из уравнения (2), подставим ее значение в уравнение (1), и определим из него радиус -ной стационарной орбиты r_n:

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr_n}; \qquad \frac{mn^2\hbar^2}{m^2{r_n}^3} = \frac{ke^2}{{r_n}^2}; \qquad \rightarrow \qquad r_n = n^2\frac{\hbar^2}{kme^2}. \qquad (3)$$

Формулу (3) представим в следующем виде:

$$r_n = n^2 r_1; \qquad r_1 = a = \frac{\hbar^2}{ke^2m} = 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \qquad (4)$$

Здесь $r_1 = a$ – первый боровский радиус (согласно формуле (4) $r_1 = 1^2 \cdot a$). Вычисляем радиус r_3 третьей боровской орбиты электрона в атоме водорода:

$$r_3 = 3^2 \cdot a = 9 \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 4{,}77 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0{,}477 \text{ нм}.$$

Вычисляем скорость электрона на третьей орбите, используя первый постулат Бора, по формуле (3):

$$v_3 = \frac{3\hbar}{mr_3} = \frac{3 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж·с}}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 0{,}477 \cdot 10^{-9} \text{ м}} = 0{,}73 \cdot 10^6 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Период обращения T_n электрона на -ной орбите: время одного оборота, – определим по формуле пути $s_n = 2\pi r_n$ для равномерного движения электрона со скорость v_n:

$$s_n = v_n \cdot T_n; \quad \rightarrow \quad T_n = \frac{s_n}{T_n} = \frac{2\pi r_n}{(n\hbar)/mr_n} = \frac{2\pi m{r_n}^2}{n\hbar} = n^3\frac{2\pi ma^2}{\hbar}. \qquad (5)$$

Формулу (5) представим в следующем виде:

$$T_n = n^3 T_1, \qquad (6)$$

где $T_1 = \frac{2\pi a^2 m}{\hbar} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}53)^2 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}}{1{,}05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж·с}} = 1{,}5 \cdot 10^{-16}$ с, – период обращения электрона на первой орбите.

Вычисляем период обращения электрона на третьей боровской орбите атома водорода по формуле (6):

$$T_3 = 3^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-16} \text{ с} = 4{,}0 \cdot 10^{-15} \text{ с} = 4{,}0 \text{ фс}.$$

Полученная величина периода обращения T_3 показывает, что число оборотов в одну секунду, которое совершает электрон при движении в поле ядра атома водорода: $n = \frac{1}{T_3} = 2{,}5 \cdot 10^{14}\ \frac{1}{\text{с}}$.

Задача 32. Для атома водорода определите 1) полную энергию электрона E_n на орбитах с главным квантовым числом $n_1 = 1$ и $n_2 = 6$ и 2) длину волны λ фотона, излучаемого при переходе электрона с шестого энергетического уровня на первый – в серии Лаймана (ультрафиолетовой).

Дано

Электрон в атоме H:
$n_1 = 1$;
$n_2 = 6$.

$E_1 - ?$ $E_6 - ?$
$\lambda - ?$

Решение

Полная энергия E электрона в атоме водорода (и в любом другом атоме) равна сумме кинетической энергии $E_{\text{К}}$ электрона и потенциальной энергии его взаимодействия с зарядом ядра ($Q_{\text{я}}^{+} = e$):

$$E_{\text{П}n} = \frac{ke\cdot(-e)}{r_n} = -\frac{ke^2}{r_n}.$$

Таким образом, величина полной энергии E_n атома водорода в состоянии с главным квантовым числом n

$$E_n = E_{\text{К}n} + E_{\text{П}n} = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{ke^2}{r_n}. \qquad (1)$$

Здесь m и v – масса электрона и его скорость на -ной орбите; $k = 9 \times 10^9\ \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$ – кулоновская постоянная в системе единиц СИ; e – заряд электрона и ядра $\left(e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}\right)$; r_n – радиус орбиты с номером n.

Скорость электрона определим из закона динамики движения по круговой орбите (из второго закона Ньютона, записанного в проекции на нормаль):

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{ke^2}{{r_n}^2}; \qquad \rightarrow \qquad mv_n^2 = \frac{ke^2}{r_n}. \qquad (2)$$

Подставим найденное значение (mv_n^2) в формулу энергии электрона (1):

$$E_n = \frac{ke^2}{2r_n} - \frac{ke^2}{r_n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{ke^2}{r_n}\right). \qquad (3)$$

Сравнивая уравнения (1) и (3), отметим соотношение энергий электрона, движущегося в атоме водорода:

1) потенциальная энергия $E_{\text{П}n} = 2E_n; \quad \rightarrow \quad E_n = \frac{1}{2}E_{\text{П}n}$;

2) кинетическая энергия $E_{\text{К}n} = |E_n|$.

Полная энергия E_n электрона в атоме отрицательна; это означает, что электрон находится в связанном состоянии благодаря электростатическому взаимодействию с заряженным ядром атома.

Для получения расчетной формулы полной энергии электрона E_n в формулу (3) подставим значение радиуса орбиты $r_n = n^2 a$; при этом энергия электрона в состоянии с главным квантовым числом n

$$E_n = \frac{1}{n^2}\left(-\frac{ke^2}{2a}\right); \quad \rightarrow \quad E_n = \frac{1}{n^2}E_1, \tag{4}$$

где $E_1 = -\frac{ke^2}{2a} = -\frac{9\cdot10^9\,\frac{\text{м}}{\text{Ф}}\cdot\left(1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{Кл}\right)^2}{2\cdot0{,}53\cdot10^{-10}\,\text{м}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\,\frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}} = -13{,}6\,\text{эВ}$ – энергия электрона в состоянии с квантовым числом $n = 1$ (одна из искомых величин). Величина $E_1 = -13{,}6\,\text{эВ}$ является минимальной энергией, которой обладает атом водорода в основном состоянии ($n = 1$). Максимальная энергия (согласно формуле (4) $E_\infty = 0$ при $n \rightarrow \infty$) соответствует ионизации атома путем отрыва электрона от ядра.

Вычислим по формуле (4) энергию атома в возбужденном состоянии, соответствующем движению электрона по шестой стационарной орбите:

$$E_1 = \frac{1}{6^2}\cdot(-13{,}6\,\text{эВ}) = -0{,}38\,\text{эВ}.$$

Чтобы определить длину волны фотона, испускаемого при переходе электрона с 6-го энергетического уровня на 1-й, используем второй постулат Бора: *при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается фотон с энергией, равной разности энергий электрона на этих орбитах*:

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1}; \quad \rightarrow \quad \frac{hc}{\lambda} = E_6 - E_1. \tag{5}$$

Уравнение (5) дает следующую расчетную формулу длины волны излучаемого фотона:

$$\lambda = \frac{hc}{E_6 - E_1}. \tag{6}$$

Вычисляем по этой формуле длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с 6-й стационарной орбиты на 1-ю (в основное состояние):

$$\lambda = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\,\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot3\cdot10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{(13{,}6-0{,}38)\,\text{эВ}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\,\frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}} = 0{,}94\cdot10^{-7}\,\text{м} = 94\cdot10^{-9}\,\text{м} = 94\,\text{нм}.$$

Это длина волны ультрафиолетового (УФ) излучения, так как величина $\lambda_{\text{УФ}} < \left(\lambda_{\text{фиол}} = (400 \pm 20)\,\text{нм}\right)$.

5.2. План решения задач по теме «Элементы квантовой механики»

1. Длина волны де Бройля для частиц вычисляется по формуле $\lambda = \frac{h}{p}$, где импульс частицы $p = mv$. Если известна кинетическая энергия частицы $E_\text{К} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$, то импульс выражают через энергию: $p = \sqrt{2mE_\text{К}}$. Если заряженная частица (электрон, протон, α-частица) ускорена электрическим полем, совершившим работу $A_\text{ЭП} = QU = E_\text{К}$, то кинетическая энергия определяется величиной ускоряющей разности потенциалов U. Привычную формулу классической механики $E_\text{К} = \frac{p^2}{2m}$ можно использовать для частиц, кинетическая энергия которых мала

по сравнению с их энергией покоя E_0: $E_К \ll (E_0 = mc^2)$. Приведем значения энергии покоя некоторых частиц: для электрона $E_0 = 0{,}51$ МэВ; для протона $E_0 = 931$ МэВ; для α-частицы $E_0 = 4 \cdot 931$ МэВ ≈ 3720 МэВ.

2. Длину волны де Бройля можно определить из дифракционного эксперимента, используя для параллельного пучка частиц такие же условия максимумов и минимумов дифракции, как и для потока фотонов видимого или рентгеновского излучения. Приведем эти формулы:

1) для дифракции на щели: а) условие $I_{\min}$ – $a \sin\varphi = k\lambda$;

б) условие $I_{\max}$ – $a \sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$;

2) для дифракции на кристалле – формула Вульфа – Брэггов:

$$2d \sin\theta = k\lambda.$$

3. Для микрочастиц, находящихся в ограниченной области пространства (в атоме, в ядре, в узкой потенциальной яме), характерна ненулевая минимальная кинетическая энергия: $E_{К\min} = 0 + \Delta E_К$ и ненулевое значение минимального импульса: $p_{\min} = 0 + \Delta p_x$, так как такая частица, согласно соотношению неопределенностей, не может иметь точные нулевые значения. Поскольку неопределенность координаты частицы $\Delta x = l_{обл}$, – определяется характерным размером области, то, используя соотношение $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$, можно получить формулу, связывающую минимальную кинетическую энергию частицы с размером области: $E_{К\min} = \frac{{p_{\min}}^2}{2m}$; $\rightarrow$ $E_{К\min} = \frac{h^2}{2ml_{обл}^2}$.

Задача 33. Электрон движется со скоростью $v = 2{,}4 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$. Определите длину волны де Бройля λ электрона, учитывая зависимость его массы от скорости.

Дано

Электрон:

$m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг;

$v = 2{,}4 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$;

$m = f(v)$.

$\lambda - ?$

Решение

Длина волны де Бройля λ свободно движущейся частицы определяется формулой:

$$\lambda = \frac{h}{p}; \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{mv}, \qquad (1)$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка; p – импульс частицы; m и v – ее масса и скорость.

При скоростях, сравнимых со скоростью света c, масса частиц зависит от их скорости. Увеличение массы частицы в зависимости от ее скорости v описывается формулой специальной теории относительности:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad (2)$$

где m_0 – масса покоя электрона; $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$ – скорость света в вакууме.

Подстановкой выражения (2) для массы электрона в формулу (1) получаем следующую расчетную формулу длины волны де Бройля релятивистского электрона:

$$\lambda = \frac{h\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{m_0 v}. \qquad (3)$$

Вычисляем величину λ:

$$\lambda = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}\ \sqrt{1-\left(\frac{2{,}4\cdot10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{3\cdot10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}\right)^2}}{9{,}11\cdot10^{-31}\ \text{кг}\cdot2{,}4\cdot10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 1{,}8\cdot10^{-12}\ \text{м} = 1{,}8\ \text{пм}.$$

Задача 34. Электрон прошел в электростатическом поле (ЭСП) ускоряющую разность потенциалов: 1) $U_1 = 1$ кВ; 2) $U_2 = 20$ кВ. Определите длины волн де Бройля λ_1 и λ_2 электрона при U_1 и U_2.

Дано

Электрон:
$m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг;
1) $U_1 = 1$ кВ;
2) $U_2 = 20$ кВ.

1) $\lambda_1 - ?$ 2) $\lambda_2 - ?$

Решение

Длина волны де Бройля λ свободно движущейся частицы определяется формулой:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad (1)$$

где $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка; $p = mv$ – импульс частицы; m и v – ее масса и скорость.

Пройдя в ЭСП ускоряющую разность потенциалов U, электрон приобрел кинетическую энергию $E_К$, равную работе электрического поля:

$$A = \Delta E_К = E_К - 0.$$

Величина работы, совершенной полем, $A = QU = eU$.
Приравнивая две последние формулы, определяем кинетическую энергию:

$$E_К = eU; \quad \rightarrow \quad E_{К_1} = eU_1; \quad E_{К_2} = eU_2. \qquad (2)$$

Вычисляем кинетическую энергию электрона для обоих случаев:

$$E_{К_1} = e\cdot1\ \text{кВ} = 1\ \text{кэВ}; \qquad E_{К_1} = e\cdot20\ \text{кВ} = 20\ \text{кэВ}.$$

Сравним найденные величины энергии с энергией покоя электрона

$$E_0 = mc^2 = \frac{9{,}11\cdot10^{-31}\ \text{кг}\cdot\left(3\cdot10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{1{,}6\cdot10^{-19}\ \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}} = 0{,}51\ \text{МэВ} = 510\ \text{кэВ}.$$

Отмечаем, что $E_{К_1} \ll E_0$ и $E_{К_2} \ll E_0$. Следовательно, электрон не является релятивистским и для его импульса и кинетической энергии справедливы формулы классической механики:

$$p = mv; \qquad E_К = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \qquad (3)$$

Проверим, что это так, вычислив скорость электрона при U_2 из равенства $\frac{mv_2^2}{2} = eU_2$; $\rightarrow$ $v_2 = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}\cdot 2\cdot 10^4\ \text{В}}{9{,}11\cdot 10^{-31}\ \text{кг}}} = 2{,}7\cdot 10^7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Релятивистская поправка (множитель) в этом случае равна $\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2} = \sqrt{1-0{,}008} \approx 1$.

Используя для кинетической энергии формулу (2), определяем по формуле (3) импульс электрона:

$$p = \sqrt{2mE_{\text{К}}}; \quad \rightarrow \quad p = \sqrt{2meU}. \tag{4}$$

Подстановкой полученной величины импульса электрона в формулу (1) получаем следующую расчетную формулу длины волны электрона:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}. \tag{5}$$

Вычисляем λ_1 и λ_2 по формуле (5):

$$\lambda_1 = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}}{\sqrt{2\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\ \text{кг}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}\cdot 1\cdot 10^3\ \text{В}}} = 3{,}9\cdot 10^{-11}\ \text{м} = 39\ \text{пм}.$$

Вычислим величину λ_2 следующим путем: согласно формуле (5)

$$\lambda_1\sqrt{U_1} = \lambda_2\sqrt{U_2}; \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = \lambda_1\sqrt{\frac{U_1}{U_2}} = 39\ \text{пм}\cdot\sqrt{\frac{1\ \text{кВ}}{20\ \text{кВ}}} = 8{,}7\ \text{пм}.$$

Задача 35. Параллельный пучок атомов водорода, падающий под углом скольжения $\theta = 45^{\text{o}}$ к поверхности монокристалла, дает дифракционный максимум 1-го порядка при отражении от плоскостей с межатомным расстоянием $d = 0{,}30$ нм. Определите длину волны де Бройля λ атомов водорода и их скорость v.

Дано

Атом H:
$m = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг;
$\theta = 45^{\text{o}}$;
$k = 1$;
$d = 0{,}30$ нм.

$\lambda - ?$ $v - ?$

Решение

Для дифракции на кристалле легких частиц: электронов, α- частиц, протонов, нейтронов, атомов водорода и гелия и др., – справедлива формула Вульфа – Брэггов, полученная для дифракции рентгеновских лучей (потока фотонов):

$$2d\sin\theta = k\lambda. \tag{1}$$

Осуществляя дифракцию атомов водорода на монокристалле с известным расстоянием d между атомными плоскостями, и измеряя угол скольжения θ для максимума 1-го порядка, по формуле (1) определяем длину волны атомов водорода:

$$\lambda = \frac{2d\sin\theta}{k} = \frac{2\cdot 0{,}3\cdot 10^{-9}\ \text{м}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = 4{,}2\cdot 10^{-10}\ \text{м} = 0{,}42\ \text{нм}.$$

Эта величина λ атомов водорода попадает в диапазон длин волн мягких рентгеновских лучей.

Для определения скорости атомов водорода воспользуемся формулой длины волны де Бройля свободно движущейся частицы:

$$\lambda = \frac{h}{p}; \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{mv}, \tag{2}$$

где $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с – постоянная Планка; $p = mv$ – импульс частицы; m и v – ее масса и скорость.

Из этой формулы получаем расчетную формулу скорости атомов водорода и вычисляем величину v:

$$v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}}{1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{кг}\cdot 4{,}2\cdot 10^{-10}\ \text{м}} = 0{,}94\cdot 10^{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 36. Электрон, имеющий кинетическую энергию $E_{\text{К}} = 15$ эВ, находится в металлической пылинке диаметром $d = 0{,}5$ мкм. Оцените относительную неопределенность (точность) $\frac{\Delta v}{v}$, с которой можно найти скорость электрона v.

Дано

Электрон:

$m = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг;

$E_{\text{К}} = 15$ эВ;

$d = 0{,}5$ мкм.

$\frac{\Delta v}{v}$ – ?

Решение

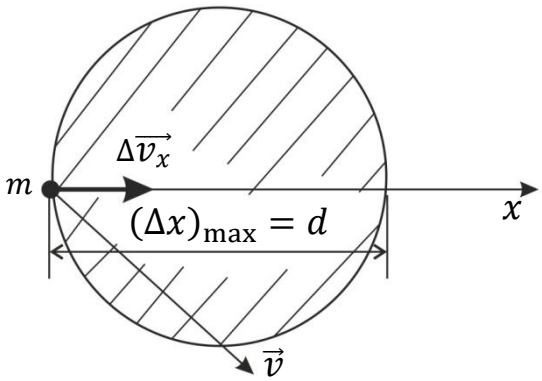


Рис. 52

Электрон, находящийся внутри пылинки, движется (так как имеет энергию $E_{\text{К}} \neq 0$) в области, ограниченной диаметром d (рис. 52). При этом его координата x известна с точностью до размеров пылинки, причем, $(\Delta x)_{\max} = d$ (см. рис. 52). В таком случае проекция импульса электрона имеет неопределенность Δp_x, величина которой следует из соотношения неопределенностей:

$$\Delta x\cdot\Delta p_x \geq h; \quad \rightarrow \quad (\Delta p_x)_{\min} = \frac{h}{(\Delta x)_{\max}}, \tag{1}$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

Неопределенность проекции импульса приводит к неопределенности проекции скорости частицы v_x:

$$p_x = mv_x; \quad \rightarrow \quad \Delta p_x = m\Delta v_x; \quad \rightarrow \quad \Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m}. \qquad (2)$$

Используя формулу (1), определим неопределенность проекции скорости:

$$(\Delta v_x)_{\min} = \frac{h}{m(\Delta x)_{\max}}. \qquad (3)$$

Чтобы найти относительную неопределенность скорости, найдем скорость электрона v из его кинетической энергии:

$$E_{\text{К}} = \frac{mv^2}{2}; \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_{\text{К}}}{m}}. \qquad (4)$$

С помощью формул (3) и (4) получаем расчетную формулу точности определения скорости электрона, находящегося в пылинке:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{h}{m(\Delta x)_{\max} \cdot \sqrt{\frac{2E_{\text{К}}}{m}}}; \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{h}{d\sqrt{2mE_{\text{К}}}}. \qquad (5)$$

Здесь учтено, что величина $(\Delta x)_{\max} = d$ – диаметру пылинки.

Вычисляем по формулу (5) отношение $\frac{\Delta v}{v}$, показывающее точность определения скорости электрона:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж·с}}{0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{м}\sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{кг} \cdot 15\ \text{эВ} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}}} = 6 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\Delta v}{v} = 0{,}06\ \%.$$

Полученная неопределенность скорости электрона в пылинке мала по сравнению с таковой для атома водорода Н, где $\left(\frac{\Delta v}{v}\right)_{\text{Н}} \approx 100\ \%$. Это объясняется соотношением размеров областей, где находится электрон, и определяющих неопределенность координаты Δx; оно таково: $(d = 0{,}5 \cdot$ *10−6 м≫d*Н*=0,5·10−10 м*; а произведение этих неопределенностей одинаково для данной частицы (электрона): $\Delta x \cdot \Delta v_x \approx \left(\frac{h}{m}\right)$.

Задача 37. Принимая, что минимальная энергия нуклона в ядре $E_{\min} = 8$ МэВ и используя соотношение неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$, оцените линейный размер l ядра.

Дано

Нуклон:

$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг;

$E_{\min} = 8$ МэВ $= 8 \cdot 10^6$ эВ;

$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h.$

$l - ?$

Решение

Нуклоном называют частицу, входящую в состав ядра – это и протон, и нейтрон. Размер ядра l определяет неопределенность координаты частицы $(\Delta x)_{\max} = l$. Эту неопределенность найдем по соотношению неопределенностей:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h; \quad \rightarrow \quad l\Delta p_x \geq h; \quad \rightarrow \quad l \approx \frac{h}{\Delta p_x}, \qquad (1)$$

где Δp_x – неопределенность проекции импульса нуклона.

Что известно об импульсе нуклона в ядре? В рамках капельной модели ядра нуклоны в нем колеблются (подобно колебаниям молекул в жидкости); при этом энергия нуклона, совершающего гармонические колебания, складывается из кинетической и потенциальной энергии частицы: $E = E_К + E_П$. При прохождении нуклоном положения равновесия его потенциальная энергия $E_П = 0$, а кинетическая энергия $E_К = E$; соответственно

$$E_{К_{\min}} = E_{\min}. \qquad (2)$$

Но кинетическая энергия частицы связана с ее импульсом формулой:

$$E_К = \frac{p^2}{2m}; \quad \rightarrow \quad p = \sqrt{2mE_К}; \quad \rightarrow \quad p_{\min} = \sqrt{2mE_{К_{\min}}}. \qquad (3)$$

С учетом равенства (2) получаем значение импульса нуклона:

$$p_{\min} = \sqrt{2mE_{\min}}. \qquad (3а)$$

Таким образом, импульс нуклона известен с неопределенностью

$$\Delta p_x = p_{\min} = \sqrt{2mE_{\min}}. \qquad (4)$$

Подстановка этой величины Δp_x в формулу (1) дает расчетную формулу для оценки линейного размера l атомного ядра:

$$l = \frac{h}{\sqrt{2mE_{\min}}}. \qquad (5)$$

Вычисляем величину l:

$$l = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж·с}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{кг} \cdot 8 \cdot 10^6\ \text{эВ} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}}} \approx 10 \cdot 10^{-15}\ \text{м} = 10\ \text{фм}.$$

Этот результат, полученный по соотношению неопределенностей, прекрасно согласуется с экспериментальной оценкой Резерфордом размера атомных ядер: $l_я = (10^{-14} \ldots 10^{-15})$ м, – по рассеянию альфа-частиц металлической фольгой.

Задача 38. Время жизни возбужденного атома $\tau \approx 1$ мкс. С какой наименьшей погрешностью $\Delta\varepsilon$ может быть определена энергия фотона, излучаемого атомом?

Дано

$\tau \approx 1$ мкс;

$\Delta\varepsilon - ?$

Решение

Возбужденные состояния атома короткоживущие и малое время жизни $\tau = 10^{-6}$ с приводит к заметной неопределенности ΔE энергии такого состояния: согласно соотношению неопределенностей

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h; \quad \rightarrow \quad \Delta E \approx \frac{h}{\tau}, \qquad (1)$$

где $\Delta t \equiv \tau$ – время существования данного энергетического состояния.

Существование неопределенности ΔE означает, что энергетический уровень такого состояния имеет ширину ΔE, т. е. является размытым (рис. 53).

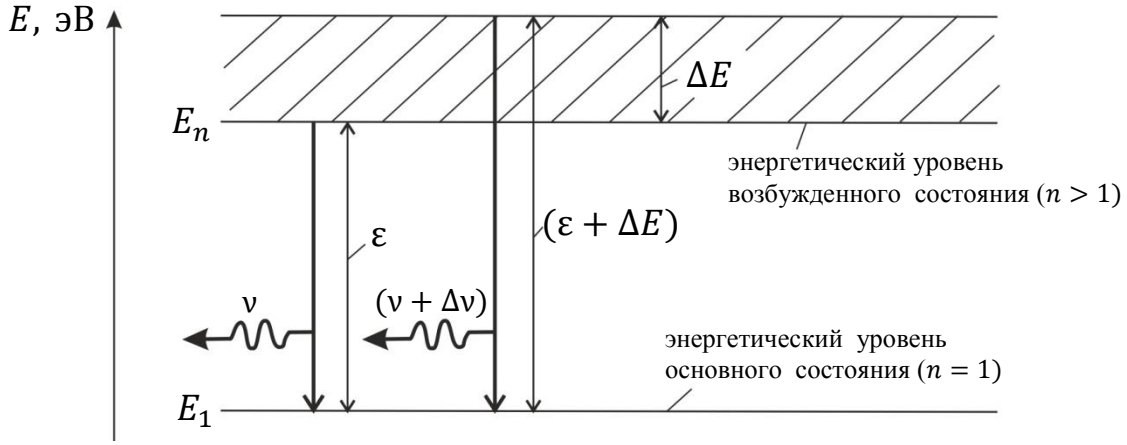


Рис. 53

Переходы электронов в различных атомах с размытого уровня, который занимает интервал энергий от E_n до $E_n + \Delta E$ (см. рис. 53), сопровождается излучением фотонов с различной энергией – в соответствии со вторым постулатом Бора. При переходе электрона атома из одного стационарного состояния в другое (с меньшей энергией) излучается фотон, энергия которого ε равна разности энергий соответствующих стационарных состояний:

а) при переходе электрона с нижней границы размытого уровня E_n на первый с энергией E_1:

$$\varepsilon = E_n - E_1; \tag{2}$$

б) при переходе электрона с верхней границы размытого уровня, где энергия атома равна $(E_n + \Delta E)$:

$$\varepsilon' = (E_n + \Delta E) - E_1. \tag{3}$$

Вычитая уравнение (2) из 3-го, получаем наибольшую разность энергий фотонов $\Delta\varepsilon$, которая вносится размытием энергетического уровня возбужденного состояния атома:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon = \Delta E. \tag{4}$$

Наибольшая разность энергий фотонов $\Delta\varepsilon$, излучаемых любыми двумя одинаковыми атомами при переходе электрона $E_n \to E_1$, – это и есть неопределенность энергии излучаемого фотона. Эта неопределенность, с учетом формулы (1):

$$\Delta\varepsilon \approx \frac{h}{\tau}. \tag{5}$$

Оценим ее величину:

$$\Delta\varepsilon = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{Дж·с}}{1\cdot10^{-6}\ \text{с}} = \frac{6{,}62\cdot10^{-28}\ \text{Дж}}{1{,}6\cdot10^{-19}\ \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}} \approx 4\cdot10^{-9}\ \text{эВ}.$$

Задача 39. Атом испустил фотон с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Длительность излучения $\tau \approx 2\cdot10^{-8}$ с. Определите наибольшую точность

$\left(\text{наименьшую } \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$, с которой может быть измерена длина волны излучения.

Дано

$\lambda = 500$ нм;

$\tau \approx 2 \cdot 10^{-8}$ с.

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} - ?$

Решение

В соответствии с соотношением неопределенностей уровень энергии возбужденного состояния атома имеет ненулевую ширину ΔE:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h; \quad \rightarrow \quad \Delta E \approx \frac{h}{\tau}, \tag{1}$$

где ΔE – неопределенность энергии атома в возбужденном состоянии, равная ширине этого размытого уровня энергии (см. рис. 53); $\Delta t \equiv \tau$ – время существования данного возбужденного состояния.

При переходах электронов в различных атомах с разных по высоте точек, находящихся в зоне возбужденного уровня, излучаются фотоны с энергией, лежащей в интервале от ε до $\varepsilon + \Delta E$, частота которых находится в области от ν до $(\nu + \Delta\nu)$, (см. рис. 53). Запишем формулу Планка для энергии этих фотонов:

$$\varepsilon = h\nu; \tag{2}$$

$$\varepsilon + \Delta E = h(\nu + \Delta\nu). \tag{3}$$

Оценим неопределенность $\Delta\nu$ частоты излучаемых фотонов, вычитая уравнение (2) из уравнения (3):

$$\Delta E = h\Delta\nu; \quad \rightarrow \quad \Delta\nu = \frac{\Delta E}{h}. \tag{4}$$

Используя соотношение неопределенностей (1), определим ширину данной спектральной линии по шкале частот:

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}. \tag{5}$$

Относительная ширина спектральной линии

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu\tau}; \quad (\lambda\nu = c) \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\lambda}{c\tau}. \tag{6}$$

Вычисляем: $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{500 \cdot 10^{-9}\ \text{м}}{3 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 2 \cdot 10^{-8}\ \text{с}} \approx 1 \cdot 10^{-7}$.

Покажем, что относительная ширина спектральной линии одинакова как по шкале частот, так и по длинам волн, т. е. $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$. Так как, согласно сделанному выше расчету, $\Delta\nu \approx \nu \cdot 10^{-7}$, т. е. величина $\Delta\nu \ll \nu$, то можно отождествить измеряемый разброс по частотам $\Delta\nu$ с бесконечно малым приращением $d\nu$: $\Delta\nu \approx d\nu$. Дифференцируем формулу связи длины волны и частоты $\left(\nu = \frac{c}{\lambda}\right)$:

$$d\nu = -\frac{c d\lambda}{\lambda^2} = -\frac{\nu d\lambda}{\lambda}; \quad \rightarrow \quad \frac{d\nu}{\nu} = \frac{d\lambda}{\lambda}; \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu}. \qquad (7)$$

Следовательно, монохроматичность спектральной линии, или ее относительная ширина $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 1 \cdot 10^{-7}$. Знак $"-"$ в формуле (7) опущен, так как он указывает только на то, что с увеличением частоты света ν убывает его длина волны λ.

Часть 4

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

6. Теоретическая часть

6.1. Размер, состав и заряд атомного ядра

Атомное ядро состоит из протонов (p) и нейтронов (n). Эти элементарные частицы, входящие в состав ядра, называют нуклонами. Протон – положительно заряженная частица с зарядом $Q_p = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл и массой $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг. Нейтрон – нейтральная частица массой $m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ кг. Таким образом, $m_p \approx m_n \approx 1840 m_e$, где m_e – масса электрона.

Атомное ядро обозначают следующим символом:

$$^{A}_{Z}\mathrm{X},$$

где X – символ химического элемента; Z – зарядовое число (число протонов и порядковый номер элемента в Периодической системе): заряд

ядра $Q_я^+ = Ze$; A – массовое число (число нуклонов в ядре): $A = Z + N$, где N – число нейтронов: $N = (A - Z)$.

Известно более 2500 атомных ядер различных элементов, число которых $Z_{\max} \approx 110$. Устойчивыми являются ~ 350 ядер. В их числе различают следующие группы: 1) *изотопы* – ядра одного химического элемента (с одинаковым числом Z), которые различаются числами A и N, например, $^{63}_{29}\mathrm{Cu}$ и $^{65}_{29}\mathrm{Cu}$; $^{1}_{1}\mathrm{H}$ (водород), $^{2}_{1}\mathrm{H}$ (дейтерий), $^{3}_{1}\mathrm{H}$ (тритий); 2) *изотоны* – ядра с одинаковым числом N; 3) *изобары* – ядра с одинаковым массовым числом A и 4) *изомеры* – ядра, у которых размер R приблизительно одинаков. В названных выше 2-й, 3-й и 4-й группах содержатся ядра *различных* химических элементов.

Размер ядра можно оценить по экспериментальной формуле

$$R = R_0 A^{1/3},$$

где A – массовое число; $R_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-15}$ м.

6.2. Дефект массы и энергия связи ядра

Массу атомного ядра $m_я$ можно определить по следующей формуле:

$$m_{ат} = m_я + Zm_e; \quad \rightarrow \quad m_я = m_{ат} - Zm_e, \tag{1}$$

где $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона; $m_{ат}$ – масса атома химического элемента, которую можно измерить точно с помощью масс-спектрометра.

Опыт показал, что масса атомного ядра $m_я$ меньше, чем $\sum_1^A m_i$, – сумма масс нуклонов, его составляющих. Следовательно, при образовании ядра есть ***дефект массы*** Δm:

$$\Delta m = \sum_1^A m_i - m_я; \quad \rightarrow \quad \Delta m = \left[Zm_p + (A - Z)m_n\right] - m_я. \tag{2}$$

Прибавляя в правую часть уравнения (2) равное нулю слагаемое ($Zm_e - Zme=0$, получаем формулу дефекта массы в следующем виде:

$$\Delta m = [Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_n] - m_{ат}. \tag{3}$$

Здесь m_{H} – масса атома водорода; $m_{ат}$ – масса атома. Формула (3) удобна в расчетах, так как в справочных таблицах приводятся массы атомов (а не ядер), которые измеряют в масс-спектрометрах.

Масса ядра и его полная энергия связаны формулой

$$E = mc^2. \tag{4}$$

Формула (4) показывает, что уменьшение массы системы нуклонов при образовании ядра будет сопровождаться соответствующим уменьшением энергии системы. Следовательно, при образовании ядра, согласно закону сохранения энергии (ЗСЭ), выделяется энергия

$$\Delta E = \Delta mc^2. \tag{5}$$

Согласно ЗСЭ, такую же энергию нужно затратить и для обратного процесса – для разделения ядра на отдельные нуклоны; эта энергия называется ***энергией связи ядра*** $E_{\text{св}}$: $E_{\text{св}} = \Delta E$, – и определяется формулой (5). Таким образом, с учетом формулы (3), для энергии связи атомного ядра получаем следующую расчетную формулу:

$$E_{\text{св}} = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{\text{ат}}]c^2. \qquad (6)$$

Наряду с энергией связи ядра рассчитывают ***удельную энергию связи***

$$E_{\text{уд}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}, \qquad (7)$$

т. е. энергию связи, приходящуюся на один нуклон; эта энергия характеризует <u>*прочность*</u> атомных ядер (их устойчивость): чем больше величина $E_{\text{уд}}$, тем устойчивее ядро.

Расчет показывает, что наибольшая энергия связи $\left(E_{\text{уд}}\right)_{\max} \approx 8{,}7$ МэВ соответствует ядрам с массовым числом $A \approx 50$, т. е. элементам, которые расположены в середине Периодической системы элементов. Легкие же и тяжелые ядра менее устойчивы. Процессы перехода ядер в более устойчивое состояние (с большей $E_{\text{уд}}$, что означает меньшую энергию ядра) сопровождается ***выделением энергии***. Эти процессы: 1) слияние легких ядер (термоядерный синтез) и 2) деление тяжелых ядер на более легкие в атомных реакторах, – используются для получения ядерной энергии.

6.3. Ядерные реакции. Энергия реакции

Ядерные реакции – это превращения ядер, которые вызваны взаимодействием -ядра с другим ядром или с элементарной частицей. Используют 2 схемы записи ядерной реакции – развернутую и краткую:

$$X + a \rightarrow Y + b, \qquad \text{и} \qquad X(a, b)Y,$$

где X и Y – исходное ядро и конечное; a и b – бомбардирующая (вызывающая реакцию) и испускаемая в реакции частицы. Например:

$$^{7}_{3}\text{Li} + ^{2}_{1}\text{H} \rightarrow ^{8}_{4}\text{Be} + ^{1}_{0}\text{n}; \qquad \text{и} \qquad ^{7}_{3}\text{Li}(d, n)^{8}_{4}\text{Be},$$

где d – дейтон (ядро атома дейтерия).

Во всех ядерных реакциях выполняются следующие законы сохранения (ЗС):

1) ЗС электрического заряда: $\sum Z_i\, e = \sum Z_j\, e$;
2) ЗС массового числа A (числа нуклонов): $\sum A_i = \sum A_j$;
3) ЗСИ (импульса $\vec{p}$): $\sum \vec{p} = \sum \vec{p}$;
4) ЗСЭ – полной энергии $E = mc^2$: $\sum E_i = \sum E_j$.

В левой части записанных законов сохранения суммирование ведется по исходным ядрам и частицам, а в правой части – для продуктов реакции.

Энергию ядерной реакции Q определяют *с помощью закона сохранения энергии* следующим образом. Для реакции с развернутой схемой

$$X_1 + X_2 = Y_3 + Y_4$$

запишем закон сохранения полной энергии

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4. \qquad (8)$$

Здесь полная энергия каждого ядра равна сумме его энергии покоя $E = mc^2$ (где m – масса покоя ядра) и кинетической энергии T:

$$E = mc^2 + T. \qquad (9)$$

Подставим формулу (9) в уравнение (8) ЗСЭ:

$$m_1c^2 + T_1 + m_2c^2 + T_2 = m_3c^2 + T_3 + m_4c^2 + T_4. \qquad (10)$$

Энергия реакции Q равна разности энергий покоя исходных ядер (и частиц) и ядер и частиц продуктов реакции:

$$Q = m_1c^2 + m_2c^2 - (m_3c^2 + m_4c^2),$$

или

$$Q = \Delta mc^2; \qquad \Delta m = (m_1 + m_2 - (m_3 + m_4)), \qquad (11)$$

Заметим, что при протекании ядерной реакции кинетическая энергия продуктов реакции может расходоваться на γ-излучение, на ионизацию, нагрев и свечение среды, на протекание химических реакций и др. эффекты.

6.4. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада

Радиоактивность – это самопроизвольное превращение некоторых ядер (радиоактивных) в другие ядра с испусканием излучения и элементарных частиц: $\alpha^{(+)}$-излучение, $\beta^{(-)}$-излучение, γ-излучение. Различают *естественную* радиоактивность (ядер радиоактивных изотопов, существующих в природе) и *искусственную* (ядер, полученных в ядерных реакциях). Оба типа радиоактивных превращений описываются одинаковым законом, согласно которому число ядер $\mathrm{d}N$, распавшихся за интервал времени $\mathrm{d}t$, пропорционально времени $\mathrm{d}t$ и *числу N нераспавшихся ядер*:

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t, \qquad (12)$$

где λ – ***постоянная радиоактивного распада*** (константа для данного радиоактивного вещества). Знак «−» указывает, что величина $\mathrm{d}N < 0$, т. е., что число радиоактивных ядер уменьшатся при распаде.

После разделения переменных в уравнении (12) и интегрирования получаем

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \mathrm{d}t; \quad \rightarrow \quad \int_{N_0}^{N} \frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \int_0^t \mathrm{d}t\,; \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t. \qquad (13)$$

Потенцируя равенство (13), получаем ***закон радиоактивного распада*** в следующем виде:

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{14}$$

Здесь N_0 – начальное число ядер (в момент времени $t = 0$); N – число нераспавшихся ядер в момент времени t. Как следует из формулы (14), число ядер N уменьшается со временем по экспоненциальному закону.

Интенсивность (скорость) радиоактивного распада определяется величиной λ: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$. Наряду с постоянной распада λ для характеристики интенсивности распада используют две величины: период полураспада $T_{1/2}$ и среднее время жизни τ радиоактивного ядра.

Период полураспада $T_{1/2}$ – время, за которое распадается $\frac{1}{2}N_0$ ядер. Тогда оставшееся число ядер $N = \left(N_0 - \frac{1}{2}N_0\right) = \frac{N_0}{2}$ и, согласно закону радиоактивного распада (13):

$$\ln\left(\frac{N_0}{2N_0}\right) = -\lambda T_{1/2}; \quad \rightarrow \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \tag{15}$$

Среднее время жизни τ радиоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \tag{16}$$

6.5. Активность радиоактивного вещества

Активность *A* ***радиоактивного вещества*** (нуклида) – это скорость его распада, т. е. число распадов за время 1 с:

$$A = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|. \tag{17}$$

В СИ единица измерения активности – беккерель (Бк): $1\ \text{Бк} = 1\,\frac{\text{распад}}{\text{с}}$. Кроме того, в ядерной физике используется внесистемная единица активности – кюри (Ки): $1\ \text{Ки} = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

С учетом закона радиоактивного распада (12) формулу (17) для величины активности можно записать в следующем виде:

$$A = \lambda N. \tag{18}$$

Таким образом, активность радиоактивного вещества в данный момент времени t пропорциональна числу ядер N, *не распавшихся* к этому моменту времени.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7.1. План решения задач по теме «Атомное ядро, энергия связи, энергия ядерной реакции»

1. Обратите внимание на единицу энергии, которая используется для энергии связи $E_{\text{св}}$ ядра в ядерной физике: 1 МэВ, – соответственно, единица удельной энергии связи$\left(E_{\text{уд}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}\right)$: 1 $\frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$.

2. Чтобы получить энергию связи в мегаэлектрон-вольтах (при вычислении по формуле $E_{\text{св}} = \Delta mc^2$), массы атомов из справочной таблицы берут в атомных единицах массы (а.е.м.). Учитывая, что $1\ \text{а.е.м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг, получим:

$$E_{\text{св}} = \Delta m \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \frac{\text{кг}}{\text{а.е.м.}} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\ \frac{\text{Дж}}{\text{а.е.м.}}.$$

Так как $1\ \text{Дж} = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{эВ} = 1{,}60 \cdot 10^{-13}\ \text{МэВ} \rightarrow 1\ \frac{\text{МэВ}}{\text{Дж}} = \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-13}}$, то

$$E_{\text{св}} = \Delta m \left(\frac{1{,}50 \cdot 10^{-10}}{1{,}60 \cdot 10^{-13}}\ \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}}\right) \quad \rightarrow \quad E_{\text{св}} = 931 \cdot \Delta m, \text{МэВ}.$$

Последняя формула является <u>*наиболее удобной для вычисления энергии связи ядра и энергии ядерной реакции в единицах* МэВ</u>; при этом дефект массы Δm выражают в а.е.м.

3. Отметим, что при вычислении дефекта массы ядра Δm, а также разности масс Δm при расчете энергии ядерной реакции по формуле (10), следует брать массы атомов с указанием <u>*всех значащих цифр*</u>, приведенных в справочной таблице. Но полученные значения $E_{\text{св}}$, $E_{\text{уд}}$ и теплового эффекта ядерной реакции Q следует округлять, как обычно, до 3-х значащих цифр (так как с такой точностью найдено число $931\ \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}}$ в расчетной формуле).

4. При вычислении энергии ядерной реакции по формуле (10):

$$Q = \left(\sum m_i^{\text{исх}} - \sum m_j^{\text{прод}}\right)c^2; \quad \rightarrow \quad Q = 931 \cdot \Delta m, \text{МэВ}$$

знак величины Q определяется знаком разности масс Δm: если $\Delta m > 0$, т. е. $\sum m_i^{\text{исх}} > \sum m_j^{\text{прод}}$, то энергия выделяется и величина $Q > 0$; если $\Delta m < 0$, то энергия ядерной реакции отрицательна – энергия поглощается в ходе реакции.

Задача 40. Вычислите энергию связи $E_{\text{св}}$ ядер атомов гелия ^4_2He и алюминия $^{27}_{13}\text{Al}$ и их удельную энергию связи $E_{\text{уд}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}$. Определите, какое ядро прочнее.

Дано

$m_{\text{H}} = 1{,}00783$ а.е.м.;

$m_n = 1{,}00867$ а.е.м.;

$m_{\text{He}} = 4{,}00260$ а.е.м.;

Решение

Определяем энергию связи ядра по формуле

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2 = 931 \cdot \Delta m, \text{МэВ}, \qquad (1)$$

где дефект массы при образовании ядра

$m_{\text{Al}} = 26{,}98154$ а. е. м..

$E_{\text{св}} - ?$ $E_{\text{уд}} - ?$

Какое ядро прочнее?

$$\Delta m = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n] - m_{\text{ат}}. \qquad (2)$$

Здесь m_{H} – масса атома водорода; $m_{\text{ат}}$ – масса атома; m_n – масса нейтрона; Z – порядковый номер элемента в таблице Д.И. Менделеева; A – массовое число.

1) Вычисляем для ядра атома гелия $^{4}_{2}\text{He}$: $Z = 2$; $A = 4$.
Дефект массы – по формуле (2):

$$\Delta m = \{[2 \cdot 1{,}00783 + (4 - 2) \cdot 1{,}00867] - 4{,}00260\} \text{ а. е. м.} = 0{,}03040 \text{ а. е. м.}$$

Энергия связи ядра гелия – по формуле (1):

$$E_{\text{св}} = 931 \cdot 0{,}03040, \text{МэВ} = 28{,}3 \text{ МэВ}.$$

Удельная энергия связи

$$E_{\text{уд}} = \frac{E_{\text{св}}}{A} = \frac{28{,}3 \text{ МэВ}}{4 \text{ нукл.}} = 7{,}75 \ \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл.}}.$$

2) Аналогично вычисляем для ядра алюминия $^{27}_{13}\text{Al}$: $Z = 13$; $A = 27$.
Дефект массы – по формуле (2):

$$\Delta m = \{[13 \cdot 1{,}00783 + (27 - 13) \cdot 1{,}00867] - 26{,}98154\} \text{ а. е. м.} = 0{,}24163 \text{ а. е. м.}$$

Энергия связи ядра гелия – по формуле (1):

$$E_{\text{св}} = 931 \cdot 0{,}24163, \text{МэВ} = 225 \text{ МэВ}.$$

Удельная энергия связи

$$E_{\text{уд}} = \frac{E_{\text{св}}}{A} = \frac{225 \text{ МэВ}}{27 \text{ нукл.}} = 8{,}33 \ \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл.}}.$$

Определим, какое из этих двух ядер прочнее. Чтобы «развалить» ядро, достаточно отделить от него лишь один нуклон, – при этом образуется ядро другого атома, с массовым числом $(A - 1)$. Меньшая энергия для этого процесса $\left(\text{равная } 7{,}75 \ \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл.}}\right)$ потребуется ядру атома гелия, так как его удельная энергия связи $(7{,}75 < 8{,}33) \frac{\text{МэВ}}{\text{нукл.}}$

Задача 41. Определите энергию Q, которая выделяется при реакции

$$^{9}_{4}\text{Be} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\text{C} + {}^{1}_{0}\text{n}.$$

Дано

$m_{\text{Be}} = 9{,}01219$ а. е. м.;

$m_{\text{He}} = 4{,}00260$ а. е. м.;

$m_{\text{C}} = 12{,}00000$ а. е. м.;

Решение

Определяем энергию ядерной реакции по формуле

$$Q = \Delta mc^2 = 931 \cdot \Delta m, \text{МэВ}, \qquad (1)$$

где Δm – разность масс исходных ядер и ядер

$m_n = 1{,}00867$ а. е. м..

$Q - ?$

продуктов реакции:

$$\Delta m = \left(\sum m_i^{\text{исх}} - \sum m_j^{\text{прод}}\right). \qquad (2)$$

Разность масс ядер в уравнении (2) равна разности масс соответствующих атомов ($m_{\text{ат}} = m_{\text{я}} + Z \cdot m_e$), так как, согласно закону сохранения электрического заряда: $\sum Z_i\, e = \sum Z_j\, e$, – сумма зарядовых чисел исходных ядер и продуктов реакции одинакова. Для данной в задаче реакции уравнение (2) запишем в следующем виде:

$$\Delta m = m_{\text{Be}} + m_{\text{He}} - (m_{\text{C}} + m_n). \qquad (3)$$

По этой формуле вычисляем разность масс атомов:

$$\Delta m = (9{,}01219 + 4{,}00260 - (12{,}00000 + 1{,}00867))\ \text{а. е. м.} = 0{,}00612\ \text{а. е. м.}$$

Величина $\Delta m > 0$, т. е. $\sum m_i^{\text{исх}} > \sum m_j^{\text{прод}}$; следовательно, $Q > 0$ и энергия выделяется. Энергию, которая выделяется при протекании реакции, вычисляем по формуле (1):

$$Q = 931 \cdot 0{,}00612, \text{МэВ} = 5{,}70\ \text{МэВ}.$$

7.2. План решения задач по теме «Радиоактивность»

1. Скорость распада и активность A радиоактивного вещества зависят от постоянной распада λ данного вещества; ее находят, используя *табличное значение периода полураспада* $T_{1/2}$ с помощью формулы

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}. \qquad (1)$$

2. Активность A радиоактивного вещества в данный момент времени t зависит также от концентрации *нераспавшихся ядер* N, которую находят с помощью закона радиоактивного распада:

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \qquad (2)$$

3. Если необходимо найти число распавшихся ядер $N^{\text{расп}}$, то используют очевидное равенство для начального количества ядер в образце:

$$N_0 = N^{\text{расп}} + N^{\text{нерасп}}; \quad \rightarrow \quad N_0 = N^{\text{расп}} + N.$$

где N – *число нераспавшихся ядер*, оно определяется законом распада (2).

Задача 42. Определите, какая доля радиоактивного изотопа йода $^{131}_{53}\text{I}$ распадается в течение времени $t = 4$ суток.

Дано

Йод $^{131}_{53}\text{I}$: $T_{1/2} = 8$ сут;

$t = 4$ сут.

Решение

Доля распавшихся ядер – это отношение числа распавшихся ядер $N^{\text{расп}}$ к начальному числу ядер N_0: $\delta_N = \frac{N^{\text{расп}}}{N_0}$. А закон радиоактивного распада дает число ядер $N^{\text{ост}}$ – оставшихся к моменту

времени t:

$\delta_N - ?$

$$N^{\text{ост}} = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \qquad (1)$$

Так как $N^{\text{расп}} + N^{\text{ост}} = N_0$, то запишем $N^{\text{расп}} = N_0 - N^{\text{ост}}$ и выразим долю:

$$\delta_N = \frac{N_0 - N^{\text{ост}}}{N_0} = 1 - \frac{N^{\text{ост}}}{N_0}. \qquad (2)$$

С учетом закона радиоактивного распада (2) получаем формулу:

$$\delta_N = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}. \qquad (3)$$

Здесь постоянная распада λ и период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного вещества связаны следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \qquad (4)$$

Подставляя величину λ по формуле (4) в уравнение (3), получаем расчетную формулу в виде:

$$\delta_N = 1 - \mathrm{e}^{\left(-\frac{t}{T_{1/2}}\right)\ln 2} = 1 - \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^{\left(-\frac{t}{T_{1/2}}\right)} = 1 - 2^{\left(-\frac{t}{T_{1/2}}\right)}.$$

Вычисляем по полученной формуле долю ядер, распавшихся к моменту времени t:

$$\delta_N = 1 - 2^{\left(-\frac{4\text{ сут}}{8\text{ сут}}\right)} = 1 - 2^{-1/2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 0{,}707 = 0{,}293. \ \ \delta_N = 29{,}3\ \%.$$

Задача 43. Для образца радиоактивного изотопа иридия $^{192}_{77}\mathrm{Ir}$, начальная масса которого $m = 1$ мг, определите число ядер N, распавшихся в течение времени: 1) $t_1 = 1$ мин; 2) $t_2 = 5$ суток.

Дано

$^{192}_{77}\mathrm{Ir}$: $T_{1/2} = 75$ сут;

$m = 1$ мг;

$t_1 = 1$ мин;

$t_2 = 5$ сут.

$N_1 - ?$ $\quad N_2 - ?$

Решение

Найдем начальное число атомов N_0 в образце, содержащем число молей $\nu = \frac{m}{M}$:

$$N_0 = \nu N_\mathrm{A} = \frac{m}{M} N_\mathrm{A}, \qquad (1)$$

где m и M – масса и молярная масса иридия $\left(M = 192 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}\right)$; $N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро (число атомов в одном моле вещества).

Закон радиоактивного распада ядер можно записать в двух формах:

1) В дифференциальной записи – для малого числа ядер $\Delta N \approx |\mathrm{d}N|$, распавшихся за малое (по сравнению с периодом полураспада $T_{1/2}$) время $\Delta t \approx \mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t; \quad \rightarrow \quad \Delta N \approx \lambda N_0 \Delta t; \quad \rightarrow \quad N_1 \approx \lambda N_0 t_1. \qquad (2)$$

Эту формулу закона можно применить для промежутка времени $t_1 \ll T_{1/2}$.

2) В интегральной форме – для времени распада, соизмеримого с величиной $T_{1/2}$:

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \qquad (3)$$

Здесь N_0 – начальное число ядер (в момент времени $t = 0$); N – число <u>*нераспавшихся*</u> ядер в момент времени t; λ – постоянная радиоактивного распада.

Закон распада в форме (3) применим для промежутка времени t_2. Так как число распавшихся ядер $N_2 = N_0 - N^{\text{нерасп}}$, то, с учетом закона (3):

$$N_2 = N_0 - N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = N_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right). \qquad (4)$$

В уравнениях (2) и (4) постоянная распада λ и период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного вещества связаны следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}. \qquad (5)$$

С учетом формул (1) и (5) преобразуем уравнения (2) и (4) в следующие расчетные формулы:

$$N_1 \approx 0{,}693 N_0 \frac{t_1}{T_{1/2}}. \qquad (6)$$

$$N_2 = N_0\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}693\frac{t_2}{T_{1/2}}}\right). \qquad (7)$$

Вычислим начальное число ядер в образце:

$$N_0 = \frac{m}{M} N_{\text{A}} = \frac{1 \cdot 10^{-6}\ \text{кг}}{192 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1} = 3{,}1 \cdot 10^{18}.$$

Вычисляем по формуле (6) число ядер, распавшихся за время t_1:

$$N_1 \approx 0{,}693 \cdot 3{,}1 \cdot 10^{18} \cdot \frac{1\ \text{мин}}{75\ \text{сут} \cdot 24\ \frac{\text{ч}}{\text{сут}} \cdot 60\ \frac{\text{мин}}{\text{ч}}} = 2{,}0 \cdot 10^{13}.$$

Полученное число $N_1 \approx 2{,}0 \cdot 10^{13} \ll (N_0 = 3{,}1 \cdot 10^{18})$, что подтверждает правомерность использования простой приближенной формулы (2) закона радиоактивного распада.

По формуле (7) вычисляем число ядер, распавшихся за время t_2:

$$N_2 = 3{,}1 \cdot 10^{18}\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}693\frac{5\ \text{сут}}{75\ \text{сут}}}\right) = 3{,}1 \cdot 10^{18}(1 - \mathrm{e}^{-0{,}046})$$
$$\approx 3{,}1 \cdot 10^{18}(1 - 1 + 0{,}046) = 1{,}4 \cdot 10^{17}.$$

Здесь использовали формулу для приближенного вычисления при $a \ll 1$: $\mathrm{e}^a = 1 + a$.

Задача 44. Активность A образца некоторого изотопа за время $t = 5$ суток уменьшилась на 20%. Определите период полураспада $T_{1/2}$ этого изотопа.

Дано

$t = 5$ суток;

Решение

В задаче дано относительное уменьшение

$\delta = 20\ \%;\ \rightarrow\ \delta = 0{,}2.$

$T_{1/2} - ?$

активности образца:

$$\delta = \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_0 - A}{A_0}; \quad \rightarrow \quad \delta = 1 - \frac{A}{A_0}, \qquad (1)$$

где A_0 – активность образца в начальный момент времени $t = 0$; A – активность того же образца в момент времени t.

Активность радиоактивного вещества пропорциональна числу ядер, которые будут распадаться, т. е. числу N *нераспавшихся* ядер:

$$A_0 = \lambda N_0; \qquad A = \lambda N. \qquad (2)$$

По закону радиоактивного распада число N *нераспавшихся* ядер

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \qquad (3)$$

Следовательно, формула (2), с учетом закона (3), приводит к зависимости активности образца от времени t в виде:

$$A = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}; \quad \rightarrow \quad A = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \qquad (4)$$

Подставляя зависимость (4) в формулу (1), получаем следующую формулу:

$$\delta = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}; \quad \rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\lambda t} = 1 - \delta.$$

Логарифмируя, находим

$$-\lambda t = \ln(1 - \delta); \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{\ln(1-\delta)}{t}. \qquad (5)$$

Период полураспада $T_{1/2}$ и постоянная распада λ радиоактивного вещества связаны следующим соотношением:

$$T_{1/2} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \qquad (6)$$

Подставляя в последнюю формулу выражение (5), получаем расчетную формулу в следующем виде:

$$T_{1/2} = -\frac{0{,}693}{\ln(1-\delta)} t.$$

Вычисляем период полураспада радиоактивного вещества:

$$T_{1/2} = -\frac{0{,}693}{\ln 0{,}8} \cdot 5 \text{ сут} = 22{,}4 \text{ сут}.$$

Задача 45. Определите массу m образца радиоактивного изотопа актиния $^{225}_{89}\mathrm{Ac}$, имеющего активность $A = 2{,}5$ ГБк.

Дано

$^{225}_{89}\mathrm{Ac}$: $T_{1/2} = 10$ сут;

$A = 2{,}5 \text{ ГБк} = 2{,}5 \cdot 10^9 \text{ Бк}.$

$m - ?$

Решение

Активность A радиоактивного образца пропорциональна числу N нераспавшихся ядер в этом образце:

$$A = \lambda N, \qquad (1)$$

где λ – постоянная распада данного вещества.

Постоянная распада λ и период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного вещества связаны следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}. \qquad (2)$$

Из формулы (1) выразим число ядер в образце и учтем выражение (2):

$$N = \frac{A}{\lambda}; \qquad \rightarrow \qquad N = \frac{AT_{1/2}}{0{,}693}. \qquad (3)$$

Число ядер равно числу атомов изотопа актиния, поэтому можно найти число молей ν радиоактивного вещества в образце по формуле:

$$\nu = \frac{N}{N_{\text{А}}}, \qquad (4)$$

где $N_{\text{А}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро (число атомов в одном моле вещества). С другой стороны, число молей вещества можно выразить через его массу m и молярную массу актиния M $\left(M = 225 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}\right)$:

$$\nu = \frac{m}{M}. \qquad (5)$$

Приравнивая величину ν по формулам (4) и (5) и учитывая равенство (3), получаем расчетную формулу массы образца:

$$m = \frac{MAT_{1/2}}{0{,}693 N_{\text{А}}}. \qquad (6)$$

Здесь период полураспада следует выразить в секундах, так как единица активности 1 Бк $= \frac{1}{\text{с}}$.

Вычисляем массу образца радиоактивного вещества по формуле (6):

$$m = \frac{225 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{9}\ \frac{1}{\text{с}} \cdot 10\ \text{сут} \cdot 24\ \frac{\text{ч}}{\text{сут}} \cdot 3600\ \frac{\text{с}}{\text{ч}}}{0{,}693 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}} = 1{,}17 \cdot 10^{-9}\ \text{кг} = 1{,}17\ \text{мкг}.$$

Задача 46. Счетчик α-частиц, установленный вблизи образца радиоактивного изотопа, при первом измерении зарегистрировал $\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 900\ \frac{1}{\text{мин}}$ – частиц в минуту, а через время $t = 2$ ч – $\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_1 = 300\ \frac{1}{\text{мин}}$. Определите период полураспада изотопа $T_{1/2}$.

Дано

$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 900\ \frac{1}{\text{мин}}$;

$t = 2$ ч;

Решение

В условии задачи дана скорость распада радиоактивного изотопа в два момента времени: $t_0 = 0$ и t. Скорость распада дает нам активность изотопа A:

$$A = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|. \qquad (1)$$

$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)_1 = 300\ \frac{1}{\text{мин}}$.

$T_{1/2} - ?$

Величина A пропорциональна числу N нераспавшихся ядер в этом образце:

$$A_0 = \lambda N_0; \qquad A = \lambda N. \tag{2}$$

Число N <u>*нераспавшихся*</u> ядер определяем по закону радиоактивного распада:

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{3}$$

Заменяя в уравнении (3) $N = \frac{A}{\lambda}$ и $N_0 = \frac{A_0}{\lambda}$ (в соответствии с формулами (2)), получаем соотношение активностей радиоактивного образца в виде:

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{4}$$

Здесь постоянная распада λ связана с периодом полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного вещества связаны следующим соотношением:

$$T_{1/2} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \tag{5}$$

Найдем величину λ из уравнения (4) путем его логарифмирования:

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{A}{A_0}; \qquad \rightarrow \qquad -\lambda t = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right); \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{A_0}{A}\right). \tag{6}$$

Подставляя найденную величину λ в формулу (5), получаем расчетную формулу периода полураспада $T_{1/2}$:

$$T_{1/2} = t \cdot \frac{0{,}693}{\ln\left(\frac{A_0}{A}\right)}. \tag{7}$$

Вычисляем период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного изотопа, заменяя отношение активностей образца (на основании формулы (1)), отношением измеренных счетчиком скоростей α-распада ядер радиоактивного изотопа:

$$T_{1/2} = 2\ \text{ч} \cdot \frac{0{,}693}{\ln\left(\frac{900\ \text{мин}^{-1}}{300\ \text{мин}^{-1}}\right)} = 1{,}26\ \text{ч}.$$

Задача 47. Определите период полураспада изотопа $T_{1/2}$, если известно, что из миллиона атомов $(N = 10^6)$ этого радиоактивного изотопа за каждую секунду распадаются ядра 100 атомов: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 100\ \text{с}^{-1}$.

Дано

$N = 10^6$;

$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 100\ \text{с}^{-1}$.

Решение

В условии задачи дана скорость распада радиоактивного изотопа, равная активности изотопа A:

$$A = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|. \tag{1}$$

$T_{1/2} - ?$

Величина A пропорциональна числу N нераспавшихся ядер в этом образце:

$$A = \lambda N. \tag{2}$$

Приравнивая активности A образца в формулах (1) и (2), получаем выражение для определения постоянной λ радиоактивного распада изотопа:

$$\lambda = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|}{N}. \tag{3}$$

Период полураспада $T_{1/2}$ и постоянная распада λ радиоактивного вещества связаны следующим соотношением:

$$T_{1/2} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \tag{4}$$

Подставляя в последнее равенство величину λ по формуле (3), получаем расчетную формулу периода полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного изотопа:

$$T_{1/2} = \frac{0{,}693}{\lambda} = \frac{0{,}693 \cdot N}{\left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|}.$$

Вычисляем величину периода полураспада:

$$T_{1/2} = \frac{0{,}693 \cdot 10^6}{100\ \text{с}^{-1}} = 6{,}93 \cdot 10^3\ \text{с} = \frac{6930\ \text{с}}{3600\ \frac{\text{с}}{\text{ч}}} = 1{,}93\ \text{ч}.$$