КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

ЗАДАЧА 1

Найти интегралы.

1.1. а) $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; б) $\int x\sin 2x\,dx$; в) $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$; г) $\int \frac{x^3+4}{x^2-x}dx$.

1.2. а) $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$; б) $\int x\cos 3x\,dx$; в) $\int \frac{2dx}{x^2+4x+25}$; г) $\int \frac{x^4-2}{x^2+2x}dx$.

1.3. а) $\int \frac{6x+1}{2x^2-1}dx$; б) $\int (x+2)e^x\,dx$; в) $\int \frac{4dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$; г) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$.

1.4. а) $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$; б) $\int \arcsin x\,dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2-4x+15}$; г) $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$.

1.5. а) $\int \frac{3x+2}{1+2x^2}dx$; б) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; в) $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$; г) $\int \frac{2x^2+1}{x^2-3}dx$.

1.6. а) $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx$; б) $\int x^2\ln x\,dx$; в) $\int \frac{2dx}{x^2-2x+5}$; г) $\int \frac{x^3+2}{x^2-4x}dx$.

1.7. а) $\int \frac{1-5x}{1+25x^2}dx$; б) $\int (3-2x)\sin 3x\,dx$; в) $\int \frac{4dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$; г) $\int \frac{3x^3-2}{x^2-x}dx$.

1.8. а) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}}dx$; б) $\int x\sin 2x\,dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$; г) $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$.

1.9. а) $\int \frac{4x-3}{3x^2-4}dx$; б) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$; в) $\int \frac{3dx}{x^2-4x+1}$; г) $\int \frac{x^4}{x^2-3}dx$.

1.10. а) $\int \frac{1-3x}{4x^2-1}dx$; б) $\int x^2\ln(1+x)\,dx$; в) $\int \frac{2dx}{x^2-4x+10}$; г) $\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx$.

ЗАДАЧА 2

Вычислить интеграл.

2.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^3 x}\sin x\,dx$. **2.2.** $\int_0^{\pi} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$. **2.3.** $\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$.

2.4. $\int_0^{\pi/4} tg^2 x\,dx$. **2.5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin^4 x\,dx$. **2.6.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\sin^3 x\,dx$.

2.7. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} ctg^2 x\,dx$. **2.8.** $\int\limits_0^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x\,dx$. **2.9.** $\int\limits_0^{\pi} \sin^5 x\,dx$. **2.10.** $\int\limits_0^{\pi} \cos^5 x\,dx$.

ЗАДАЧА 3

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

3.1. $y=(x-1)^2;\ y=-x+3$. **3.2.** $y=x^2;\ y=3x$. **3.3.** $y=x^2+x;\ y=x+1$.

3.4. $y=-(x+1)^2;\ y=-2x-5$. **3.5.** $y=(x+2)^2;\ y=5x+6$.

3.6. $y=-(x-1)^2;\ y=2x-5$. **3.7.** $y=(x+3)^2;\ y=3x+9$.

3.8. $y=(x+2)^2;\ y=4$. **3.9.** $y=4x^2;\ y=x^4$. **3.10.** $y=-x^2;\ y=-x-6$.

ЗАДАЧА 4

Вычислить интеграл.

4.1. $\iint\limits_D \left(12x^2y^2+16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

4.2. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}.$

4.3. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}.$

4.4. $\iint\limits_D \left(6xy+24x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}.$

4.5. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

4.6. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}.$

4.7. $\iint\limits_D \left(44xy+16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

4.8. $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

4.9. $\iint\limits_D \left(8xy+18x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}.$

4.10. $\iint\limits_D \left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

ЗАДАЧА 5

5.1. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству. Первоначальный запас радия равен M. Известно, что по истечении 1600 лет останется половина первоначального запаса. Найти, сколько радия окажется нераспавшимся по истечении 800 лет.

5.2. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству x бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент t. Количество бактерий в начальный момент было x_0. Найти зависимость количества бактерий от времени, если известно, что через 5 часов количество бактерий увеличилось в три раза.

5.3. Тело массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы F, возрастающей на 3 Н в секунду. В начальный момент сила F равна 4 Н, скорость равна 10 м/с. Найти зависимость скорости от времени.

5.4. Определить путь S, пройденный телом за время t, если его скорость пропорциональна проходимому пути и, если тело проходит 100 м в 10 секунд и 200 м в 15 секунд.

5.5. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, скорость его через 5 секунд станет 8 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 м/с?

5.6. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха (коэффициент пропорциональности $k = 0{,}5$). Найти зависимость температуры тела T от времени t, если температура тела в начальный момент времени равна 80°, а температура воздуха 20°.

5.7. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его наличному количеству. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от его первоначального количества?

5.8. Тело массой $m = 3$ кг замедляет свое движение под действием силы сопротивления, которая пропорциональна кубу его скорости (коэффициент пропорциональности $k = 3$). Начальная скорость тела равна 10 м/с. Какой будет скорость тела в момент времени t?

5.9. Тело массой $m=1$ кг движется прямолинейно под действием силы, пропорциональной времени (коэффициент пропорциональности $k=20$), отсчитываемого от момента $t=0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. Какова будет скорость в момент времени t, если в момент $t=10$ с скорость $v=50$ м/с?

5.10. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения v на время t. Установить зависимость между скоростью и временем, если при $t=0$ скорость $v=v_0$.

ЗАДАЧА 6

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

6.1. а) $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$; б) $y'-\dfrac{y}{x}=x^2$.

6.2. а) $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$; б) $y'+\dfrac{y}{x}=x^2$.

6.3. а) $x\sqrt{4+y^2}dx-y\sqrt{x^2+1}dy=0$; б) $y'-\dfrac{y}{x}=x$.

6.4. а) $x\sqrt{3+y^2}dx-y\sqrt{4+x^2}dy=0$; б) $y'+\dfrac{y}{x}=x$.

6.5. а) $\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$; б) $y'-\dfrac{y}{x}=x^2+1$.

6.6. а) $\sqrt{2+y^2}dx-y\sqrt{4-x^2}dy=0$; б) $y'+\dfrac{y}{x}=x^2-2$.

6.7. а $x\sqrt{5+y^2}dx-y\sqrt{3+x^2}dy=0$; б) $y'-\dfrac{y}{x}=x^3+1$.

6.8. а) $x\sqrt{4-y^2}dx-\sqrt{5+x^2}dy=0$; б) $y'+\dfrac{y}{x}=x^3$.

6.9. а) $x\sqrt{1+y^2}dx+\sqrt{3+x^2}dy=0$; б) $y'-\dfrac{y}{x}=x^4-1$.

6.10. а) $x\sqrt{5+y^2}dx-y\sqrt{6+x^2}dy=0$; б) $y'+\dfrac{2y}{x}=x^3$.

ЗАДАЧА 7

Найти работу силы $\vec{F} = \{P(x,y); Q(x,y)\}$ при перемещении вдоль отрезка BC от точки B к точке C.

7.1. $P(x,y) = y,\ Q(x,y) = y - x,\ B(-1;0),\ C(0;1).$

7.2. $P(x,y) = 2xy,\ Q(x,y) = x^2,\ B(0;0),\ C(2;1).$

7.3. $P(x,y) = xy,\ Q(x,y) = y + x,\ B(0;0),\ C(1;1).$

7.4. $P(x,y) = y,\ Q(x,y) = y - x,\ B(-2;0),\ C(0;2).$

7.5. $P(x,y) = x^2 y,\ Q(x,y) = y,\ B(-1;0),\ C(0;1).$

7.6. $P(x,y) = y,\ Q(x,y) = y + x,\ B(0;0),\ C(1;1).$

7.7. $P(x,y) = 2xy,\ Q(x,y) = x^2,\ B(0;0),\ C(1;2).$

7.8. $P(x,y) = 3xy,\ Q(x,y) = x - y,\ B(0;0),\ C(2;2).$

7.9. $P(x,y) = x^2 y,\ Q(x,y) = y,\ B(-2;0),\ C(0;2).$

7.10. $P(x,y) = 2xy,\ Q(x,y) = x^2,\ B(0;0),\ C(1;3).$