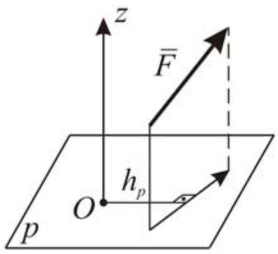
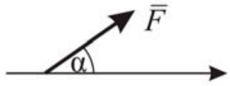
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

С Т А Т И К А

1. **Момент силы относительно центра**: $m_O\vec{F} = \left[\vec{r}_A, \vec{F}\right]$.
2. **Алгебраический момент силы относительно центра**:
   $\tilde{m}_O\vec{F} = \pm F h$.



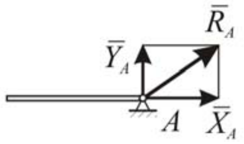
3. **Алгебраический момент пары сил** $(\vec{P}, \vec{Q})$: $\tilde{m}(\vec{P}, \vec{Q}) = \pm P d = \pm Q d$.
4. **Момент силы относительно оси**: $m_z\vec{F} = \pm F_P h_P$.



5. **Проекция силы на ось**: $F_x = F\cos\alpha$.
6. **Главный вектор** $\vec{U}_O$ системы сил $\left\{\vec{F}_k\right\}_n$: $\vec{U}_O = \sum \vec{F}_k$.
7. **Главный момент** $\vec{L}_O$ системы сил $\left\{\vec{F}_k\right\}_n$ относительно центра O: $\vec{L}_O = \sum m_O\vec{F}_k$.
8. **Главный момент** системы сил $\left\{\vec{F}_k\right\}_n$ относительно оси: $L_z = \sum m_z\vec{F}_k$, $L_z = (\vec{L}_O)_z$.
9. **Виды связей и их реакции** :

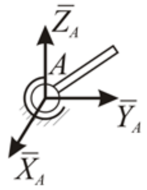
I вид **-** связи, препятствующие поступательному движению тела по одному направлению (гладкие поверхности, идеальные нити, ненагруженные стержни, подвижные шарниры)

II вид – связи, препятствующие поступательному движению тела по двум или трем направлениям (неподвижные цилиндрические и сферические шарниры, подшипники, подпятники)



Неподвижный цилиндрический шарнир

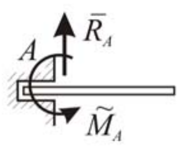
$\overline{R}_A \sim (\vec{X}_A, \vec{Y}_A)$

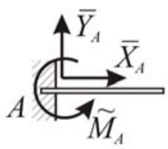


Неподвижный сферический шарнир

$\overline{R}_A \sim (\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \overline{Z}_A)$

III вид – связи, препятствующие и поступательному, и вращательному движениям тела (скользящие и жесткие заделки)





10. **Условия равновесия сил в векторной форме**:

$$\left\{\vec{F}_k\right\}_n \Leftrightarrow \vec{U}_O = \sum \vec{F}_k = 0, \ \vec{L}_O = \sum m_O\vec{F}_k = 0.$$

11. **Условия равновесия произвольной пространственной системы сил в аналитической форме**: $\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0, \sum m_x\vec{F}_k = 0, \ \sum m_y\vec{F}_k = 0, \sum m_z\vec{F}_k = 0$.

12. Условия равновесия произвольной плоской системы сил в аналитической форме:

$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum \tilde{m}_O\vec{F}_k = 0$ или $\sum F_{kx} = 0, \sum \tilde{m}_A\vec{F}_k = 0, \ \sum \tilde{m}_B\vec{F}_k = 0$, где

$x \perp AB$, или $\sum \tilde{m}_A\vec{F}_k = 0, \ \sum \tilde{m}_B\vec{F}_k = 0, \sum \tilde{m}_C\vec{F}_k = 0$, где $C \notin AB$.

13. **Аксиома равенства действия и противодействия**: $\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$ $(F_{ki} = F_{Ik})$.

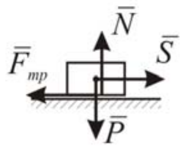
14. **Сложение пар сил**: чтобы сложить две пары сил, нужно сложить их моменты.

15. **Теорема эквивалентности**: $\left\{\vec{F}_k\right\}_n \sim \left\{\vec{Q}_i\right\}_m \Leftrightarrow \overline{U}_O(\vec{F}) = \overline{U}_O(\vec{Q})$, $\vec{L}_O(\vec{F}) = \vec{L}_O(\vec{Q})$.

16. **Теорема о приведении системы сил к центру** (теорема Пуансо):

$$\left\{\vec{F}_k\right\}_n \sim (\vec{R}_O, \vec{M}_O), \quad \vec{R}_O = \sum \vec{F}_k, \quad \vec{M}_O = \sum m_O \vec{F}_k .$$

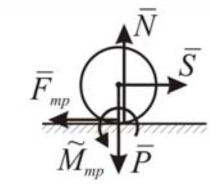
17. **Трение скольжения**



$0 \le F_{TP} \le F_{max}$

$F_{max} = f\,N$

Трение качения



$0 \le M_{TP} \le M_{max}$

$M_{max} = \delta\,N$

КИНЕМАТИКА

18. **Уравнения движения МО** – зависимости координат МО от времени.

19. **Обобщенные координаты** – независимые между собой координаты МО.

20. **Кинематические характеристики точки** (скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$):

1) при векторном способе: $\vec{r} = \vec{r}(t), \vec{V} = \dot{\vec{r}}, \vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$;

2) при координатном способе: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$; $V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z}$,

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} : a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}, a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}, \; a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} ;$$

3) при естественном способе: $\sigma = \sigma(t), \vec{V} = V_\tau \vec{\tau}, V_\tau = \dot{\sigma}$,

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, a_\tau = \dot{V}_\tau = \ddot{\sigma}, \; a_n = \frac{V_\tau^2}{\rho} = \frac{\dot{\sigma}^2}{\rho} .$$

21. **Поступательное движение ТТ**: обобщенные координаты – координаты полюса А, скорости всех точек тела одинаковы, ускорения всех точек тела одинаковы и равны скорости и ускорению точки А.

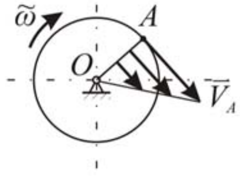
22. **Вращательное движение ТТ около неподвижной оси**: обобщенная координата – угол φ поворота тела; уравнение вращения $\varphi = \varphi(t)$; кинематические характеристики – алгебраическая угловая скорость $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ и алгебраическое угловое ускорение $\tilde{\varepsilon} = \dot{\tilde{\omega}} = \ddot{\varphi}$; векторы $\vec{\omega} = \vec{k}\omega_z = \vec{k}\tilde{\omega}$, $\vec{\varepsilon} = \vec{k}\varepsilon_z = \vec{k}\tilde{\varepsilon}$, где $\vec{k}$ - орт оси вращения тела.

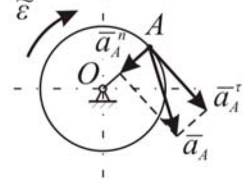
23. **Скорости и ускорения точек вращающегося тела**:

$V_A = OA \cdot \omega$, $\vec{V}_A \perp OA$;

$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$, $a_A^\tau = OA \cdot \varepsilon$, $\vec{a}_A^\tau \perp OA$;

$a_A^n = OA \cdot \omega^2$, $\vec{a}_A^n \parallel AO$; $a = OA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.





24. **Частные случаи вращения тела**:

1) равномерное $(\tilde{\omega} = const)$: $\varphi = \varphi_0 + \tilde{\omega}t$, $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$, где n – число об/мин;

2) равнопеременное $(\tilde{\varepsilon} = const)$: $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\varepsilon}t$, $\varphi = \varphi_0 + \tilde{\omega}_0 t + \dfrac{1}{2}\tilde{\varepsilon}t^2$.

25. **Плоскопараллельное (плоское) движение ТТ**: обобщенные координаты – координаты x_A, y_A полюса А фигуры и угол φ поворота фигуры вокруг полюса; уравнения движения $x_A = x_A(t),\ y_A = y_A(t),\ \varphi = \varphi(t)$; кинематические характеристики $\vec{V}_A,\ \vec{a}_A,\ \tilde{\omega} = \dot{\varphi},\ \ \tilde{\varepsilon} = \dot{\tilde{\omega}} = \ddot{\varphi}$.

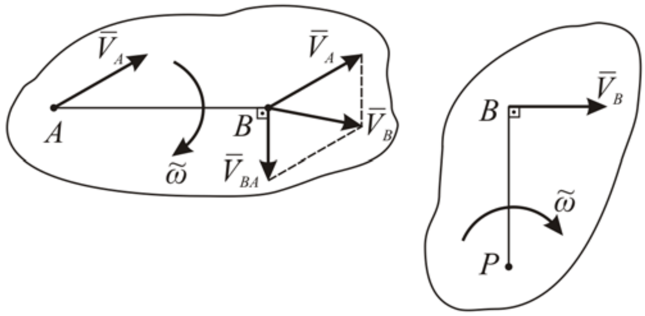
26. **Два способа решения задачи скоростей точек фигуры**:

1) через полюс: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$,

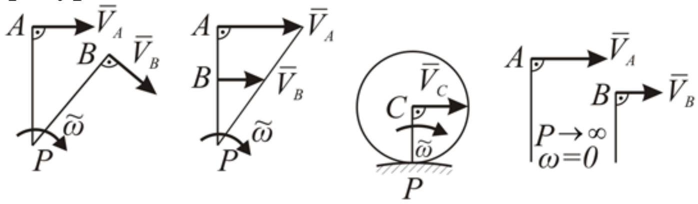
$$V_{BA} = AB \cdot \omega,\ \vec{V}_{BA} \perp AB,\ \omega = \frac{V_{BA}}{AB}$$

2) через МЦС (мгновенный центр скоростей):

$$V_B = PB \cdot \omega,\ \vec{V}_B \perp PB,\ \ \omega = \frac{V_B}{PB}$$



27. **Нахождение МЦС фигуры**:

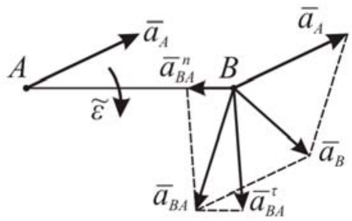


28. **Решение задачи ускорений точек фигуры**:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA},$$

$$a^{\tau}_{BA} = AB \cdot \varepsilon,\ \ \vec{a}^{\tau}_{BA} \perp AB;$$

$$a^{n}_{BA} = AB \cdot \omega^2,\ \ \vec{a}^{n}_{BA} \parallel BA;\ \varepsilon = \frac{a_{BA}}{AB}$$

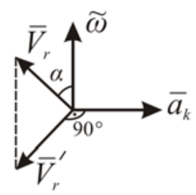


29. **Сложное движение точки**: абсолютное движение точки – движение в неподвижном пространстве; относительное – движение в подвижном пространстве; переносное – движение точки в неподвижном пространстве, когда она жестко связана с подвижным.

30. **Терема сложения скоростей**: $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ - абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее относительной и переносной скоростей.

31. **Теорема сложения ускорений (теорема Кориолиса)**: $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k$ - абсолютное ускорение точки равно сумме ее относительного, переносного и кориолисова ускорений. Ускорение Кориолиса $\bar{a}_k = 2\left[\vec{\omega}, \vec{V}_r\right]$, его модуль $a_k = 2\omega V_r \sin\alpha$, где α - угол между вектором $\vec{\omega}$ угловой скорости вращения подвижного пространства в неподвижном и относительной скоростью точки.

32. **Правило Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса**: проекцию относительной скорости точки на плоскость, перпендикулярную оси вращения подвижного пространства, повернуть на 90^0 в сторону его вращения.



Д И Н А М И К А

33. **Основное уравнение динамики точки в инерциальном пространстве**: $m\vec{a} = \vec{F}$.

34. **Основное уравнение динамики точки в неинерциальном пространстве**:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{Q}_e + \vec{Q}_k,\ \text{где}\ \vec{Q}_e = -m\vec{a}_e,\ \vec{Q}_k = -m\vec{a}_k.$$

35. **Дифференциальные уравнения движения точки**:

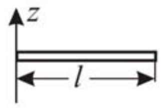
1) в векторной форме: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, НУ: $t = 0, \vec{r} = \vec{r}_0, \dot{\vec{r}} = \vec{V}_0$;

2) в координатной форме: $m\ddot{x} = F_x$, $m\ddot{y} = F_y$, $m\ddot{z} = F_z$, НУ: $t = 0, x = x_0, y = y_0$, $z = z_0, \dot{x} = V_{0x}, \dot{y} = V_{0y}, \dot{z} = V_{0z}$;

3) в естественной форме: $m\dfrac{dV_\tau}{dt} = F_\tau$, $m\dfrac{V_\tau^2}{\rho} = F_n$, $0 = F_b$, НУ: $t = 0, \sigma = \sigma_0, \dot{\sigma} = V_{0\tau}$.

36. **Центр масс материальной системы** – геометрическая точка, положение которой определяется так: $\vec{r}_C = \dfrac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k}$, $x_C = \dfrac{\sum m_k x_k}{m}$, $y_C = \dfrac{\sum m_k y_k}{m}$, $z_C = \dfrac{\sum m_k z_k}{m}$.

Теорема о движении центра масс: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$, где $\sum \vec{F}_k^e$ - главный вектор внешних сил, действующих на точки системы, m – масса системы.

37. **Моменты инерции простейших тел**: 1) однородного стержня $I_z = \dfrac{m\ell^2}{3}$; 

2)однородного кольца $I_z = mR^2$ 

;

3) однородного диска $I_z = \dfrac{mR^2}{2}$ 

.

38. **Динамические меры**:

$\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k = m\vec{V}_C$ - количество движения МС и ТТ;

$\vec{K}_O = \sum m_O(m_k \vec{V}_k)$ - кинетический момент МС относительно центра;

$K_z = \sum m_z(m_k \vec{V}_k)$ - кинетический момент МС относительно оси Oz;

$T = \dfrac{1}{2}mV^2$ - кинетическая энергия МТ; $T = \sum \dfrac{1}{2}m_k V_k^2$ - кинетическая энергия МС;

$T = \int\limits_{(\gamma)} \dfrac{1}{2}V^2 dm$ - кинетическая энергия ТТ в общем случае движения;

$T = \dfrac{1}{2}mV_C^2$ - кинетическая энергия ТТ при поступательном движении;

$T = \dfrac{1}{2}I_z\omega^2$ - кинетическая энергия ТТ при вращении около неподвижной оси Oz;

$T = \dfrac{1}{2}mV_C^2 + \dfrac{1}{2}I_{z_C}\omega^2$ - кинетическая энергия ТТ при плоском движении.

Здесь $\vec{V}_C$ - скорость центра тяжести тела, I_z, I_{z_C} - моменты инерции ТТ относительно оси вращения и относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости движения.

39. **Общие теоремы динамики**:

1) о количестве движения:

$\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$, $\dfrac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e$; $\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum \vec{S}_k^e$, $\vec{S}_k^e = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^e\, dt$ - импульс внешней силы;

2) о кинетическом моменте: $\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum m_O \vec{F}_k^e$, $\dfrac{dK_z}{dt} = \sum m_z \vec{F}_k^e$;

3) о кинетической энергии: $\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e + \sum N_k^i$, $T_2 - T_1 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$,

где $\sum N_k^e$, $\sum N_k^i$, $\sum A_k^e$, $\sum A_k^i$ - суммы мощностей и работ всех внешних и внутренних сил.

40. **Работа силы и пары сил**: $\delta A = F ds \cos\alpha$, $A = \int\limits_{M_0 M} \delta A$, $A = \pm Ph$ - работа силы тяжести,

$A = \widetilde{M} \cdot \varphi$ - работа пары сил с постоянным моментом.

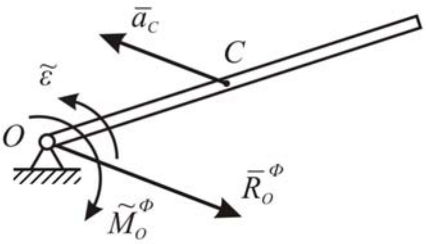
41. **Мощность силы и пары сил**: $N = FV\cos\alpha$, $N = \widetilde{M} \cdot \widetilde{\omega}$, где α - угол между силой и скоростью точки приложения силы.

42. **Принцип Даламбера**:

1) для материальной точки: $(\vec{F}, \vec{N}, \vec{\Phi}) \sim 0$, $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$;

2) для МС: $(\{\vec{F}_k^e\}_n, \{\vec{F}_k^i\}_n, \{\vec{\Phi}_k\}_n) \sim 0$, $\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_k$;

3) для ТТ: $(\{\vec{F}_k^e\}_n, \{d\vec{\Phi}\}) \sim 0$, $d\vec{\Phi} = -\vec{a}dm$.



43. Приведение сил инерции частиц ТТ к центру:

1) при поступательном движении $\{d\vec{\Phi}\}_C \sim \vec{R}_C^{\Phi} = -m\vec{a}_C$;

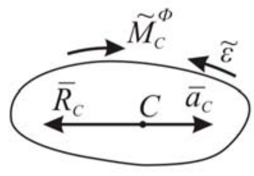
2) при вращательном движении около главной оси инерции

$$\{d\vec{\Phi}\}_O \sim (\vec{R}_O^{\Phi}, \vec{M}_O^{\Phi}) , \; \vec{R}_O^{\Phi} = -m\vec{a}_C , \; \vec{M}_O^{\Phi} = -I_z \vec{\varepsilon} ;$$

3) при вращательном движении около главной и центральной оси инерции $\{d\vec{\Phi}\}_C \sim \vec{M}_C^{\Phi} = -I_{z_C} \vec{\varepsilon}$;

4) при плоском движении $\{d\vec{\Phi}\}_C \sim (\vec{R}_C^{\Phi}, \widetilde{M}_C^{\Phi})$,

$$\vec{R}_C^{\Phi} = -m\vec{a}_C , \; \widetilde{M}_C^{\Phi} = -I_{z_C} \tilde{\varepsilon} .$$



44. **Дифференциальные уравнения движения ТТ**:

1) поступательное движение: $m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e$, $m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e$, $m\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e$;

2) вращательное движение около неподвижной оси Oz: $I_z \ddot{\varphi} = \sum m_z \vec{F}_k^e$;

3) плоское движение: $m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e$, $m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e$, $I_{z_C} \ddot{\varphi} = \sum \widetilde{m}_C \vec{F}_k^e$.

45. **Принцип возможных перемещений**: $\sum \delta A(\vec{F}) = 0$.

46. **Принцип возможных скоростей**: $\sum N(\vec{F}) = 0$.

47. **Принцип Даламбера – Лагранжа** (общее уравнение динамики):

$\sum \delta A(\vec{F}) + \sum \delta A(\vec{\Phi}) = 0$ или $\sum N(\vec{F}) + \sum N(\vec{\Phi}) = 0$, где $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$.

48. **Уравнения Лагранжа II-го рода**: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$, $j = 1, 2, ..., s$,

где $\{q_j\}_s$, $\{\dot{q}_j\}_s$ - обобщенные координаты и обобщенные скорости,

$Q_j = \dfrac{N_j}{\dot{q}_j}$ - обобщенная сила, соответствующая j-му парциальному движению,

s – число степеней свободы.

49. **Колебания МС с одной степенью свободы**:

1) собственные без сопротивления: $\ddot{x} + k^2 x = 0$, $x = A\sin(kt + \alpha)$;

2) собственные с сопротивлением: $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$, $x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha)$;

3) вынужденные без сопротивления: $\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \beta)$, $k \neq p$

$x = A\sin(kt + \alpha) + B\sin(pt + \beta - \varepsilon)$, $B = \dfrac{h}{\left|k^2 - n^2\right|}$, $\varepsilon = 0$ при $k > p$, $\varepsilon = \pi$ при $k < p$;

4) вынужденные с сопротивлением: $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \beta)$,

$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) + B\sin(pt + \beta - \varepsilon)$, $B = \dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$, $\mathrm{tg}\varepsilon = \dfrac{2np}{k^2 - p^2}$.

Здесь: A, B – амплитуды собственных и вынужденных колебаний, α - начальная фаза колебаний, $k = \dfrac{2\pi}{T}$ - циклическая (круговая частота) частота колебаний, T- период колебаний, $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, ε - сдвиг по фазе вынужденных колебаний относительно фазы возмущающей силы $(pt + \beta)$.