

МИНИСТЕРСТВО  
ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

539.3/.6(07)  
Ч-498

Черняев Э.Ф.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

---

Челябинск

• 1999

---

Министерство общего и профессионального образования  
Российской Федерации

Южно-Уральский государственный университет

Кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин

539.3/6(07)  
Ч-498

**Черняев Э.Ф.**

# **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**Учебное пособие**

Челябинск  
Издательство ЮУрГУ  
1999

УДК 539.3/6(07)

Черняев Э.Ф. Сопротивление материалов: Учебное пособие. - Челябинск: ЮУрГУ, 1999. - 207 с.

Учебное пособие является конспектом лекций по курсу "Сопротивление материалов" и соответствует общей типовой части программы курса для машиностроителей. Оно входит в программно-методический комплекс для чтения лекций в технически оснащённых аудиториях (телевизионных, компьютерных, с видеостенкой или кодаскопом).

Список лит. - 3 назв.

Одобрено учебно-методической комиссией факультета прикладной математики и физики.

Рецензенты: Иванов И.А., Морозов В.И.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	4
1. Введение. Основные определения .....	5
2. Растяжение – сжатие.....	16
3. Геометрические характеристики.....	46
4. Сдвиг и кручение .....	53
5. Изгиб прямого стержня.....	73
6. Основы теории напряжений и деформаций.....	104
7. Критерии пластичности и разрушения .....	127
8. Энергетический метод определения перемещений (метод Мора).....	147
9. Статически неопределимые системы. Метод сил.....	160
10. Расчёты за пределами упругости .....	174
11. Устойчивость деформируемых систем .....	190
12. Динамическое нагружение.....	199
Литература.....	207

## ПРЕДИСЛОВИЕ

По сопротивлению материалов есть ряд прекрасных учебников и учебных пособий. Классическим для нескольких поколений инженеров остается учебник В.И.Феодосьева; огромный практический опыт в сочетании с глубоким изложением физики явлений привлекают студентов и преподавателей к учебнику И.А.Биргера и Р.Р.Мавлютова; остаются непревзойденными университетская глубина и строгость учебника Ю.Н.Работнова. Эти и другие известные учебники достаточны для изучения большинства разделов курса (за исключением быстро развивающихся в последние годы расчетов за пределами упругости, компьютерных методов и механики развития трещин).

Перед Вами сейчас не учебник и не систематическое изложение каких-либо разделов курса, а материал, предназначенный для непосредственной работы студентов на лекциях, особенно в тех случаях, когда лекции читаются в технически оснащенных аудиториях (телевизионных, компьютерных, с видеостенкой или кодаскопом). Он является копией появляющегося на экране изображения и содержит в основном графический материал и формулы. Текстовая часть ограничена, как правило, основными определениями и не включает пояснения, комментарии и примеры инженерных приложений, составляющие существенную часть лекции, которую студент по-прежнему должен конспектировать самостоятельно, выбирая то, что представляется ему необходимым для записи.

Опыт кафедры прикладной механики, динамики и прочности машин Южно-Уральского государственного университета показал, что использование этого материала позволяет студентам более вдумчиво относиться к содержанию лекции и активнее формулировать вопросы. Экономия лекционного времени за счет разумного сокращения пауз для копирования составляет до 20-25 процентов. Кроме того, этот материал в ряде случаев оказывается удобным справочным пособием при подготовке к практическим и лабораторным занятиям и выполнении расчетно-графических работ. Совершенно очевидно, что он не заменяет лекций и учебников и не предназначен для самостоятельного - без участия преподавателя - изучения курса сопротивления материалов.

Конспект, подготовленный в основном доцентом Э.Ф.Черняевым, соответствует общей типовой части программы курса для машиностроителей и не учитывает специфические особенности различных специальностей. Поэтому каждый лектор корректирует и дополняет его в соответствии с конкретным образовательным стандартом и требованиями выпускающей кафедры.

Кафедра прикладной механики, динамики и прочности машин желает Вам успехов в изучении этого трудного, но увлекательного и совершенно необходимого для инженера курса, являющегося не только введенным в механику твердого деформируемого тела, но и основой практической работы по обеспечению прочности, надежности и долговечности конструкций.

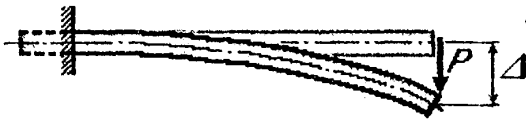
Профессор О.Чернявский,  
заведующий кафедрой прикладной механики,  
динамики и прочности машин ЮУрГУ

ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ В ТЕХНИКЕ

Все твердые тела способны в определенных пределах воспринимать воздействие внешних сил, не разрушаясь и не меняя существенным образом свои геометрические размеры, то есть обладают свойствами **ПРОЧНОСТИ** и **ЖЕСТКОСТИ**.

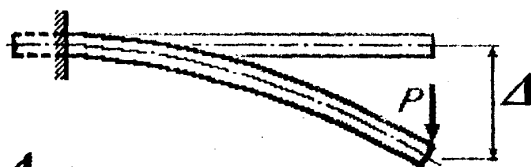
ПРОЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

1. Жесткая конструкция



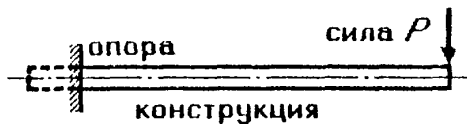
$\Delta$  - малое (по сравнению с размерами конструкции) перемещение

2. Гибкая конструкция



$\Delta$  - большое перемещение

Схема нагружения



НЕПРОЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

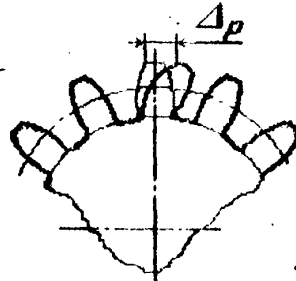
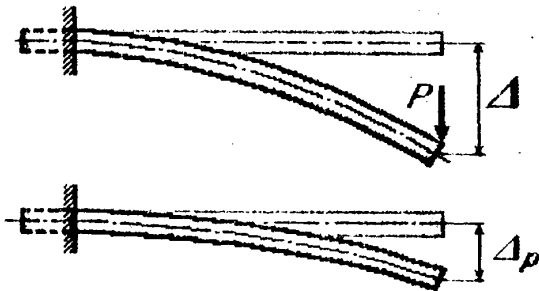
1. Хрупкое разрушение



Инженеру приходится решать множество различных вопросов, связанных с работой конструкции под нагрузкой - выбирать материал, назначать размеры конструкции, определять рабочие нагрузки и т.п.

Конструкция должна быть **ПРОЧНОЙ**, а иногда и **ЖЕСТКОЙ**.

2. Пластическое разрушение



$\Delta_p$  - остаточное или пластическое перемещение

- СОВРЕМЕННАЯ НАУКА О ПРОЧНОСТИ ХАРАКТЕРИЗУЕТСЯ :**
- развитием расчетных методов - расчет конструкций, математическое и физическое моделирование, применение ЭВМ и т. д.;
  - широким применением экспериментальных методов исследований - исследование свойств материалов, определение эксплуатационной нагруженности и т. д.



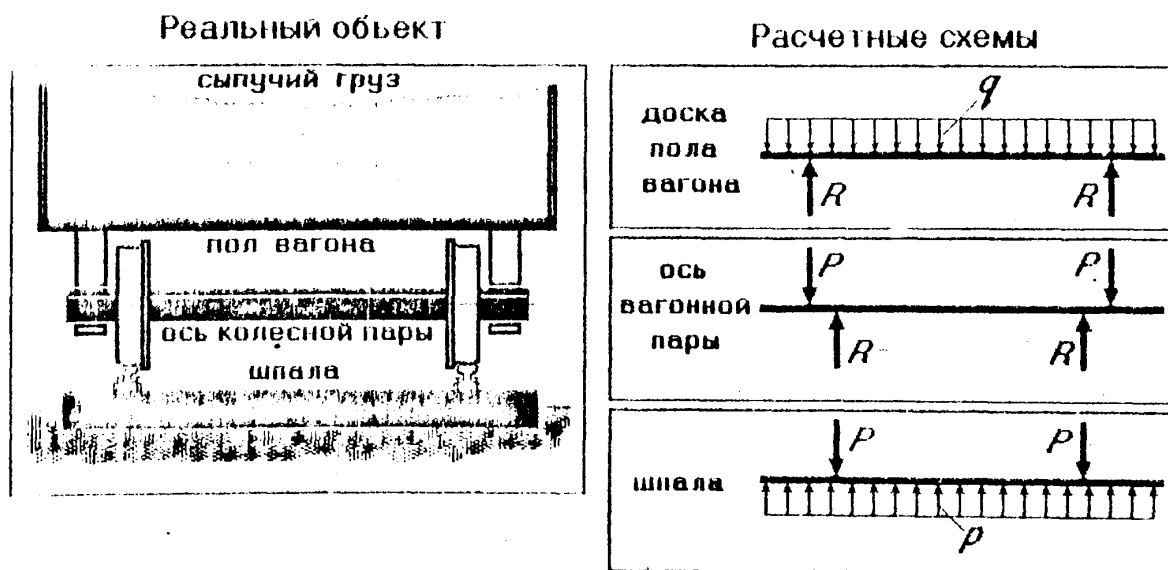
Сопротивление материалов изучает тела (конструкции), способные под нагрузкой изменять свои размеры и форму, т.е. **ДЕФОРМИРУЕМЫЕ ТЕЛА**.

**ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ :**

- Материал рассматривается как сплошная среда.
- Гипотеза о естественном ненапряженном состоянии.
- Однородность материала.
- Изотропность материала.
- Идеальная упругость материала.
- Идеальная пластичность и вязкость материала.

**МОДЕЛЬ ФОРМЫ КОНСТРУКЦИИ**

Расчетная схема - реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей.



### КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕЛ (ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ) ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ ПРИЗНАКУ

<p><b>1. СТЕРЖЕНЬ</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>длина <math>l</math> много больше поперечных размеров</li> </ul>  <p>поперечное сечение</p> <p><math>\frac{l}{a} \geq 5</math></p> <p><math>a</math> - наибольший размер поперечного сечения</p>	<p><b>2. ОБОЛОЧКА</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>одно из измерений (толщина) много меньше двух других</li> </ul>  <p>Пластинка</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>срединная поверхность - плоскость</li> </ul> 	<p><b>3. МАССИВ</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>три размера одного порядка (шарик или ролик в подшипниках качения)</li> </ul>  <p>Фундаменты сооружений, опорные стенки</p>
--	---	---

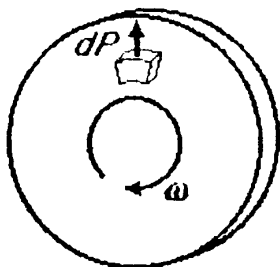
### МОДЕЛЬ НАГРУЖЕНИЯ

Условно принятые внешние силы:

- объемные, действующие на каждую точку тела;
- поверхностные, приложенные к его поверхности

К объемным силам относят: силы инерции; электромагнитные силы; силы веса и т.п.

Размерность объемных сил:  $H/M^3$  или  $MH/M^3$



$dP$  - центробежная сила, действующая на элемент диска

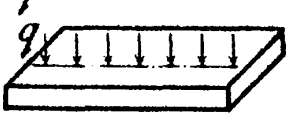
Поверхностные силы при выборе расчетной схемы упрощают и в зависимости от размеров площади загрузения подразделяют на следующие:

$p$  - давление, нагрузка, распределенная по поверхности



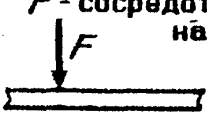
Размерность давления  $H/M^2$  (Паскаль) или  $MH/M^2$

$q$  - интенсивность, нагрузка, приходящаяся на единицу длины



Размерность интенсивности  $H/M$ ,  $кН/м$  или  $MH/M$

$F$  - сосредоточенная сила, действующая на небольшой участок детали

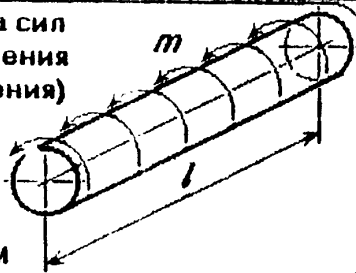


Размерность силы  $H$ ,  $кН$ ,  $MH$

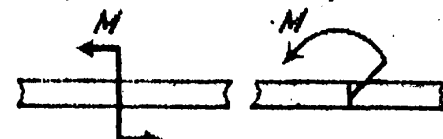
Распределенная пара сил (например, момент трения в подшипнике скольжения)

$m$  - интенсивность момента.

Размерность  $H \cdot м/м$  или  $MH \cdot м/м$



Сосредоточенные пары сил



Размерность  $H \cdot м$ ,  $кН \cdot м$ ,  $MH \cdot м$



**МОДЕЛИ РАЗРУШЕНИЯ**

Условия перехода от состояния прочности к началу разрушения называются условиями прочности.

В зависимости от условий нагружения рассматривают четыре модели разрушения:

- статическое разрушение.
- малоцикловое разрушение.
- длительное статическое разрушение.
- усталостное разрушение.

**КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ,**  
наложенных на твердое тело, расположенного в плоскости

**1. ШАРНИРНО - ПОДВИЖНАЯ** (односвязная) опора препятствует перемещению точки по линии действия связи

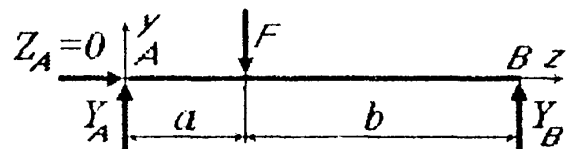
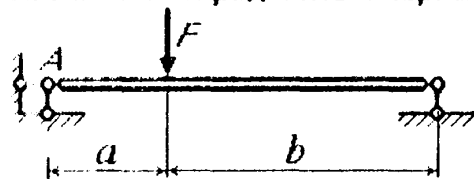
Реакция  $R_A$  всегда направлена по линии действия связи

**2. ШАРНИРНО - НЕПОДВИЖНАЯ** (двухсвязная) опора препятствует линейным смещениям одной точки

**3. СКОльзящая ЗАДЕЛКА**  
ограничивает возможность углового и одного из линейных перемещений, но допускает перемещение вдоль стержня

**4. ЖЕСТКАЯ ЗАДЕЛКА**  
препятствует линейным и угловому смещениям конца стержня

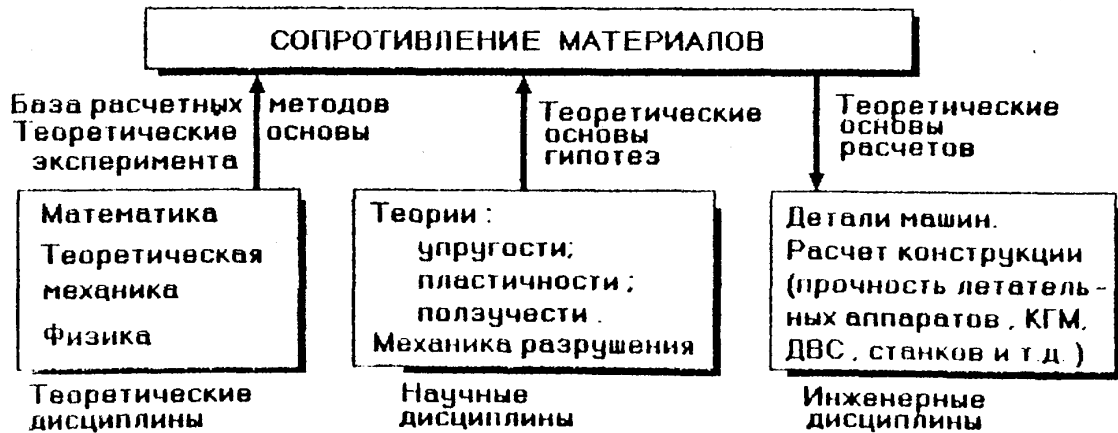
**ПРИМЕР:** Определить опорные реакции в системе



$$\begin{aligned} \sum M_A = F \cdot a - Y_B(a+b) = 0; & \quad Y_B = \frac{F \cdot a}{a+b}; & \quad \sum Z = Z_A = 0; & \quad Z_A = 0; \\ \sum M_B = F \cdot b - Y_A(a+b) = 0; & \quad Y_A = \frac{F \cdot b}{a+b}; & \quad \text{Проверка: } & \quad \sum Y = 0 \end{aligned}$$

**КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**  
**КАК ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ ДИСЦИПЛИНА**

Сопротивление материалов - наука об инженерных методах расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и сооружений (конструкций).



**ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ**

Прочность твердого тела обусловлена силами сцепления между его частицами (атомами, молекулами и т.п.). При нагружении твердого тела внешними силами (активными и реактивными) внутренние силы сцепления изменяются - появляются дополнительные внутренние силы, сопровождающие деформацию тела.

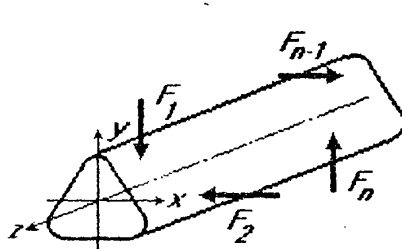
Для выявления внутренних сил служит **МЕТОД СЕЧЕНИЙ**.

Стержень и поперечное сечение



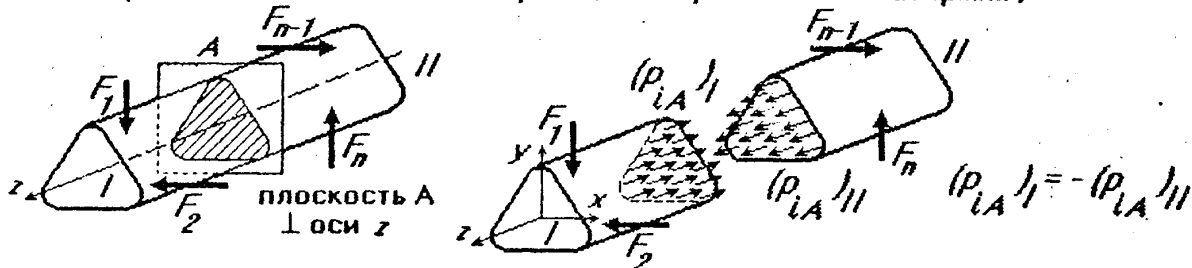
Оси  $x$  и  $y$  - главные центральные оси

Система внешних сил:  $(F_e) = (F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n)$   
Стержень находится в равновесии:  $\Sigma(F_e) = 0$



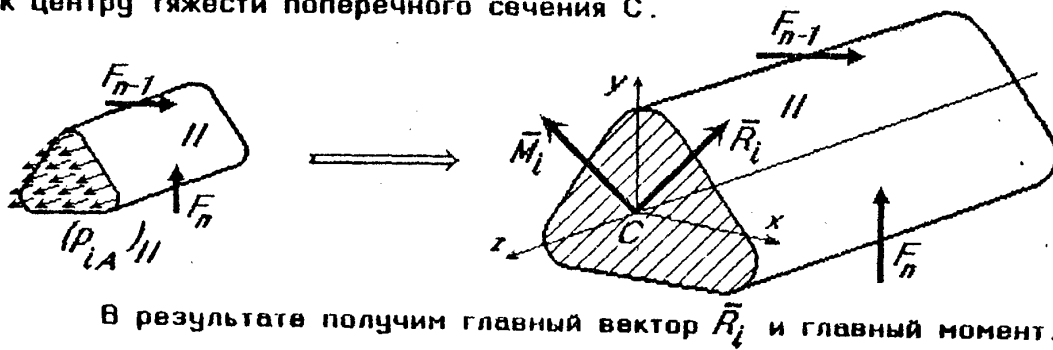
$$\begin{aligned} \Sigma X &= \Sigma(F_e)_x = 0 \\ \Sigma Y &= \Sigma(F_e)_y = 0 \\ \Sigma Z &= \Sigma(F_e)_z = 0 \\ \Sigma M_x &= \Sigma M_x(F_e) = 0 \\ \Sigma M_y &= \Sigma M_y(F_e) = 0 \\ \Sigma M_z &= \Sigma M_z(F_e) = 0 \end{aligned}$$

Рассечем мысленно стержень на две части плоскостью  $A$ , перпендикулярной к оси стержня. I - левая часть стержня; II - правая часть стержня;



$p_{LA}$  - система внутренних сил в сечении  $A$ . Внутренние силы  $p_{LA}$  - реакции внутренних связей. Они распределены по площади сечения (размерность Па, МПа).  
**ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР и ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ**

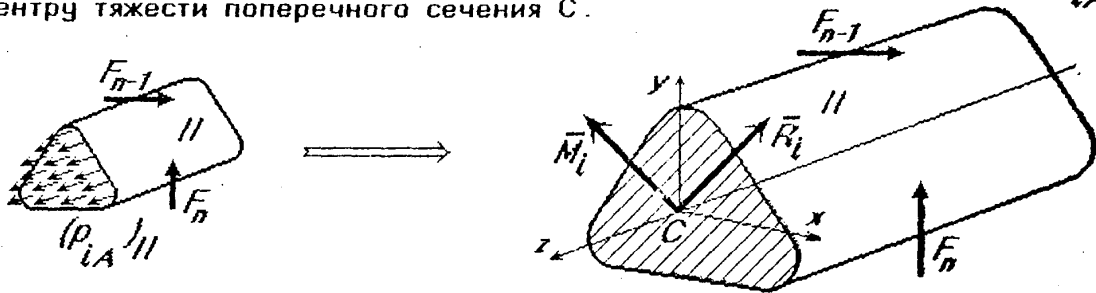
Рассмотрим подробно равновесие правой отсеченной части стержня. Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил  $(p_{LA})_{II}$  к центру тяжести поперечного сечения  $C$ .



В результате получим главный вектор  $\vec{R}_i$  и главный момент  $\vec{M}_i$ .

### ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ

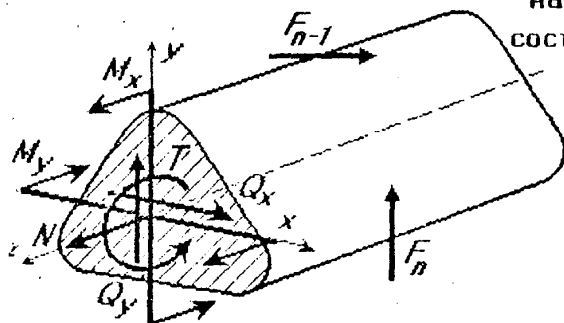
Рассмотрим подробно равновесие правой отсеченной части стержня. Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил  $(P_{IA})_{II}$  к центру тяжести поперечного сечения  $C$ .



В результате получим главный вектор  $\bar{R}_i$  и главный момент  $\bar{M}_i$ .

### ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ (ВСФ) В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СТЕРЖНЯ

Спроецируем главный вектор и главный момент на оси координат, то есть разложим их на три составляющих  $N, Q_x, Q_y$  и заменим на  $T, M_x, M_y$ .



- $N$  - нормальная (продольная) сила;
- $Q_x$  и  $Q_y$  - поперечные (перерезывающие) силы вдоль осей  $x$  и  $y$ ;
- $T$  - крутящий момент;
- $M_x$  и  $M_y$  - изгибающие моменты относительно осей  $x$  и  $y$ .

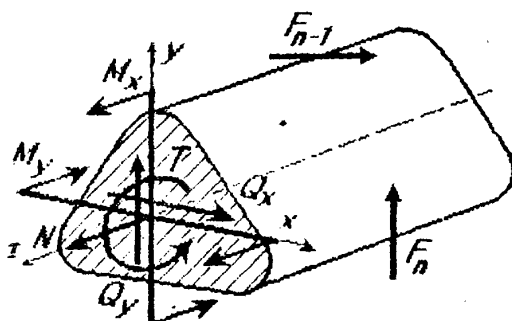
нормальная сила  $N$  - проекция главного вектора внутренних сил на ось  $z$ ;  
поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$  - проекции главного вектора на оси  $x$  и  $y$ , лежащие в плоскости поперечного сечения;

крутящий момент  $T$  - проекция главного момента внутренних сил на ось  $z$  (момент внутренних сил относительно оси стержня);

изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  - проекции главного момента на оси  $x$  и  $y$  (моменты внутренних сил относительно осей  $x$  и  $y$ ).

### УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОТСЕЧЕННОЙ ЧАСТИ СТЕРЖНЯ. ВЕЛИЧИНЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Отсеченная часть стержня:

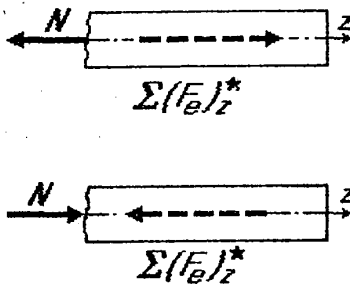


$$\begin{aligned} \sum Z = N + \sum (F_{\theta})_z^* &= 0; & N &= -\sum (F_{\theta})_z^*; \\ \sum X = Q_x + \sum (F_{\theta})_x^* &= 0; & Q_x &= -\sum (F_{\theta})_x^*; \\ \sum Y = Q_y + \sum (F_{\theta})_y^* &= 0; & Q_y &= -\sum (F_{\theta})_y^*; \\ \sum M_z = T + \sum M_z (F_{\theta})^* &= 0; & T &= -\sum M_z (F_{\theta})^*; \\ \sum M_x = M_x + \sum M_x (F_{\theta})^* &= 0; & M_x &= -\sum M_x (F_{\theta})^*; \\ \sum M_y = M_y + \sum M_y (F_{\theta})^* &= 0; & M_y &= -\sum M_y (F_{\theta})^*; \end{aligned}$$

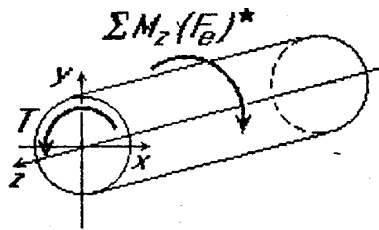
Здесь символ  $(F_{\theta})^*$  обозначает внешние силы, действующие на отсеченную часть стержня.

ОСНОВНЫЕ (простые) ВИДЫ НАГРУЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ

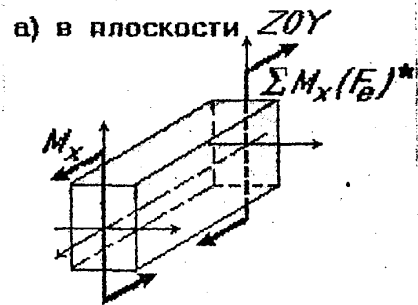
Растяжение - сжатие



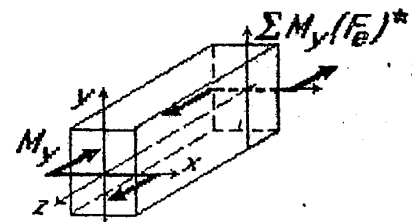
Кручение



Изгиб



б) в плоскости ZOY



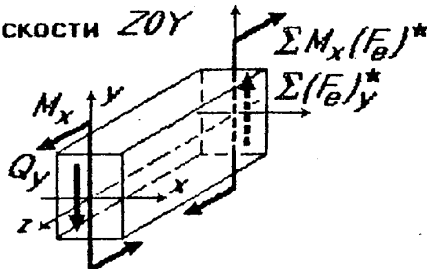
Если в поперечных сечениях стержня возникает нормальная сила  $N$ , а прочие силовые факторы равны нулю, то стержень испытывает РАСТЯЖЕНИЕ или СЖАТИЕ, в зависимости от направления нормальной силы.

Если в поперечных сечениях стержня действует крутящий момент  $T$ , то стержень (вал) работает на КРУЧЕНИЕ. Крутящий момент стремится повернуть сечение вокруг оси стержня.

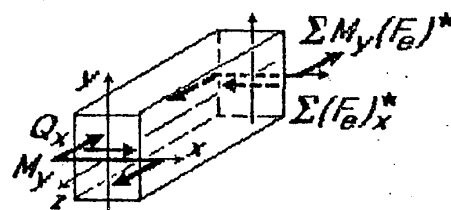
Если в поперечных сечениях стержня действуют только изгибающие моменты  $M_x$  или  $M_y$ , стержень (балка) испытывает ЧИСТЫЙ ИЗГИБ.

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

а) в плоскости ZOY



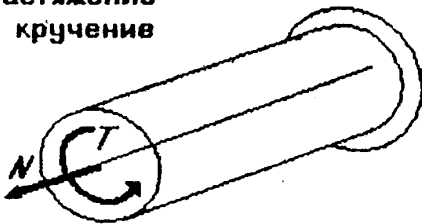
б) в плоскости ZOY



Если в поперечных сечениях стержня (балки) наряду с изгибающим моментом  $M_x$  или  $M_y$  имеет место поперечная сила  $Q_y$  или  $Q_x$ , то нагружение называется ПОПЕРЕЧНЫМ ИЗГИБОМ.

СЛОЖНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ называется комбинация простых видов нагружения

Растяжение и кручение

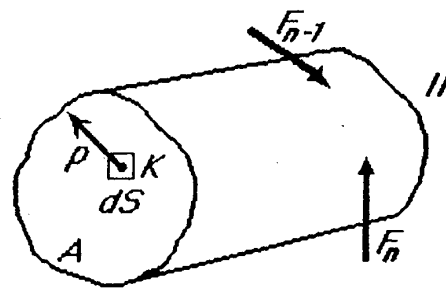
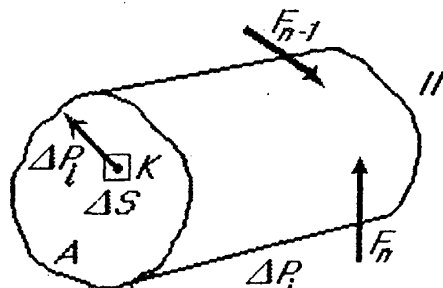


Растяжение, изгиб и кручение

ПОНЯТИЕ О НАПРЯЖЕНИИ

Внутренних силовых факторов, как таковых, в виде сосредоточенных сил и моментов в действительности не существует. Они являются равнодействующими системы внутренних сил, распределенных по сечению.

МЕРА ИНТЕНСИВНОСТИ ВНУТРЕННИХ, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ СИЛ НАЗЫВАЕТСЯ НАПРЯЖЕНИЕМ.



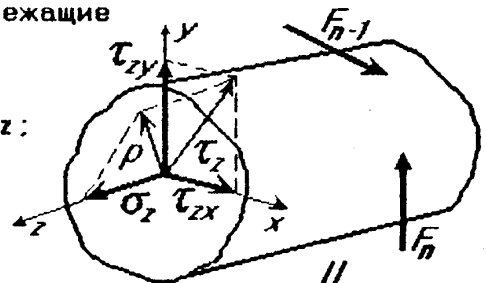
$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P_l}{\Delta S} = \rho - \text{полное напряжение в точке } K \text{ сечения } A \text{ (вектор)}. \text{ (Па)}$$

Спроецируем напряжение  $\rho$  на нормаль (на ось  $z$ ) и на плоскость сечения, а затем касательное напряжение  $\tau_z$  на оси  $x$  и  $y$ , лежащие в плоскости сечения:

$\sigma_z$  - нормальное напряжение, проекция  $\rho$  на ось  $z$ ;

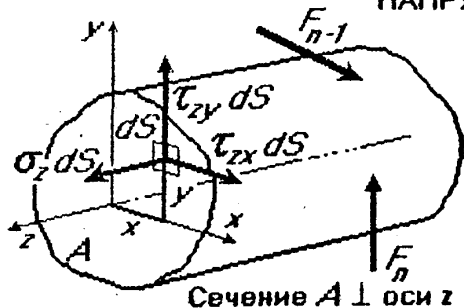
$\tau_z$  - касательное напряжение, проекция  $\rho$  на плоскость сечения;

$$\rho^2 = \sigma_z^2 + \tau_z^2 = \sigma_z^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2$$



Величины  $\rho$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_z$  зависят не только от положения точки  $K$  в теле, но и от направления сечения, проведенного через нее. Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через данную точку, характеризует напряженное состояние в ней.

СТАТИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ ПО СЕЧЕНИЮ



$$N = \int_S \sigma_z dS; \quad Q_x = \int_S \tau_{zx} dS; \quad Q_y = \int_S \tau_{zy} dS;$$

$$T = \int_S (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dS;$$

$$M_x = \int_S \sigma_z y dS; \quad M_y = \int_S \sigma_z x dS.$$

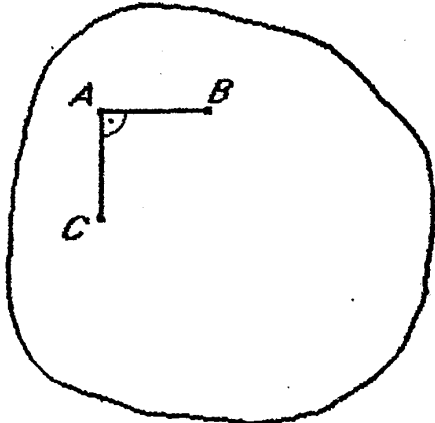
При известных напряжениях по приведенным формулам можно найти внутренние силовые факторы ( $N, Q_x, Q_y, T, M_x, M_y$ ).

По известным внутренним силовым факторам с помощью одних этих формул определить напряжения нельзя, то есть задача о распределении напряжений по сечению статически неопределима.

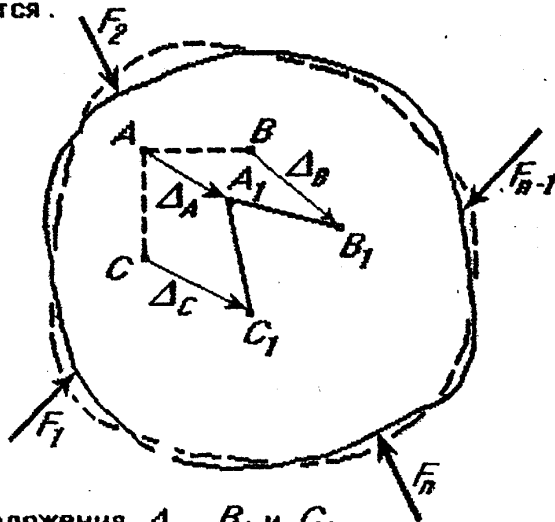
Напряжения по сечению должны быть распределены так, чтобы деформированные поверхности после совмещения отсеченных частей стержня в точности совпали. Это условие называется условием совместности деформаций.

**ПОНЯТИЕ О ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ**

Исходное состояние:



Под действием внешних нагрузок пластинка (тело) деформируется, форма и размеры изменяются.



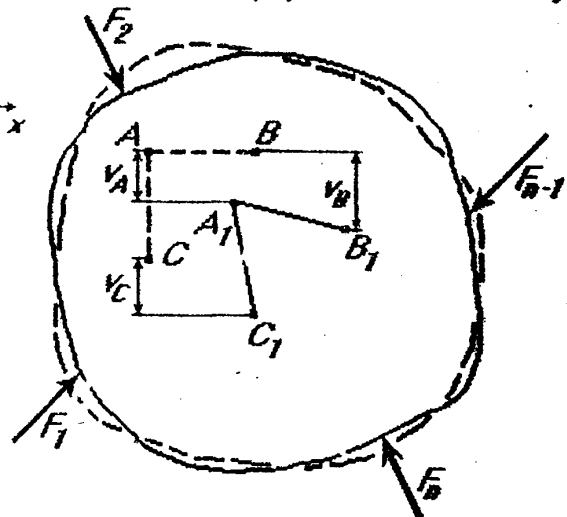
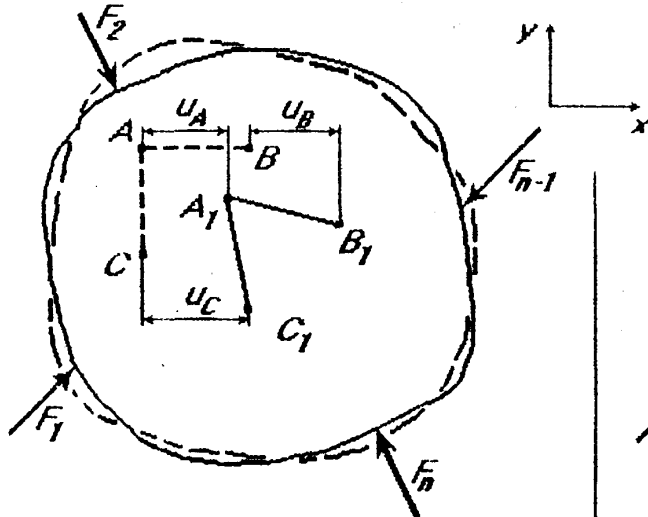
На боковой поверхности пластинки (тела) два малых перпендикулярных отрезка  $AB$  и  $AC$  до нагружения.

Точки  $A, B$  и  $C$  переместятся в новые положения  $A_1, B_1$  и  $C_1$ . Отрезки  $AA_1(\Delta_A), BB_1(\Delta_B)$  и  $CC_1(\Delta_C)$  называются **ПОЛНЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ** точек  $A, B$  и  $C$ .

Обозначим:  $\Delta_{AB} = A_1B_1 - AB$  и  $\Delta_{AC} = A_1C_1 - AC$  и будем называть **АБСОЛЮТНЫМИ УДЛИНЕНИЯМИ** отрезков  $AB$  и  $AC$ .

Интенсивность перемещения точки характеризуется **ДЕФОРМАЦИЯМИ**.

Перемещения и деформация вдоль оси  $x$ . Перемещения и деформация вдоль оси  $y$ .



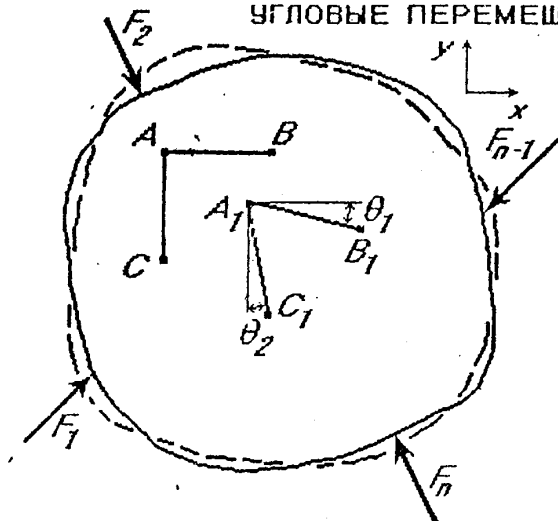
Отрезки  $u_A, u_B$  и  $u_C$  называются **перемещениями** точек  $A, B$  и  $C$  вдоль оси  $x$ .

$\lim_{AB \rightarrow 0} \frac{\Delta_{AB}}{AB} = \epsilon_x$  - линейная деформация (относительное удлинение) в точке  $A$  по направлению оси  $x$

Отрезки  $v_A, v_B$  и  $v_C$  называются **перемещениями** точек  $A, B$  и  $C$  вдоль оси  $y$ .

$\lim_{AC \rightarrow 0} \frac{\Delta_{AC}}{AC} = \epsilon_y$  - линейная деформация (относительное удлинение) в точке  $A$  по направлению оси  $y$ .

УГЛОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ



Величины  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  называются угловыми перемещениями отрезков  $AB$  и  $AC$ .

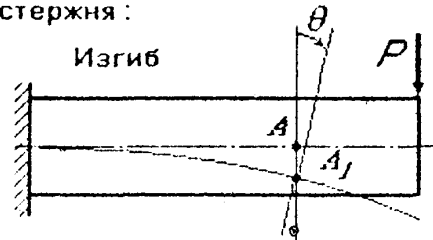
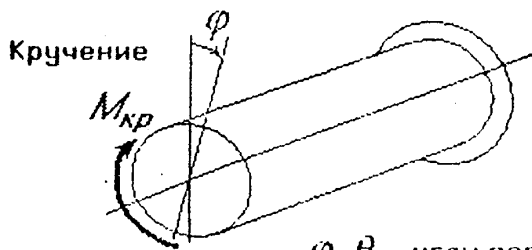
$$\lim_{\substack{AB \rightarrow 0 \\ AC \rightarrow 0}} (\angle B_1 A_1 C_1 - \angle BAC) = \gamma_{(BAC)} = \gamma_1 + \gamma_2$$

Сумма углов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  показывает насколько изменился в результате деформации прямой угол  $BAC$ .

$$\gamma_{(BAC)} = \gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 - \text{угловая деформация}$$

(относительный сдвиг или просто сдвиг) в точке  $A$  плоскости  $BAC$  или  $xOy$  (размерность - радиан).

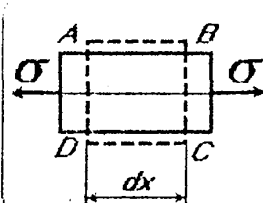
В сопротивлении материалов рассматриваются и перемещения системы точек, например, перемещения поперечного сечения стержня:



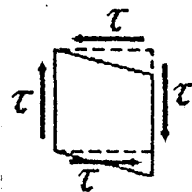
$\varphi, \theta$  - углы поворота сечения. (угловые перемещения)

СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

Вырежем бесконечно малый параллелепипед  $ABCD$  и рассмотрим его деформации при наличии нормальных и касательных напряжений



Если по граням  $AC$  и  $BD$  действуют напряжения  $\sigma$  размеры ребер изменяются, но углы между ними остаются прямыми



Касательные напряжения приводят к перекосу элемента. длина ребер не изменяется

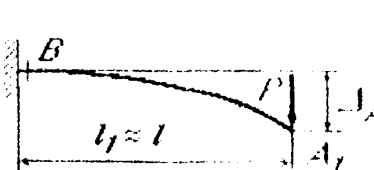
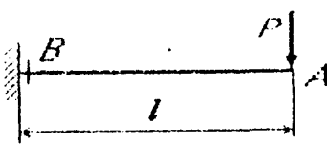
Линейные деформации  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  связаны с нормальными напряжениями  $\sigma$ , а сдвиг зависит от касательных напряжений  $\tau$

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

1. Допущения о малости деформаций и соответствующих перемещений  $\epsilon \ll 1, \gamma \ll 1$  (углы измеряются в радианах). Перемещения  $\Delta$  (линейные и угловые) - малы по сравнению с размерами стержня (тела).

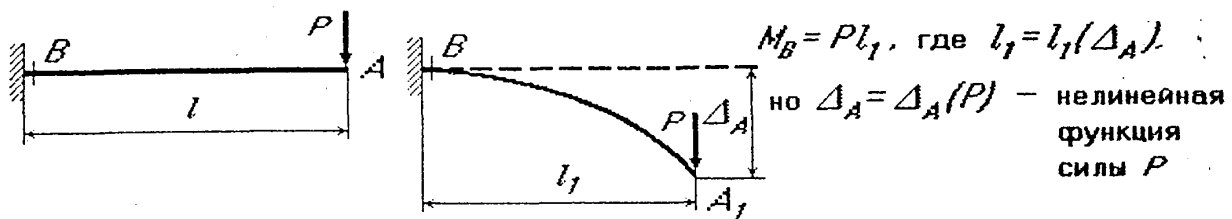
2. Принцип начальных размеров - при составлении условий равновесия (уравнений статики) стержень или его отсеченная часть рассматриваются в недеформированном виде (следствие допущения 1).

Линейная постановка задачи (жесткая конструкция).



$$\left. \begin{aligned} M_B &= Pl \\ -J_A &= \delta_A P \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{линейные} \\ \text{функции} \\ \text{силы } P \end{array}$$

## Расчет гибких конструкций - задача нелинейная



## ПРИНЦИП НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ (ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ)

Деформации и перемещения могут быть упругими - исчезающими после снятия нагрузок и пластическими - остаточными. Опыт показывает, что в пределах упругости малые перемещения пропорциональны внешним силам:

$$\Delta = \delta P; u = \delta_x P; v = \delta_y P; w = \delta_z P - (\text{закон Гука}).$$

Здесь  $\delta, \delta_x, \delta_y, \delta_z$  - коэффициенты пропорциональности.

Конструкции, для которых выполняется закон Гука, называются линейно-деформируемыми.



Для линейно-деформированных систем РЕЗУЛЬТАТ действия группы сил не зависит от ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ нагружения и равен СУММЕ результатов действия каждой силы в отдельности.

## ПЛАН РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Основная задача сформулирована так: известны геометрические размеры стержня и внешние силы, приложенные к нему. Стержень под действием указанных сил находится в равновесии. Необходимо установить:

1. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях - нормальные, касательные или те и другие?
2. Как они распределены по сечению?
3. Как величина напряжений зависит от размеров и формы стержня, а также от нагрузки на него?

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ДВА ЭТАПА.

Первый этап связан с получением системы уравнений, позволяющих ответить на поставленные вопросы.

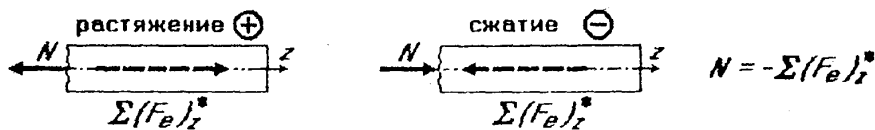
1. Статические уравнения, связывающие внутренние силовые факторы с внешней нагрузкой.
2. Геометрические уравнения, устанавливающие закон распределения деформаций в различных точках стержня. Для этого используют гипотезу плоских сечений (гипотезу Бернулли), т.е. считают, что поперечные сечения в процессе деформации стержня остаются плоскими.
3. Физические уравнения, связывающие напряжения и деформации. Закон Гука.

Второй этап - математический. Он связан с решением полученной системы уравнений относительно искомых неизвестных. Решение предполагает выразить напряжения в любой точке стержня через его геометрические размеры и внешнюю нагрузку, т.е. решение производится в общем виде.

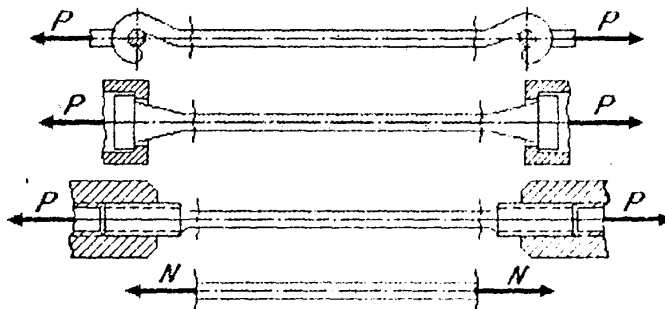


РАСТЯЖЕНИЕ - СЖАТИЕ

При растяжении или сжатии в поперечных сечениях стержня возникает только **нормальная сила  $N$** , а прочие внутренние силовые факторы равны нулю.



Нормальная сила, соответствующая деформации растяжения, принимается положительной и направлена от сечения, а сжатия отрицательной и направлена к сечению.

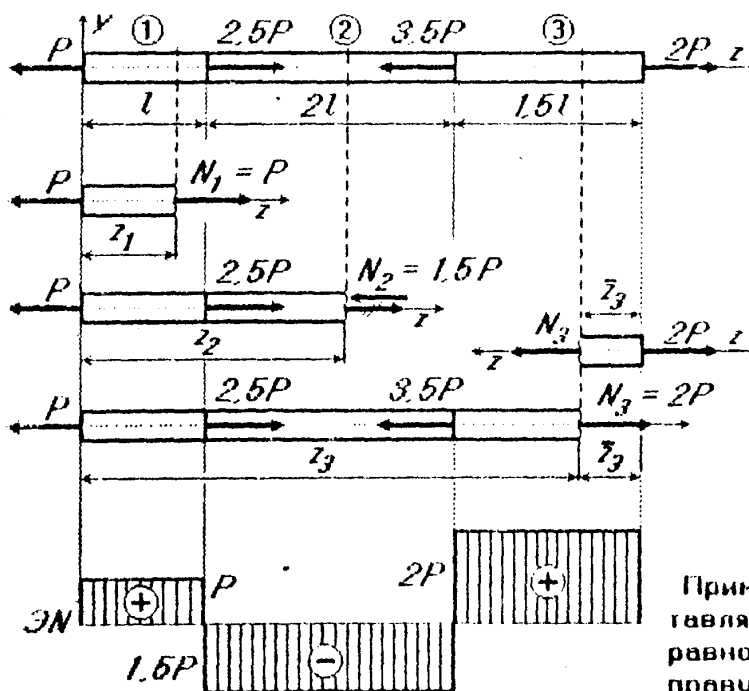


ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ НОРМАЛЬНЫХ СИЛ

График закона изменения нормальной силы по длине стержня называется **эпюрой нормальной силы  $ЭН$** .

Пример 1. Построение эпюры нормальной силы для стержня. Стержень под действием внешних сил находится в равновесии:

$$\sum Z = -P + 2.5P - 3.5P + 2P = 0;$$



Исходя из вида внешней нагрузки и геометрической схемы конструкции, разобьем стержень на три участка:

1-ый участок ① ( $0 \leq z_1 \leq l$ )

$$N_1 = P$$

2-ой участок ② ( $l \leq z_2 \leq 3l$ )

$$N_2 = P - 2.5P = -1.5P;$$

3-ий участок ③ ( $3l \leq z_3 \leq 4.5l$ )

$$N_3 = P - 2.5P + 3.5P = 2P;$$

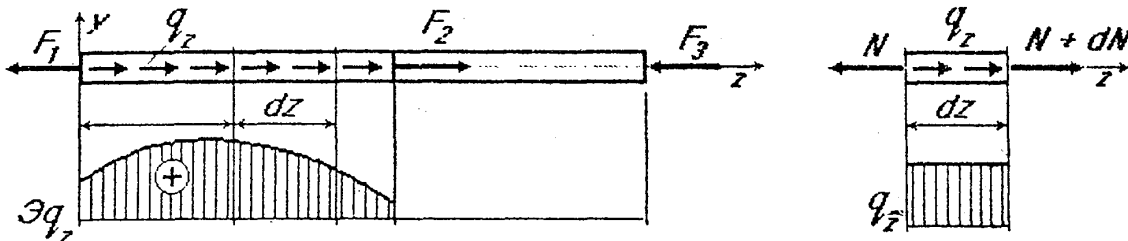
$$(0 \leq z_3 \leq 1.5l).$$

$$N_3 = 2P$$

Применяя метод сечений, можно составлять для рассмотрения условия равновесия левую и отбрасывать правую часть стержня, а можно и наоборот. На 3-ем участке удобнее рассматривать правую часть.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НОРМАЛЬНОЙ СИЛОЙ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ПРОДОЛЬНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ**

Стержень находится в равновесии под действием системы внешних сил, расположенных вдоль его оси.



Приведена эпюра интенсивности продольной распределенной нагрузки -  $\mathcal{E}q_z$

Выделенный бесконечно малый отрезок \$dz\$ находится в равновесии под действием распределенной нагрузки и нормальных сил, отличающихся на бесконечно малую величину \$dN\$.

$$\sum Z = -N + q_z dz + (N + dN) = 0 \rightarrow q_z = -\frac{dN}{dz}$$

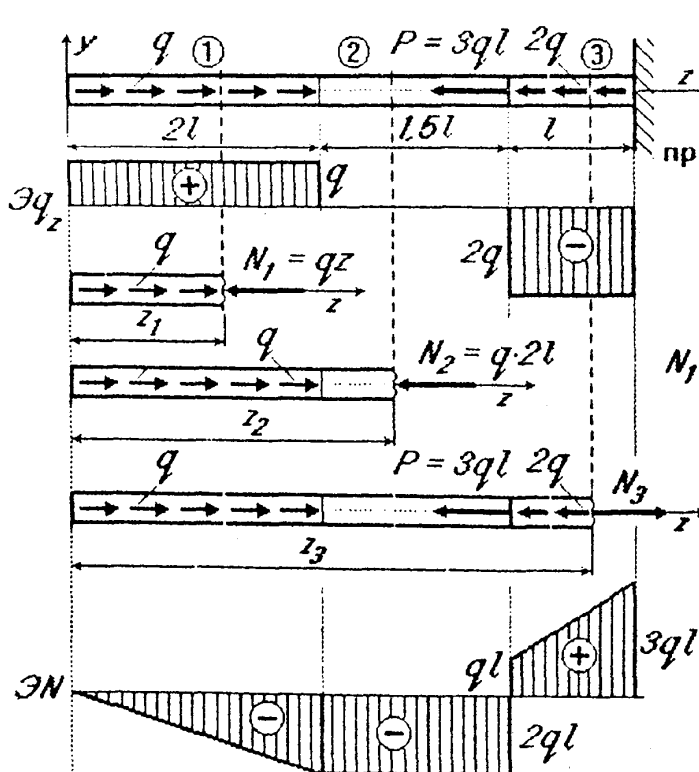
Интенсивность продольной распределенной нагрузки равна производной от нормальной силы по координате \$z\$, взятой с обратным знаком.

После интегрирования: 
$$N(z) = N(0) - \int_0^z q dz$$

Здесь \$N(0)\$ - постоянная интегрирования - значение нормальной силы в начале участка (при \$z = 0\$).

**Пример 2. Построение эпюры нормальной силы для стержня.**

Стержень под действием сосредоточенной силы и распределенных по длине продольных нагрузок находится в равновесии и испытывает растяжение или сжатие.



Разобьем стержень на три участка ①, ② и ③

Построена эпюра интенсивности продольной распределенной нагрузки.

$$q_z = -\frac{dN}{dz}$$

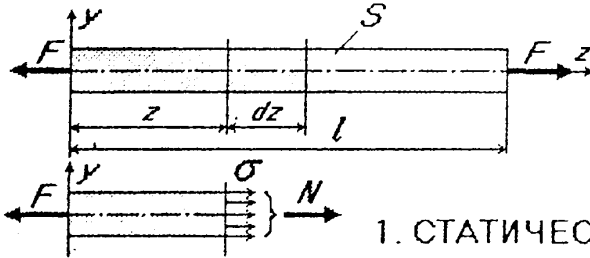
- 1-ый участок ① (0 ≤ z₁ ≤ 2l):  
 $N_1 = q \cdot z; N(0) = 0; N(2l) = q \cdot 2l$
- 2-ой участок ② (2l ≤ z₂ ≤ 3.5l):  
 $N_2 = q \cdot 2l$
- 3-ий участок ③ (3.5l ≤ z₃ ≤ 4.5l):  
 $N_3 = -q \cdot 2l + 3ql + 2q(z - 3.5l)$   
 $N_3(3.5l) = ql; N_3(4.5l) = 3ql$

## НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СТЕРЖНЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Одна из основных задач сопротивления материалов формулируется следующим образом: известны геометрические размеры стержня и внешние продольные силы, приложенные к нему.

Необходимо установить:

1. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях стержня?
2. Как они распределены по сечению?
3. Каким образом напряжения зависят от величины нормальной силы и геометрических размеров стержня?

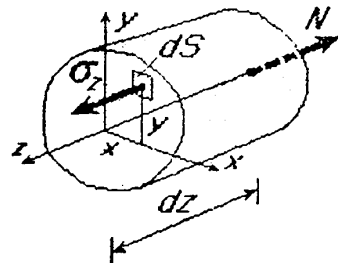


Дано:  
 $F, S, l, E$

Определить:  
 $\sigma = ?$   
 $\tau = ?$

### 1. СТАТИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

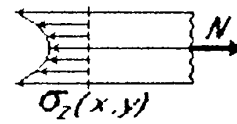
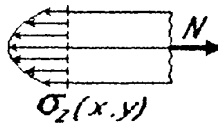
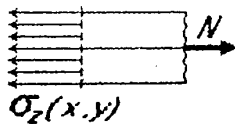
Рассмотрим равновесие части стержня длиной  $dz$ :



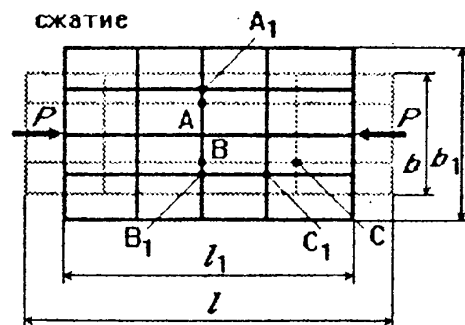
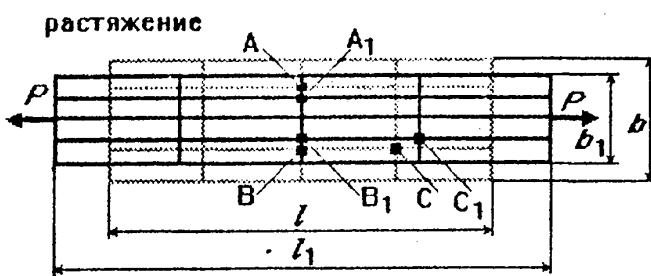
$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_z = 0;$$

$$(1) \begin{cases} \sum Z = 0, & N = \int_S \sigma_z dS; \\ \sum M_x = 0, & \int_S \sigma_z y dS = 0; \\ \sum M_y = 0, & \int_S \sigma_z x dS = 0. \end{cases}$$

Из условий равновесия (1) нельзя найти  $\sigma_z = \sigma_z(x, y)$ , так как выражения (1) могут быть удовлетворены при разных законах изменения  $\sigma_z$  от  $x$  и  $y$ :



### 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ



Принятые предпосылки:

- 1) поперечные сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений - гипотеза Бернулли);
- 2) продольные волокна остаются перпендикулярными к поперечным сечениям;
- 3) ось стержня не искривляется.

Из принятых предпосылок следует, что все продольные волокна BC удлиняются при растяжении или укорачиваются при сжатии на одну и ту же величину, то есть  $\epsilon_z = \epsilon(x, y) = \text{const} (2)$ , прямой угол ABC не изменился и деформации сдвига между продольными и поперечными волокнами отсутствуют:  $\gamma_{xy} = 0 (2)$ .

### 3. ФИЗИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Для решения статических уравнений используем зависимость между напряжениями и деформациями (в пределах упругости - закон Гука):

$$\sigma_z = E \epsilon_z \text{ и } \tau_{zy} = G \gamma_{zy} \quad (3) \text{ - (закон Гука справедлив для большинства материалов):}$$

$E = E(x, y) = const$  и  $G = G(x, y) = const$  - физические константы материала.

$E$  - модуль продольной упругости (или модуль Юнга);  $G$  - модуль сдвига.

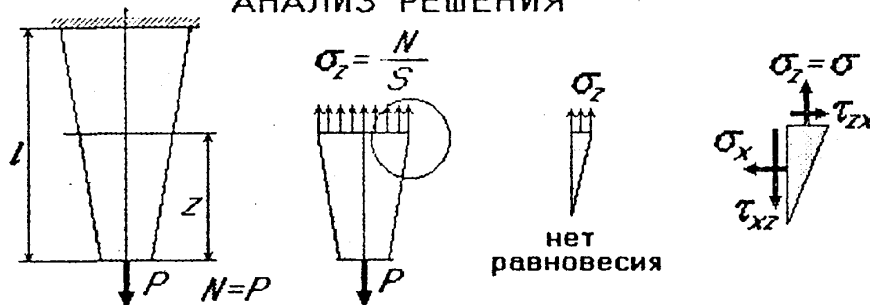
#### РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ:

Для получения ответов на поставленные вопросы необходимо решить систему уравнений (1)...(3) трех сторон задачи. Из этих уравнений следует:

$$\tau_{zy} = 0 \text{ и } \sigma_z = \sigma_z(x, y) = const: N = \int_S \sigma_z dS = \sigma_z \int_S dS = \sigma_z S \text{ откуда: } \sigma_z = \frac{N}{S} \quad (1)$$

$$\sigma_z \int_S y dS = 0; \sigma_z \int_S x dS = 0; \int_S y dS = \int_S x dS = 0 \text{ - условия, при которых ось } z \text{ проходит через центр тяжести сечения.}$$

#### АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

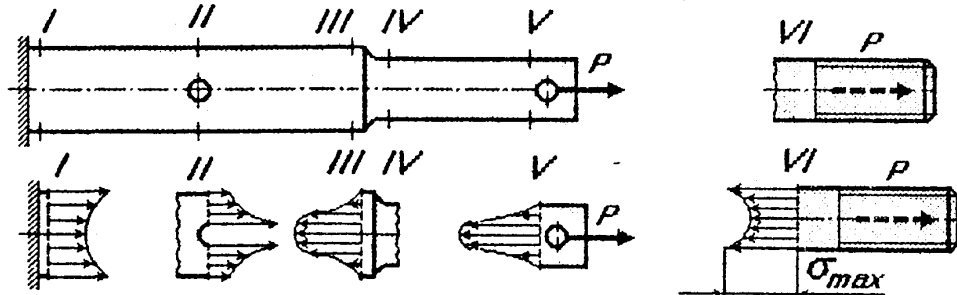


- а) Приближенность формулы. Под действием  $\tau$  поперечные сечения искривляются и закон  $\sigma = const$  нарушается:  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ;  $\sigma_x \ll \sigma_z = \sigma$ . Поэтому для стержня  $l/a = 5 \dots 10$  считают с достаточной точностью:

$$\sigma_z = \sigma_z(z, x, y) = \sigma_z = \frac{N}{S}$$

- б) Пределы применимости. Условия (1) и (2) справедливы для любого сплошного материала. Для однородного материала ( $E = const$ ) формула  $\sigma_z = N/S$  справедлива при любом соотношении между  $\sigma$  и  $\epsilon$  (например  $\sigma = E \epsilon^n$ ), как в пределах упругости, так и за пределами упругости.

#### ПОНЯТИЕ О МЕСТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ. ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА

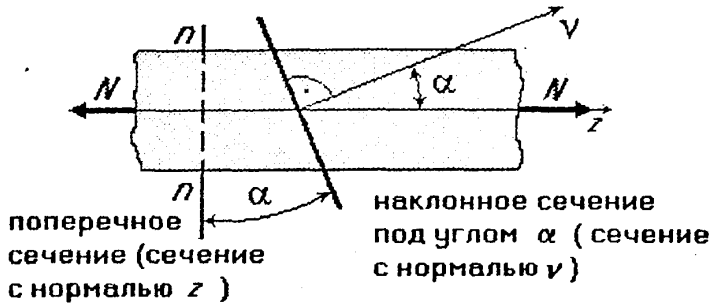


Сечения I - VI - области концентрации напряжений (местные напряжения).

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}} \text{ - характеристика концентрации напряжений, где } \sigma_{ном} = \frac{N}{S}$$

Принцип Сен-Венана: в сечениях стержня, расположенных от места передачи нагрузки или от мест концентрации напряжений на расстояниях, превышающих характерные размеры поперечного сечения, распределение напряжений зависит только от статического эквивалента сил ( $N$ ), а не от способа передачи нагрузки.

НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ



Постановка задачи :

Дано :

$N, S$

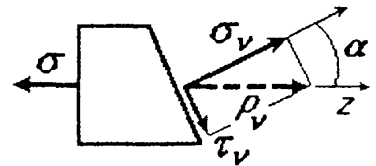
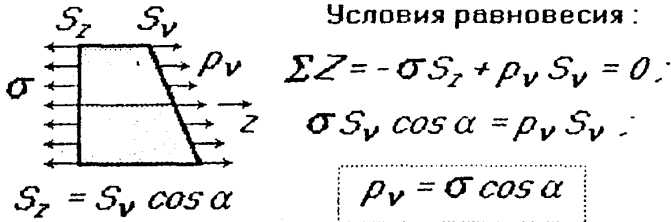
$\sigma_z = \sigma = \frac{N}{S}$

$\tau_{zy} = 0$

$\sigma_y = ? \tau_y = ?$

Напряжения в наклонном сечении с нормалью y определяются с помощью метода сечений и условий равновесия - задача статически определима :

Условия равновесия :



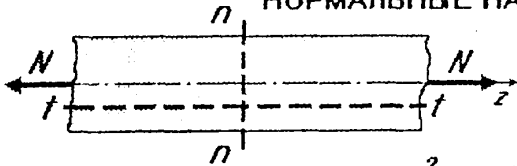
Правило знаков для  $\tau$  :



$\begin{cases} \sigma_y = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_y = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \end{cases} \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$

Эти выражения определяют при растяжении (сжатии) напряженное состояние - совокупность напряжений во всех площадках, проведенных через данную точку тела.

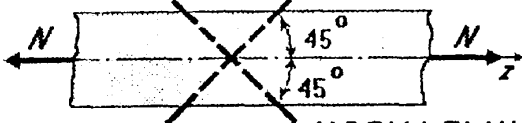
ПРОСТЕЙШИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ :



$\begin{cases} \sigma_y = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_y = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \end{cases} \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$

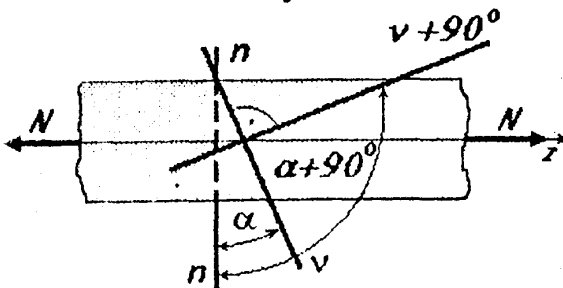
- 1)  $\max \sigma_y = \sigma_z = \sigma$  при  $\cos^2 \alpha = 1 \alpha = 0$  (в поперечных сечениях n-n с нормалью z)
- 2) В продольных сечениях t-t ( $\alpha = 90^\circ$ )  $\sigma = 0$  (продольные волокна друг на друга не давят).

КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ :



- 3)  $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma$  при  $\sin 2\alpha = 1, \alpha = 45^\circ$  в площадках (сечениях), наклоненных под углом  $\alpha = 45^\circ$  к оси стержня.

НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ  
ВО ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПЛОЩАДКАХ



$\sigma_y = \sigma \cos^2 \alpha$

$\sigma_{y+90^\circ} = \sigma \cos^2(\alpha + 90^\circ) = \sigma \sin^2 \alpha$

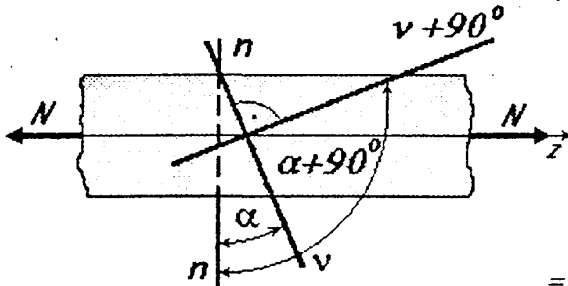
$+ \sigma_y = \sigma \cos^2 \alpha$

$\sigma_{y+90^\circ} = \sigma \sin^2 \alpha$

---

$\sigma_y + \sigma_{y+90^\circ} = \sigma = \text{const}$

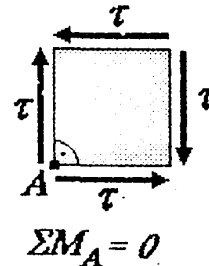
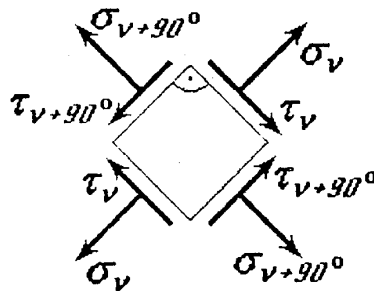
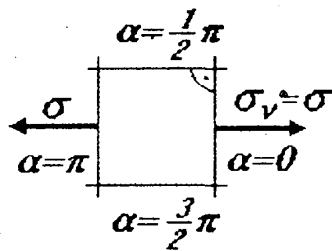
**НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ  
ВО ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПЛОЩАДКАХ**



$$\begin{cases} \sigma_v = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_v = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \end{cases} \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \tau_v &= \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \\ \tau_{v+90^\circ} &= \frac{1}{2} \sigma \sin 2(\alpha + 90^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \sigma \sin(2\alpha + 180^\circ) = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \end{aligned}$$

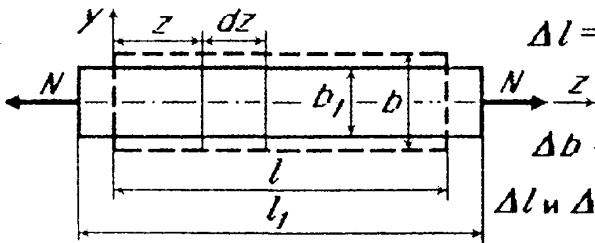
$\tau_{v+90^\circ} = -\tau_v$  - закон парности (взаимности) касательных напряжений.



Касательные напряжения во взаимно - перпендикулярных площадках (сечениях) равны по величине и направлены либо к общему ребру элемента, либо от ребра - следствие условий равновесия.

**ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ**

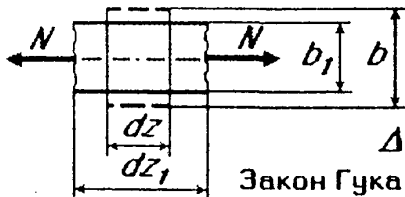
Участок стержня длиной  $l$  и шириною  $b$  до нагружения:



$\Delta l = l_1 - l$  - абсолютное удлинение стержня;

$\Delta b = b_1 - b$  - абсолютное поперечное сужение стержня;

$\Delta l$  и  $\Delta b$  - имеют размерность длины [мм, см и т.д.]



$\Delta(dz) = dz_1 - dz$   
 $\epsilon_z = \epsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz} \cdot 100\%$  - относительное удлинение (деформация).

$\Delta(dz) = \epsilon dz$

Закон Гука при растяжении (сжатии):  $\sigma = E\epsilon$ ;  $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$   
 $E$  - модуль упругости I рода (модуль Юнга)

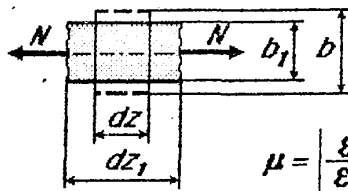
$E$  (Па, МПа) - напряжение, при котором  $\epsilon = 1$ , стержень удлиняется вдвое. Такие напряжения материал не выдерживает - раньше происходит разрушение или нарушение закона Гука.

$\Delta(dz) = \epsilon dz = \frac{\sigma}{E} dz = \frac{N}{ES} dz$ ;  $ES$  - жесткость сечения стержня при растяжении (сжатии);

$\Delta l = l_1 - l = \int_0^l \Delta(dz) = \int_0^l \frac{N dz}{ES}$ ; Однородные (равномерные) деформации:

$\epsilon_z = \frac{\Delta l}{l}$ ;  $N = N(z) = const$ ;  $ES = ES(z) = const$ ;  $\Delta l = \frac{Nl}{ES}$  - закон Гука в усилиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СУЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ



$$\Delta b = b_1 - b = -(b - b_1)$$

$$\epsilon' = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b - b_1}{b} \text{ - поперечная деформация;}$$

$$\epsilon' = -\mu \epsilon \quad \Delta b = \epsilon' b = -\mu \epsilon b$$

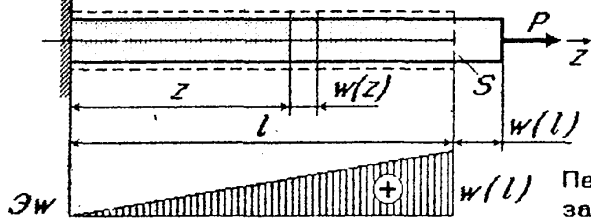
$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| \text{ - коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона);}$$

$\mu = 0.25$  - идеально упругий материал;

$\mu = 0.5$  - идеально пластический материал;

$\mu = (0.25 \dots 0.35)$  - реальные материалы.

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ



Дано:

$$l, S, E, P$$

$$w = ?$$

$$w(z) = \Delta l(z) = \frac{Nz}{ES} = \frac{Pz}{ES}$$

$w(l)$  - Перемещение сечения, отстоящего от закрепленного конца на расстоянии  $z$ , равно удлинению левой части стержня (длиною  $z$ ).

$$w(l) = \Delta l = \frac{Nl}{ES} = \frac{Pl}{ES}$$

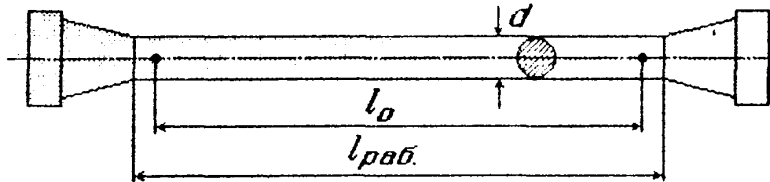
В общем случае:

$$w(z) = w(0) + \int_0^z \epsilon dz = \int_0^z \frac{\sigma}{E} dz = \int_0^z \frac{N}{ES} dz, \text{ где } w(0) \text{ - перемещение в начале координат.}$$

СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

1. ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА РАСТЯЖЕНИЕ

а) образцы



$d = (5 \dots 10) \text{ мм}$  - диаметр образца с круглым поперечным сечением;

$d = 10 \text{ мм}$  - нормальный образец;

$l_0 = 10d$  - десятикратный образец;

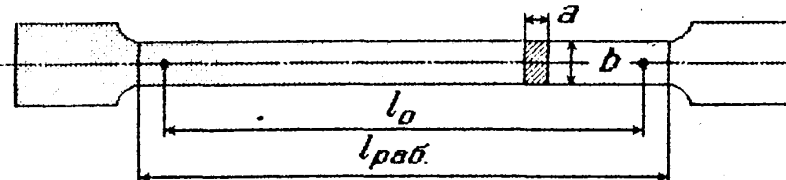
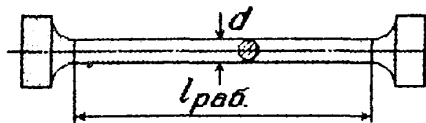
$l_0 = 15d$  - пятнадцатикратный образец;

$l_0 = 5d$  - пятикратный образец;

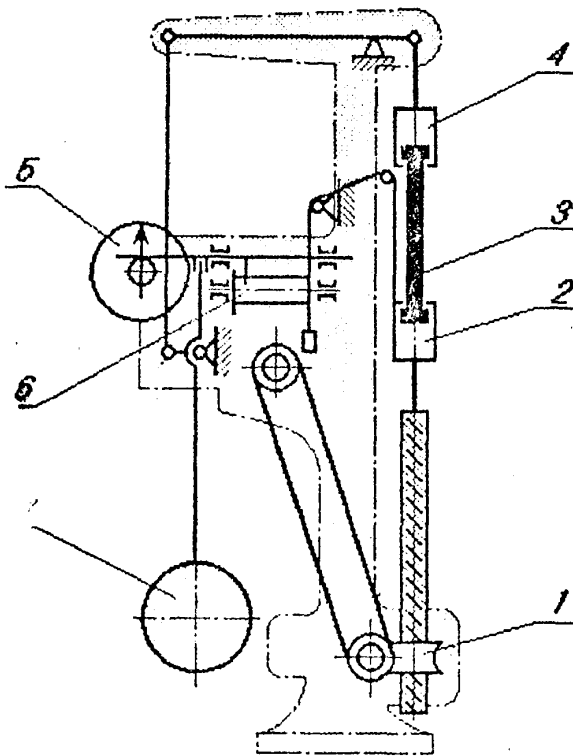
Прямоугольное сечение образца ( $a \times b$ )

$$l_0 = 11.3\sqrt{S} = 11.3\sqrt{ab}$$

$$l_0 = 5.65\sqrt{S} = 5.65\sqrt{ab}$$

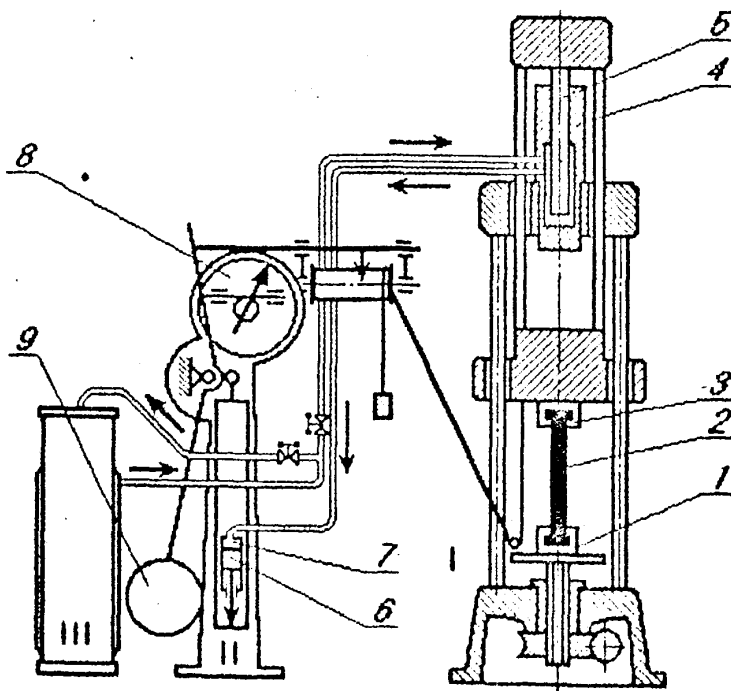


**СХЕМА МАШИНЫ С МЕХАНИЧЕСКИМ ПРИВОДОМ  
И С РЫЧАЖНО-МАЯТНИКОВЫМ СИЛОВЫМ ИЗМЕРИТЕЛЕМ**



- 1 - червячная передача;
- 2, 4 - захваты;
- 3 - образец;
- 5 - циферблат силоизмерителя;
- 6 - диаграммный аппарат;
- 7 - маятник силоизмерителя.

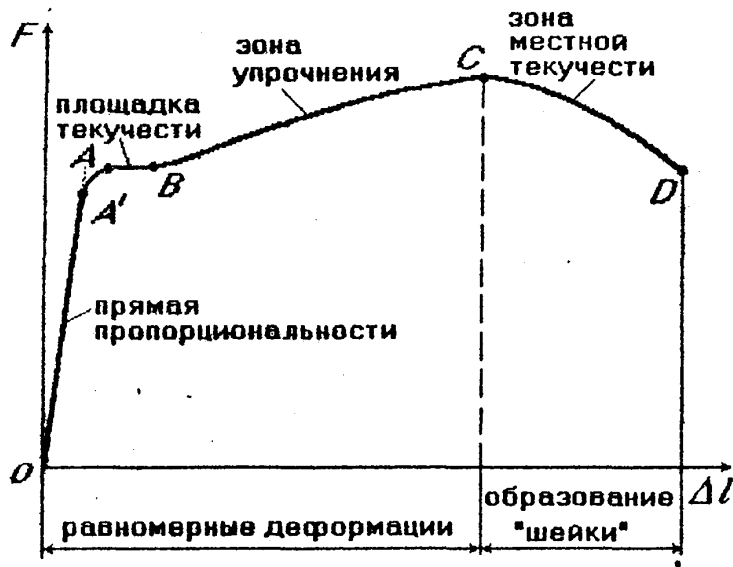
**СХЕМА УНИВЕРСАЛЬНОЙ МАШИНЫ  
С ГИДРАВЛИЧЕСКИМ ПРИВОДОМ И СИЛОИЗМЕРИТЕЛЕМ**



- I - пресс;
- II - силоизмеритель;
- III - насосная станция;
- 1, 3 - захваты;
- 2 - образец;
- 4 - рабочий цилиндр;
- 5 - поршень;
- 6 - поршень силоизмерителя;
- 7 - цилиндр силоизмерителя;
- 8 - диаграммный аппарат;
- 9 - маятник силоизмерителя.



**ХАРАКТЕРНЫЕ ЗОНЫ  
ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ ОБРАЗЦА ИЗ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ**



*OA'* - зона упругости (прямая пропорциональности)

$$\Delta l = \frac{Pl_0}{ES_0}$$

*AB* - зона общей текучести (площадка текучести):

*BC* - зона упрочнения:

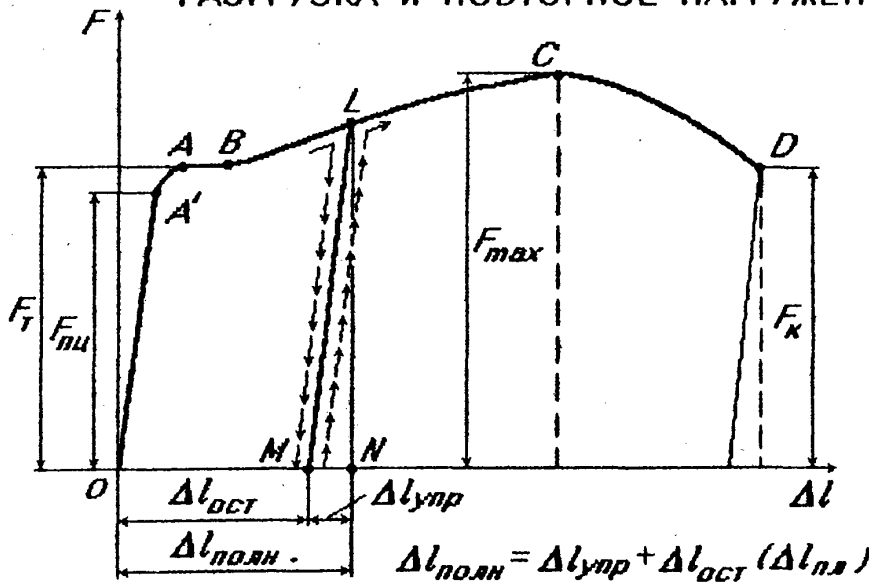
*OABC* - равномерные деформации:

*CD* - зона местной текучести (образование "шейки")



$S_k$  - площадь поперечного сечения шейки после разрушения

**НАГРУЗКИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ МЕХАНИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ  
РАЗГРУЗКА И ПОВТОРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ**



$F_{пл}$  - нагрузка, соответствующая пределу пропорциональности:

$F_T$  - нагрузка, соответствующая пределу текучести:

$F_{max}$  - максимальная нагрузка, которую способен выдержать образец:

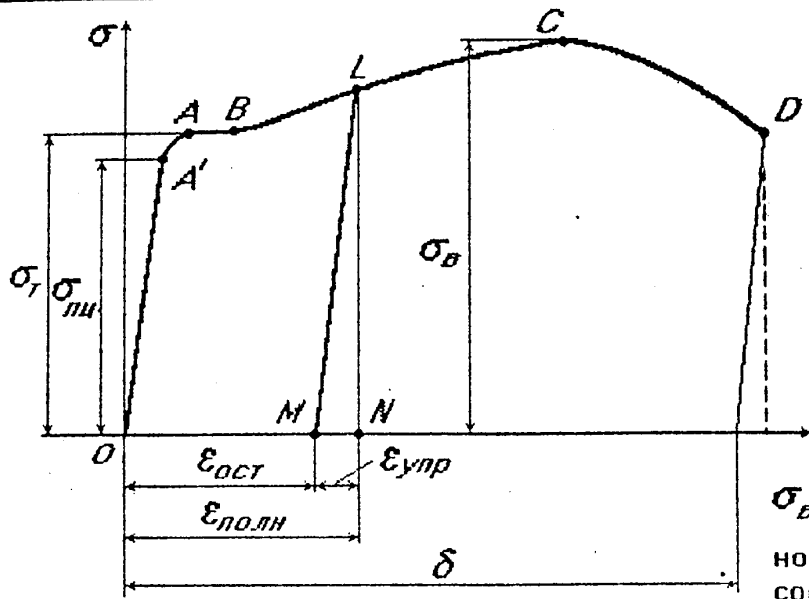
$F_K$  - нагрузка при разрыве образца.

**ДИАГРАММА УСЛОВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ**

$$\sigma = \frac{F}{S_0}; \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$S_0$  - начальная площадь поперечного сечения образца;

$l_0$  - начальная длина расчетной части образца



$\sigma_{пл} = \frac{F_{пл}}{S_0}$  - предел пропорциональности - наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука.

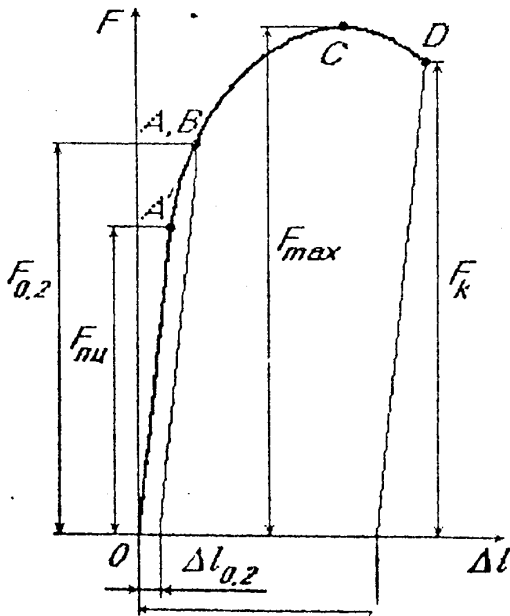
$\sigma_T = \frac{F_T}{S_0}$  - физический предел текучести - напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки.

$\sigma_B = \frac{F_{max}}{S_0}$  - временное сопротивление (предел прочности) - условное напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке и предшествующее разрушению образца.

$\sigma_f = \frac{F_k}{S_k}$  - истинное сопротивление разрыву - напряжение, определяемое отношением нагрузки в момент разрыва к площади поперечного сечения в месте разрыва (площади шейки).

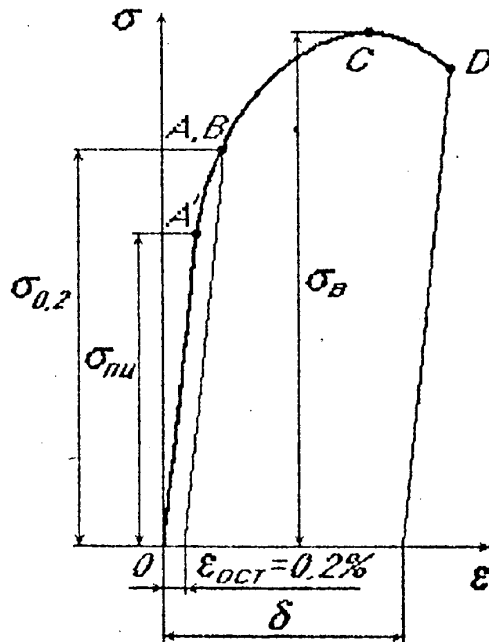
$$\epsilon_{полн} = \epsilon_{упр} + \epsilon_{ост} \text{ (}\epsilon_{пласт}\text{)}$$

ДИАГРАММА РАСТЯЖЕНИЯ ОБРАЗЦА ИЗ ПЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА (чистые металлы, конструкционные стали и сплавы)



$F_{0.2}$  - нагрузка, соответствующая условному пределу текучести

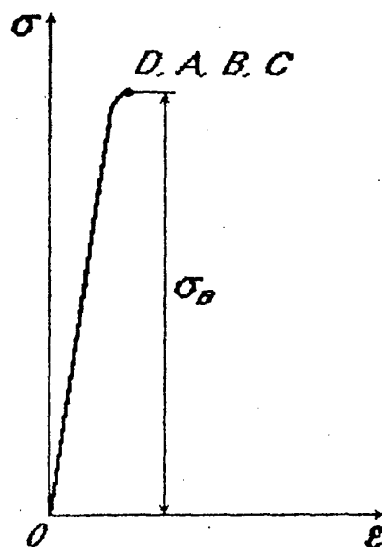
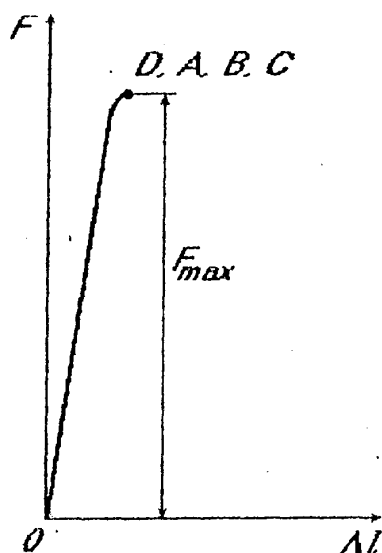
ДИАГРАММА УСЛОВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ



$\sigma_{0.2} = \frac{F_{0.2}}{S_0}$  - условный предел текучести напряжение, при котором пластическая деформация (относительное остаточное удлинение) достигает 0.2%

ДИАГРАММА РАСТЯЖЕНИЯ ОБРАЗЦА  
ИЗ ХРУПКОГО МАТЕРИАЛА

(инструментальные закаленные стали, серые и белые чугуны, камень, кирпич, бетон, керамика, некоторые пластмассы и др.)



МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛА

1.  $\sigma_{пл} = \frac{F_{пл}}{S_0}$  - предел пропорциональности;
2.  $\sigma_T = \frac{F_T}{S_0}$  или  $\sigma_{0.2} = \frac{F_{0.2}}{S_0}$  - предел текучести;
3.  $\sigma_B = \frac{F_{max}}{S_0}$  - временное сопротивление (предел прочности);
4.  $\sigma_f = \frac{F_k}{S_k}$  - истинное сопротивление разрыву.



$\sigma_f > \sigma_B$  - всегда у пластичных материалов;

$\sigma_f \approx \sigma_B$  - для хрупких материалов

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЧНОСТИ

$\sigma_T (\sigma_{0.2})$

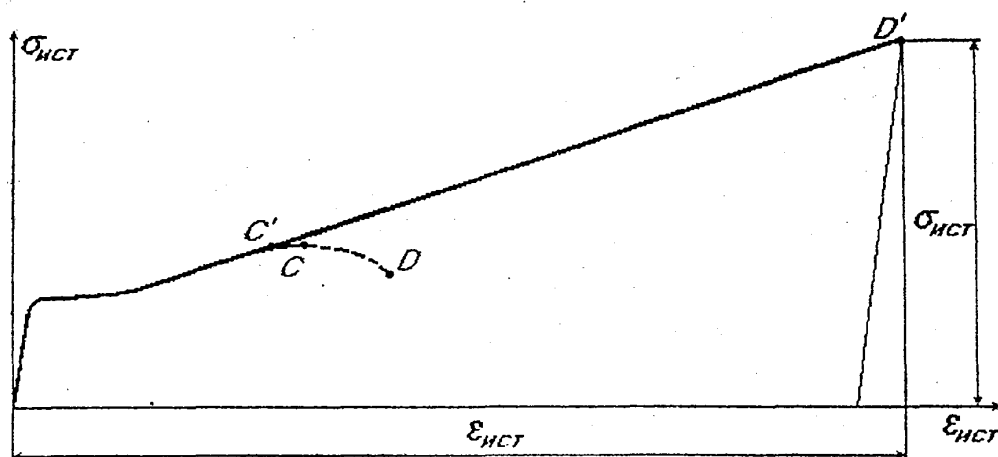
сопротивляемость материала малым пластическим деформациям

и

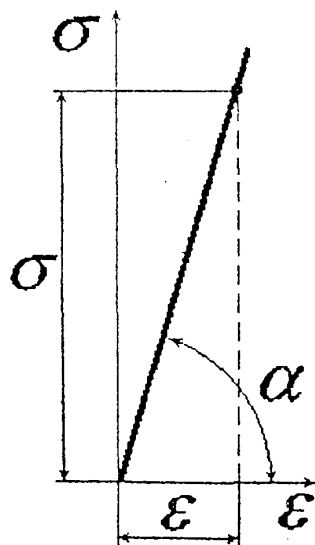
$\sigma_B$

предельное сопротивление равномерным деформациям

## ДИАГРАММА ИСТИННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ



$$\sigma_{ист} = \frac{F}{S(F)}; \quad \epsilon_{ист} = \frac{S_0}{S} - 1; \quad \sigma_f = \frac{F_k}{S_k} = \sigma_{ист}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ  
УПРУГОСТИ

$$m \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E$$

$m$  - масштаб по оси  $\sigma$

$E$  и  $\mu$  - определяются при специальных испытаниях

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАСТИЧНОСТИ

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} 100\% \text{ - относительное остаточное удлинение при разрыве;}$$

$$\psi = \frac{S_k - S_0}{S_0} 100\% \text{ - относительное сужение площади после разрыва;}$$

$\delta > 10\%$  - пластичные материалы;

$\delta < 3\%$  - хрупкие материалы.

Малоуглеродистая сталь:  $\delta_{10} = 40\%$ ;  $\psi = 50\%$ .

Серый чугун:  $\delta_{10} = 0.6\%$ .

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЯЗКОСТИ

$$a = \frac{A}{V_0} \text{ - удельная работа деформации (статическая вязкость материала);}$$

$A$  - работа, затраченная на разрушение образца;

$$V_0 = S_0 l_0 \text{ - начальный объем расчетной части образца.}$$

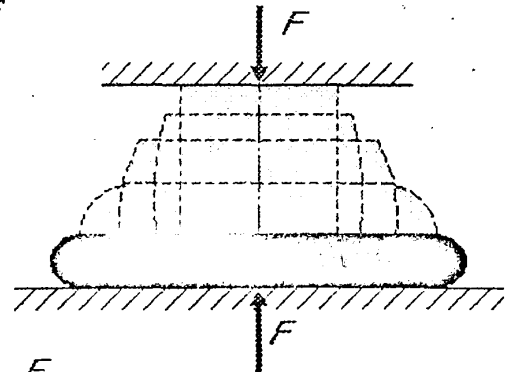
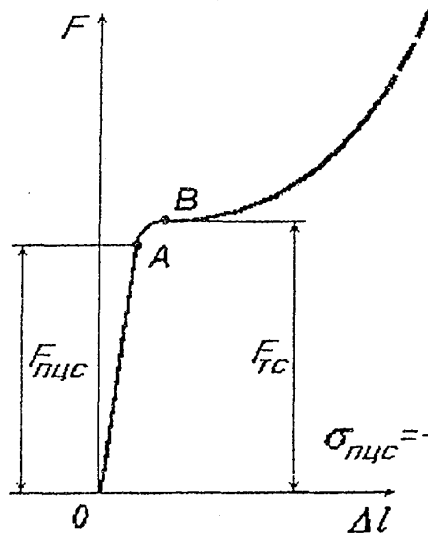
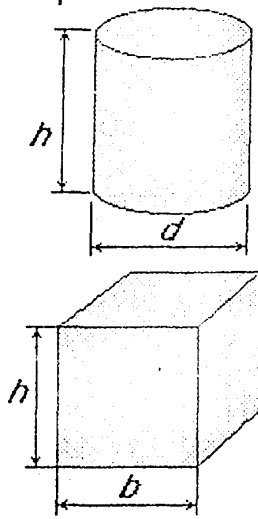
$\Delta l$

$$A = \int_0^{\Delta l} F d(\Delta l) \text{ - пропорциональна площади диаграммы растяжения.}$$

СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

2. Испытание материалов на сжатие

Испытание на сжатие является основным видом испытания для хрупких материалов  
Образцы: ПЛАСТИЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ



$$\sigma_{плцс} = \frac{F_{плцс}}{S_0} \text{ - предел пропорциональности при сжатии;}$$

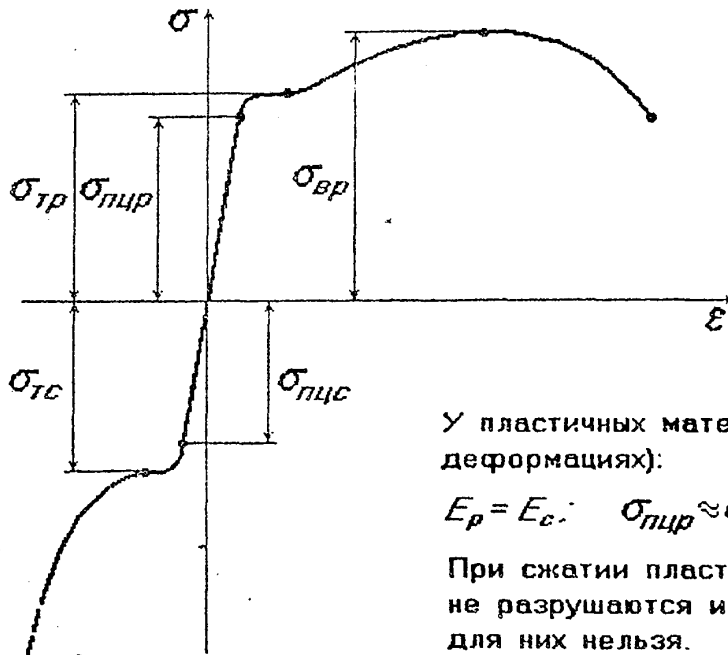
$$\frac{h}{d} \leq 2; \quad \frac{h}{b} \leq 2$$

$$\sigma_{тс} = \frac{F_{тс}}{S_0} \text{ - предел текучести при сжатии}$$

Механические характеристики при сжатии сохраняют те же определения, что и при растяжении.

ПЛАСТИЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Пластичные материалы одинаково работают при растяжении и сжатии.



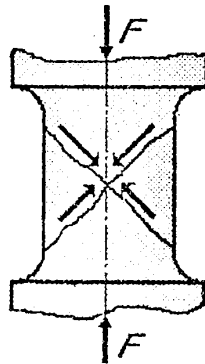
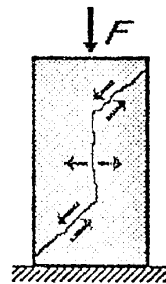
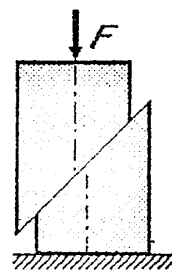
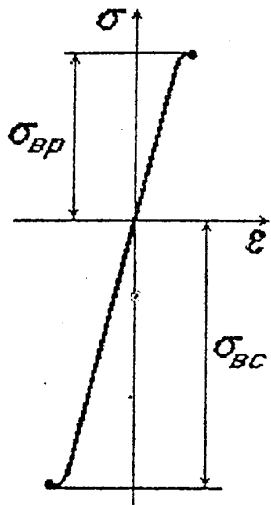
У пластичных материалов (при малых деформациях):

$$E_p = E_c; \quad \sigma_{плцр} \approx \sigma_{плцс}; \quad \sigma_{тр} \approx \sigma_{тс}$$

При сжатии пластичные материалы не разрушаются и определить  $\sigma_{вс}$  для них нельзя.

### ХРУПКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Разрушение путем среза (сдвига)



$$\sigma_{vc} > \sigma_{vr}$$

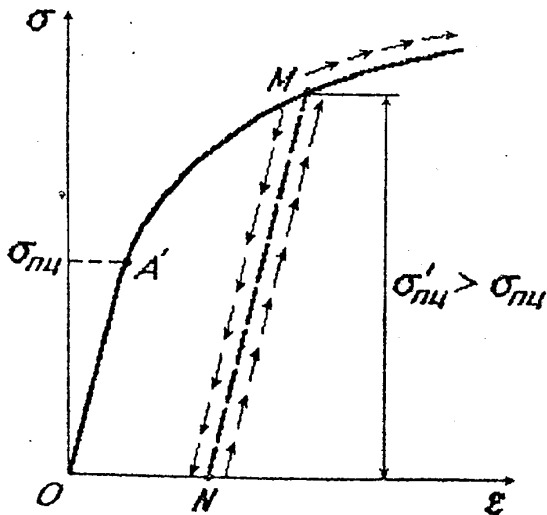
$$E_c \approx E_p$$

$$k = \frac{\sigma_{vr}}{\sigma_{vc}}$$

$k = 0.2 \dots 0.4$  - чугун;

$k = 0.1 \dots 0.2$  - керамика.

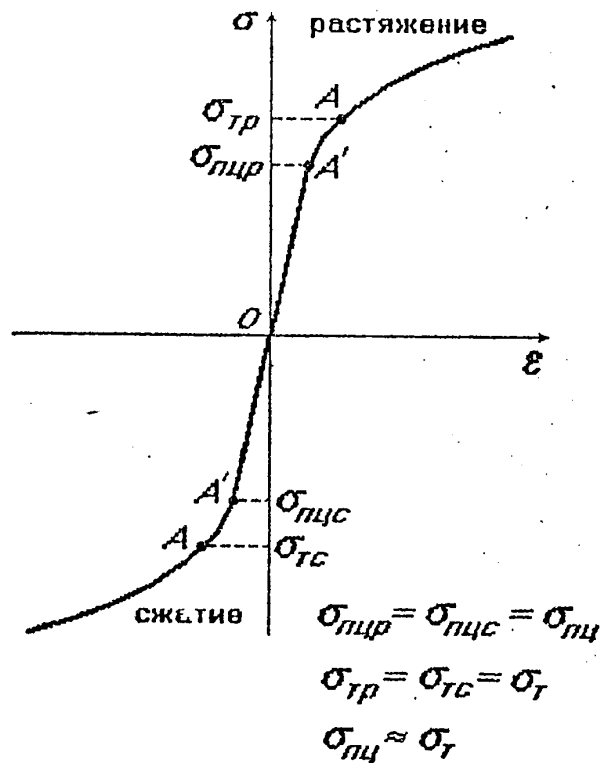
**ЗАКОН РАЗГРУЗКИ И ПОВТОРНОГО НАГРУЖЕНИЯ. НАКЛЕП.**  
(пластичный материал)



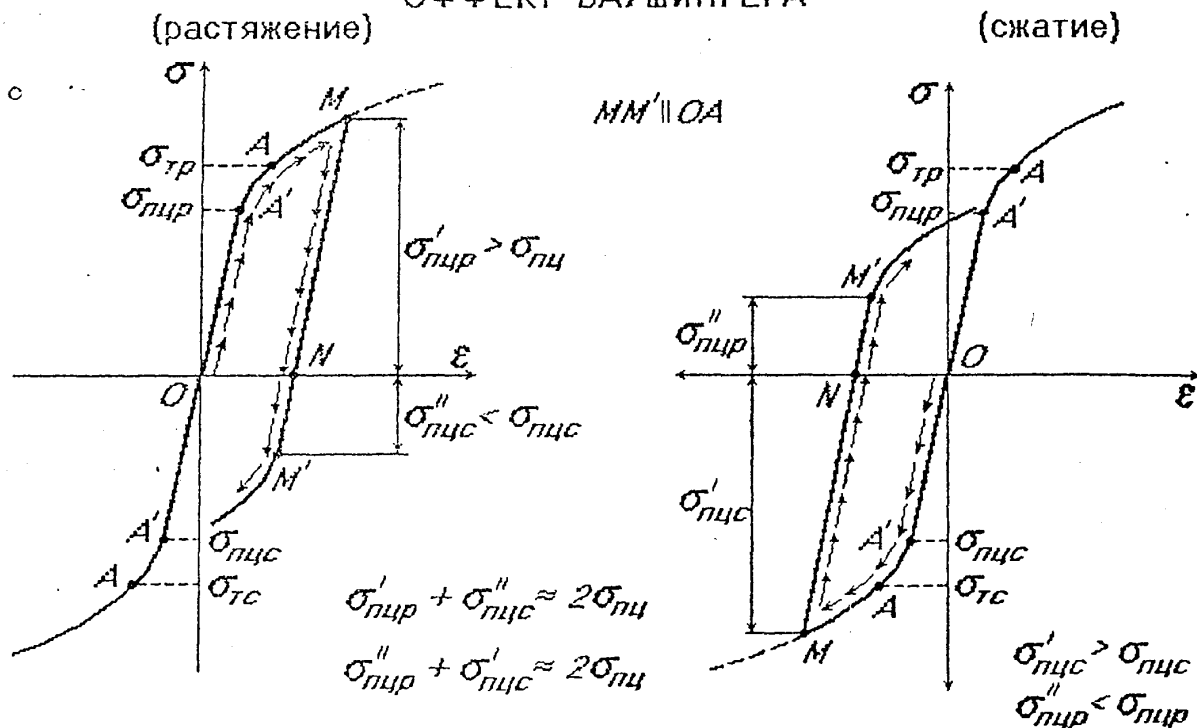
**ЗАКОН РАЗГРУЗКИ** - разгрузка всегда упругая  
(закон Гука -  $MN \parallel OA'$ )

**НАКЛЕП** - повышение  $\sigma_{плц}$  и снижение  $\delta$  в результате предварительной пластической деформации того же знака.

**ДИАГРАММЫ ОДНОКРАТНОГО НАГРУЖЕНИЯ**  
(пластичный материал)



ЭФФЕКТ БАУШИНГЕРА

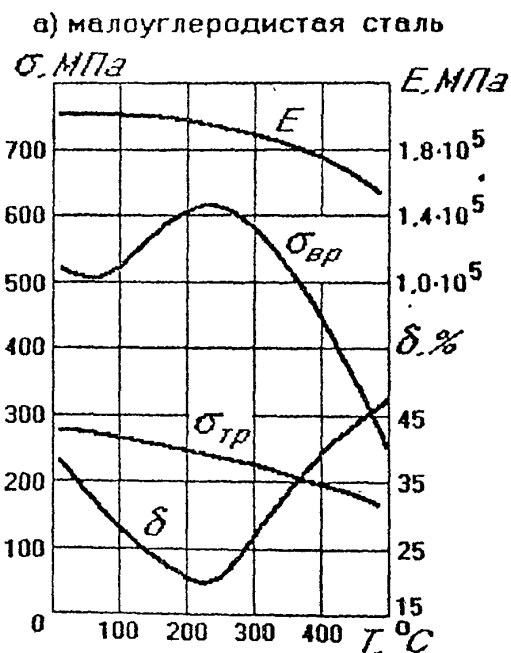
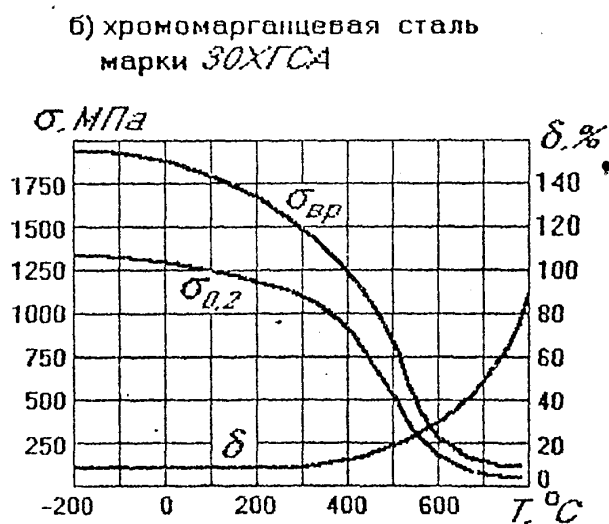


Эффект Баушингера - снижение  $\sigma_{пц}$  в результате предварительной пластической деформации обратного знака.

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ УСЛОВИЙ  
НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

1. Температура ( $T$ ).
2. Время ( $t$ ) действия нагрузок.
3. Скорость нагружения (деформирования).
4. Окружающая среда.
5. Технология изготовления материалов.
6. Радиация и т.д.

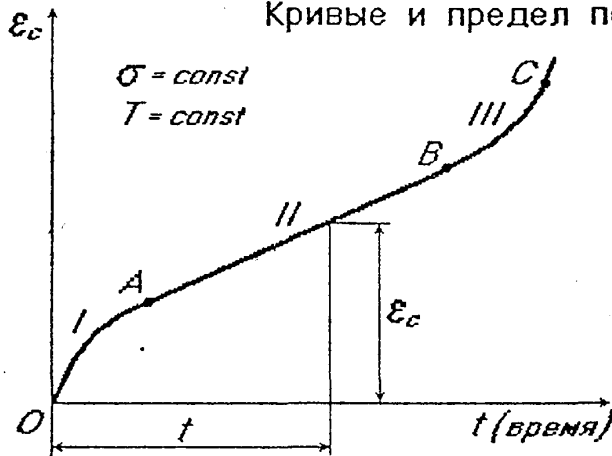
Влияние температуры:



ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ УСЛОВИЙ  
НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

Влияние фактора времени:

Кривые и предел ползучести



Предел ползучести - напряжение, при котором деформация ползучести за определенный промежуток времени достигает заданной величины.

Никелевый жаропрочный сплав ХН77ТЮР

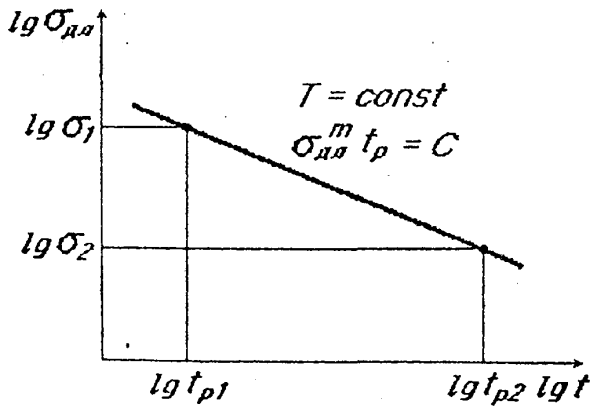
$$\sigma_{0.2/100}^{700} = 400 \text{ МПа}$$

- I - стадия неустановившейся ползучести;
- II - стадия установившейся ползучести;
- III - стадия разрушения

$\epsilon_c$  - деформация ползучести - остаточная (пластическая) деформация во времени при  $\sigma = \text{const}$  и  $T = \text{const}$ .

Предел длительной прочности

Кривая длительной прочности в логарифмических координатах



$m = m(t)$ ,  $C = C(t)$  - параметры материала;

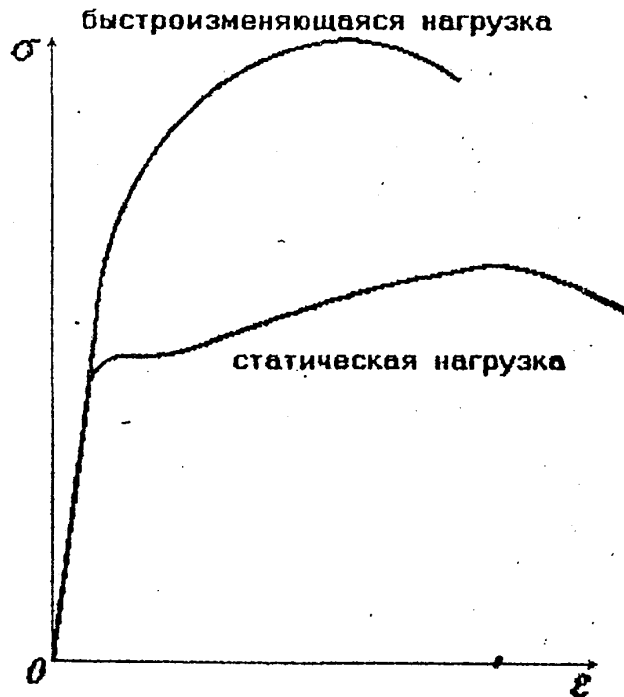
$t_p$  - время до разрушения.

Предел длительной прочности - напряжение, при котором материал разрушается не ранее заданного времени.

Сплав ХН77ТЮР

$$\sigma_{1000}^{700} = 330 \text{ МПа}$$

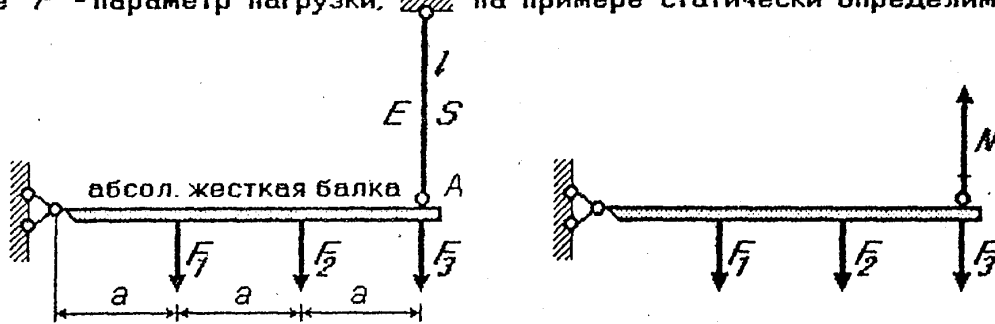
Влияние скорости нагружения :





**ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И НА ЖЕСТКОСТЬ**

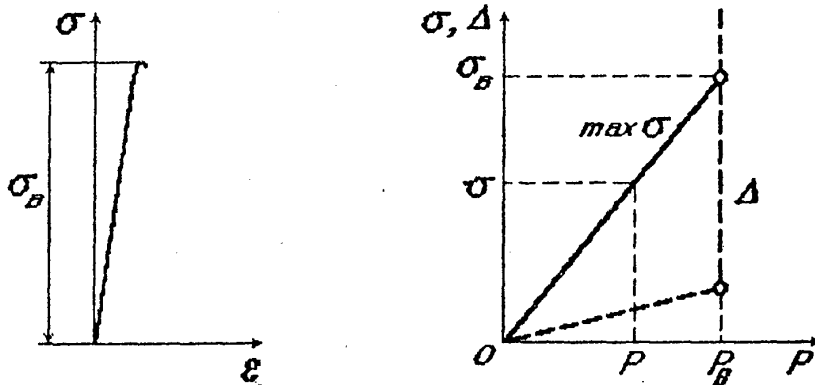
Рассмотрим однопараметрическое (простое) нагружение конструкции  $(F) = F_i(P)$ , где  $P$  - параметр нагрузки, на примере статически определимой системы.



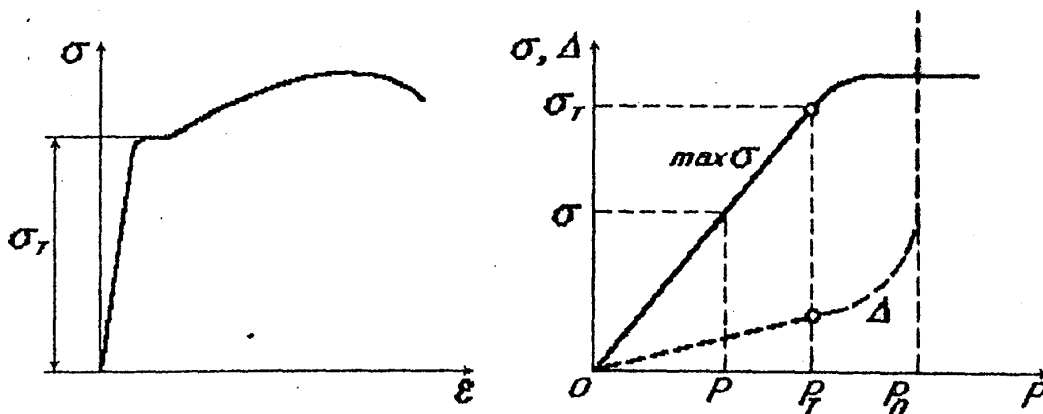
$F_1 = P; F_2 = \alpha_1 P; F_3 = \alpha_2 P; F_i = \alpha_{i-1} P; \alpha_i(t) = \alpha_i = const; 0 < P(t) < P;$   
 $P(t) = P = const$  - статическое нагружение.

Конструкция работоспособна, если  $P < \bar{P}$  - опасная нагрузка.

**ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ**



**ПЛАСТИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ**



$P_T$  - нагрузка, при которой появляются пластические (остаточные) деформации;  
 $P_0$  - нагрузка, нарушающая условия эксплуатации.

© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

## ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМЫЕ КОНСТРУКЦИИ

## Запас прочности

$$\bar{P} = \begin{cases} \frac{P_B}{P_T} & \text{- хрупкий материал;} \\ \frac{P_B}{P_T} \cdot \rho & \text{- пластичный материал.} \end{cases}$$

линейно деформируемые конструкции.

$$n = \frac{\bar{P}}{P} > 1 \text{ - коэффициент запаса прочности (запас прочности).}$$

Для линейно деформируемой конструкции:

$$n = \frac{F_T(P)}{P} = \frac{\sigma_T(\sigma_B)}{\max \sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\max \sigma}$$

$\bar{\sigma}$  - опасное напряжение.

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} \sigma_T & \text{- пластичный материал;} \\ \sigma_{BR}, \sigma_{BC} & \text{- хрупкий материал;} \end{cases}$$

$\max \sigma$  - наибольшее напряжение (в одном из элементов конструкции) - зависит от точности расчета, от величины параметра  $P(F_T(P))$ ;

$\bar{\sigma}$  - зависит от свойств материала, от условий испытаний, от разброса механических свойств и т.д.

## УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ

## НОРМАТИВНЫЙ ЗАПАС ПРОЧНОСТИ

$[n] > 1$  - нормированный коэффициент запаса прочности (нормативный запас).

Условие прочности:

$$n = \frac{\bar{\sigma}}{\max \sigma} \geq [n]; \text{ или в напряжениях: } \max \sigma \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma] = \frac{\bar{\sigma}}{[n]}$  - допускаемое напряжение.

Расчет на прочность по наиболее опасной точке (по локальному "разрушению") или расчет по допускаемым напряжениям.

Выбор величины  $[n]$  выходит за рамки курса "Сопротивление материалов".

$[n]$  зависит от следующих факторов:

- 1) условий работы конструкции;
- 2) метода расчета;
- 3) серьезности тех последствий, которые возникают после разрушения конструкции;
- 4) свойств материала;
- 5) экономических требований и т.д.

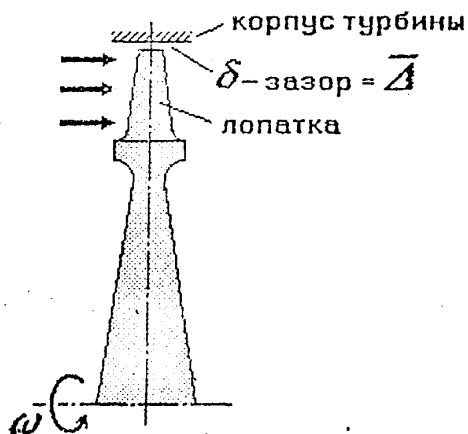
Нормированный запас  $[n]$  устанавливается НОРМАМИ ПРОЧНОСТИ.

$$\begin{aligned} \text{Общее машиностроение} & [n]_T = 1.5 \dots 1.6; \\ \text{(статическое нагружение)} & [n]_B = 2.0 \dots 3.0. \end{aligned}$$

## УСЛОВИЕ ЖЕСТКОСТИ

Ограничение перемещений:

$$\Delta \leq [\Delta], \text{ где } [\Delta] = \frac{\bar{\Delta}}{[\eta_{\Delta}]} \quad \Delta - \text{перемещение в характерной точке конструкции.}$$


 $\bar{\Delta}$  - предельное (опасное) перемещение, нарушающее условие эксплуатации;

 $[\eta_{\Delta}]$  - нормированный запас по условию ЖЕСТКОСТИ.

## ЗАДАЧИ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Целью расчетов могут быть:

- определение надежных размеров элементов конструкций;
- проверка прочности или жесткости;
- нахождение допустимых нагрузок;
- подбор материала и т.д.

## СПОСОБЫ РАСЧЕТА

1. Проектировочный расчет - выполняется на стадии проектирования новой конструкции.

Дано:  $(F_e) = F_i(P)$  - система внешних сил; $S_i(S)$  - параметр поперечных размеров; $\bar{\sigma}$  и  $[\eta]$  - материал:  $[\Delta]$ Цель:  $S = ?$ 

Условие прочности:

1) выбор опасного сечения:

$$(F_e) \rightarrow N_i \rightarrow \partial N.$$

2) выбор опасной точки:

$$N_i \rightarrow \sigma_i = \frac{N_i}{S_i} \rightarrow \max \sigma_i(S)$$

3)  $\max \sigma_i(S) \leq [\sigma] \rightarrow S_{\sigma}$ 

Условие жесткости:

$$\Delta(S) \leq [\Delta] \rightarrow S_{\Delta}$$

$$S = \max(S_{\sigma}, S_{\Delta}) \rightarrow S_i$$

Необходимо стремиться, чтобы конструкция была равнопрочной:

$$\sigma_i = [\sigma] = \text{const.}$$

### СПОСОБЫ РАСЧЕТА (продолжение)

2. Проверочный расчет - выполняется после изготовления опытного образца конструкции (на стадии доводки конструкции).

Дано:  $(F_{\sigma})$  - уточненные при испытаниях значения нагрузок;

$\bar{\sigma}$ ,  $[n]$ ,  $\bar{\Delta}$ ,  $\bar{S}_i$  - размеры поперечных сечений.

Цель: проверка прочности и жесткости.

Условие прочности:

1) Выбор опасного сечения:

$$(F_{\sigma}) \rightarrow N_i \rightarrow \exists N.$$

2) Выбор опасной точки:

$$N_i \rightarrow \sigma_i = \frac{N_i}{S_i} \rightarrow \max \sigma_i = \max \sigma$$

$$3) n = \frac{\bar{\sigma}}{\max \sigma} \geq [n]$$

Условие жесткости:

$$n_{\Delta} = \frac{\bar{\Delta}}{\Delta} \geq [n_{\Delta}]$$

### СПОСОБЫ РАСЧЕТА (продолжение)

3. Определение допустимой нагрузки - выполняется при модернизации конструкции, при изменении условий эксплуатации.

Дано:  $\bar{\sigma}$ ,  $[n]$ ,  $[\Delta]$ ,  $S_i$ ,  $(F_{\sigma}) = F_i(P)$ , где  $P$  - параметр нагрузки.

Цель:  $P = ?$

Условие прочности:

1) Выбор опасного сечения:

$$(F_{\sigma}) \rightarrow N_i \rightarrow \exists N.$$

2) Выбор опасной точки:

$$N_i \rightarrow \sigma_i = \frac{N_i}{S_i} \rightarrow \max \sigma_i(P)$$

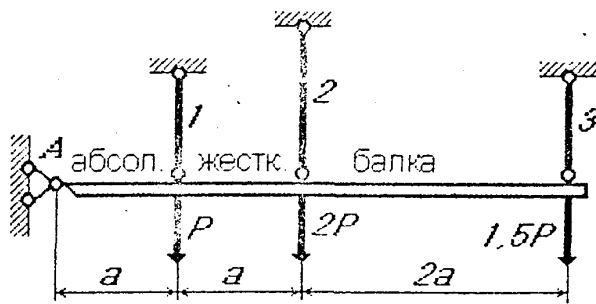
$$3) \max \sigma_i(P) \leq [\sigma] \rightarrow P_{\sigma}$$

Условие жесткости:

$$\Delta(P) \leq [\Delta] \rightarrow P_{\Delta}$$

$$P = \min(P_{\sigma}, P_{\Delta}) \rightarrow (F_{\sigma})$$

УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В ПРОСТЫХ  
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ (СНС),  
ЭЛЕМЕНТЫ КОТОРЫХ ИСПЫТЫВАЮТ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)



Дано:  $P$

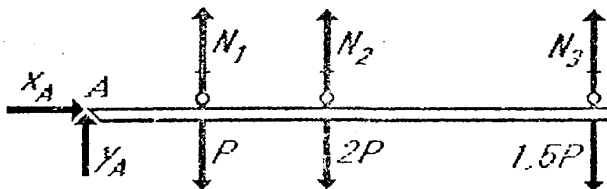
$$l_1 = l_3 = l; \quad l_2 = 1.5l, a;$$

$$S_1 = 2S; \quad S_3 = S; \quad S_2 = 1.5S$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E;$$

$$N_i = ?; \quad \sigma_i = ?$$

Определим  $N_i$  в стержнях с помощью метода сечений



Неизвестных - 5

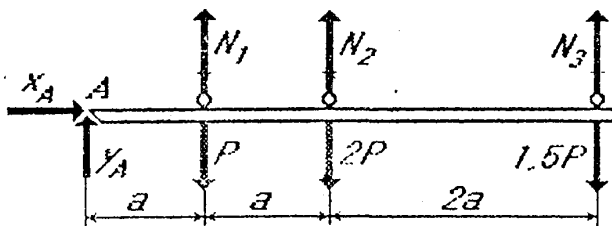
Независимых уравнений

статики - 3

СНС - опорные реакции, или внутренние силовые факторы нельзя найти с помощью метода сечений и условий равновесия.

ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Условия равновесия - применяют принцип начальных размеров



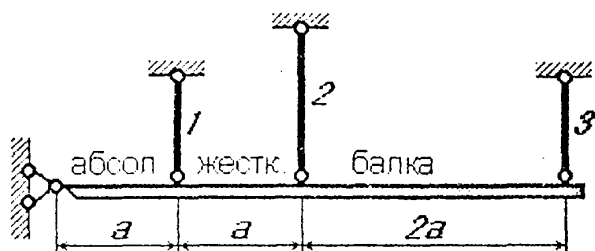
$$\Sigma M_A = N_1 a + N_2 2a + N_3 4a - Pa - 2P 2a - 1.5P 4a = 0$$

отсюда:

$$N_1 + 2N_2 + 4N_3 = 11P \quad (1)$$

## 2. УСЛОВИЯ СОВМЕЩНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

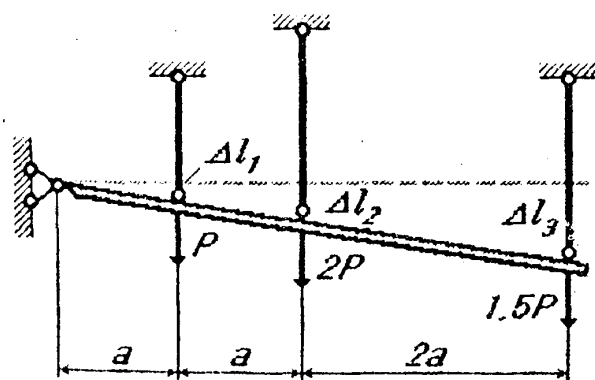
а) система до нагружения (до деформаций):



## 2. УСЛОВИЯ СОВМЕЩНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ (УДЛИНЕНИЙ)

система рассматривается в деформированном виде

б) система в деформированном виде (после нагружения):



$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1; \quad \Delta l_3 = 4\Delta l_1 \quad (2)$$

### 3. ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ УСИЛИЯМИ (1) И УДЛИНЕНИЯМИ (2)

В пределах упругости - закон Гука в усилиях:

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot S_i}; \quad \text{отсюда:}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot S_1} = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot 2S}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot S_2} = \frac{N_2 \cdot 1.5 \cdot l}{E \cdot 1.5 \cdot S} = \frac{N_2 \cdot l}{ES};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot S_3} = \frac{N_3 \cdot l}{ES};$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{2ES}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{ES}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l}{ES} \quad (3)$$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ

Подставляем выражение (3) в соотношения (2):

$$\frac{N_2 \cdot l}{ES} = 2 \cdot \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot 2S}; \quad \frac{N_3 \cdot l}{ES} = 4 \cdot \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot 2S};$$

Отсюда:

$$N_2 = N_1; \quad N_3 = 2N_1; \quad (4)$$

Подставляем соотношения (4) в уравнение (1):

$$N_1 + 2N_1 + 4 \cdot 2N_1 = 11P;$$

Получаем:

$$N_1 = N_2 = P; \quad N_3 = 2P.$$

Усилия в СНС зависят от соотношения жесткости  $(E_i \cdot S_i)$  и длины  $l_i$  элементов системы и не зависят от абсолютного значения.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЯХ

Определим напряжения в стержнях:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{S_i} \quad \text{отсюда:}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{P}{2S} = 0.5 \frac{P}{S};$$

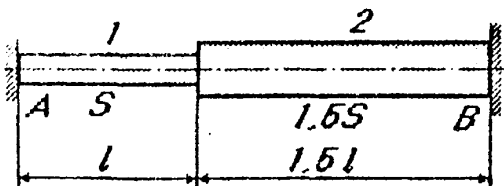
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{P}{1.5S} = 0.67 \frac{P}{S};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = \frac{2P}{S} = 2.0 \frac{P}{S};$$

Вывод:

1) стержни неравнопрочны;

2) наибольшее напряжение в третьем стержне:  $\max \sigma = \sigma_3 = 2.0 \frac{P}{S}$ .

ТЕПЛОВЫЕ УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ  
В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

Дано:

$$S, l, \Delta T_2 = 80^\circ;$$

$$E = 2.0 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град};$$

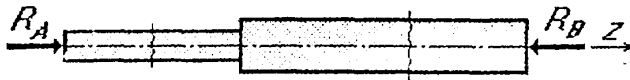
$\Delta T_2$  - изменение температуры второго стержня;

$\alpha_2$  - коэффициент линейного расширения.



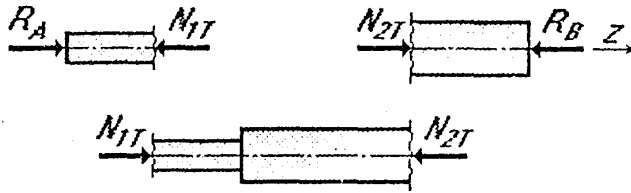
### ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Условия равновесия:



Неизвестных - 2  
Уравнений статики - 1

Воспользуемся методом сечений:

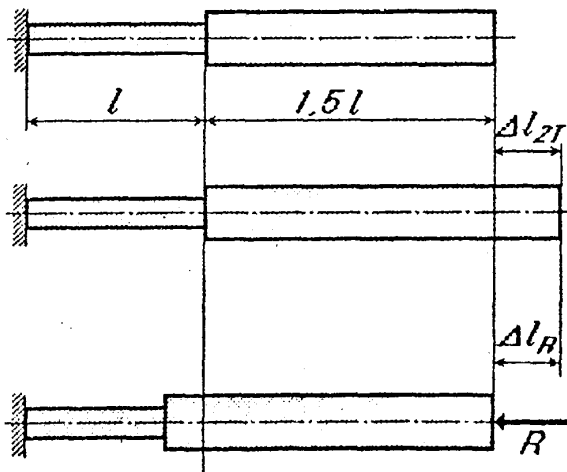


$$R_A = N_{1T} = N_{2T} = R_B = R \quad (1) \quad \text{Внешних усилия нет.}$$

В статически неопределимых системах усилия от изменения температуры самоуравновешенные.

### ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (продолжение)

2. Условия совместности деформаций:



а) система до изменения температуры:

б) система после нагрева второго стержня:

$\Delta l_{2T}$  - изменение длины стержня 2 от  $\Delta T_2$ :

в) система в деформированном виде

$\Delta l_R$  - суммарное укорочение отрезков 1 и 2 от реакции  $R$  (от усилий  $N_{1T}$  и  $N_{2T}$ ).

$$\Delta l_{2T} = \Delta l_R \text{ - условие совместности деформаций.} \quad (2)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (продолжение)

3. Физические соотношения между усилиями (1) и деформациями (2)

$$\Delta l_{2T} = \alpha_2 \Delta T_2 l_2 = \alpha_2 \Delta T_2 1.5l \quad (3):$$

$$\Delta l_R = \Delta l_{1R} + \Delta l_{2R} \quad \Delta l_{1N} + \Delta l_{2N}:$$

$$\Delta l_i = \frac{N_{iT} l_i}{E_i S_i} \quad (4):$$

$$\Delta l_{1N} = \frac{N_{1T} l_1}{E_1 S_1} = \frac{N_{1T} l}{ES} \quad (5):$$

$$\Delta l_{2N} = \frac{N_{2T} l_2}{E_2 S_2} = \frac{N_{2T} 1.5l}{E 1.5S} = \frac{N_{2T} l}{ES}$$

ТЕПЛОВЫЕ УСИЛИЯ В СТЕРЖНЯХ

Подставим выражения (4) и (5) в условие (2):

$$\alpha_2 \Delta T_2 1.5l = \frac{N_{1T} l}{ES} + \frac{N_{2T} l}{ES}$$

отсюда:

$$N_{1T} = N_{2T} = 0.75 \alpha_2 \Delta T_2 ES$$

Усилия в статически неопределимых системах при изменении температуры  $T$  зависят от соотношения длин  $l_i$  и не зависят от абсолютных значений.

## ТЕПЛОВЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЯХ

Определим напряжения в стержнях:

$$\sigma_i = \frac{N_{iT}}{S_i};$$

$$\sigma_{1T} = \frac{N_{1T}}{S_1} = \frac{0.75 \alpha_2 \Delta T_2 E S}{S} = 0.75 \alpha_2 \Delta T_2 E$$

$$\sigma_{2T} = \frac{N_{2T}}{S_2} = \frac{0.75 \alpha_2 \Delta T_2 E S}{1.5S} = 0.5 \alpha_2 \Delta T_2 E$$

Напряжения в СНС при изменении температуры  $T$  зависят от соотношения площадей  $S_i$  и не зависят от абсолютного значения.

Наибольшие напряжения в первом стержне:

$$\sigma_{max} = \sigma_{1T} = 0.75 \alpha_2 \Delta T_2 E$$

Вычислим напряжения в первом стержне:

$$\sigma_{max} = \sigma_{1T} = 0.75 \alpha_2 \Delta T_2 E = 0.75 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 2.0 \cdot 10^5 = 144 \text{ МПа}$$

МОНТАЖНЫЕ УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ  
В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

Дано:

$$\delta = 1.0 \text{ мм}$$

$$l_1 = l_3 = 1.15l$$

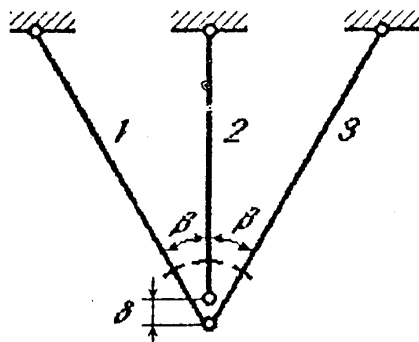
$$l_2 = l, \quad l = 1000 \text{ мм}$$

$$S_1 = S_3 = S, \quad S_2 = 2S$$

Материал стержней одинаковый

$$E = 2.0 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

$$\beta = 30^\circ$$

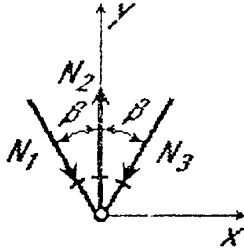


$$N_i = ? \quad \sigma_i = ?$$

После сборки (после монтажа конструкции) возникает монтажные (начальные) усилия. Для их выявления воспользуемся методом сечений.

## ПЛАН РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

## 1. Условия равновесия:



Неизвестных - 3

Уравнений статики - 2 (сходящаяся система сил)

$$\sum X = N_1 \cos \beta - N_3 \cos \beta = 0;$$

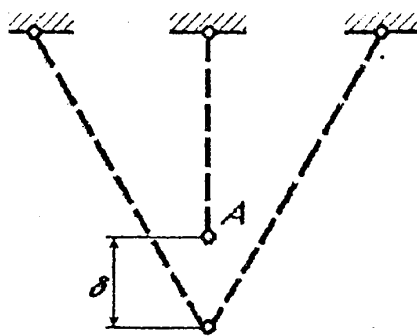
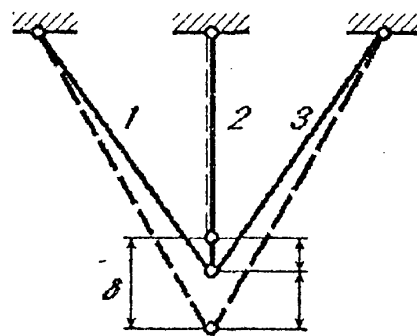
$$\sum Y = N_2 - N_1 \cos \beta - N_3 \cos \beta = 0.$$

Внешних усилий нет.

Монтажные (начальные) усилия в ОМС-самоуравновешенные.

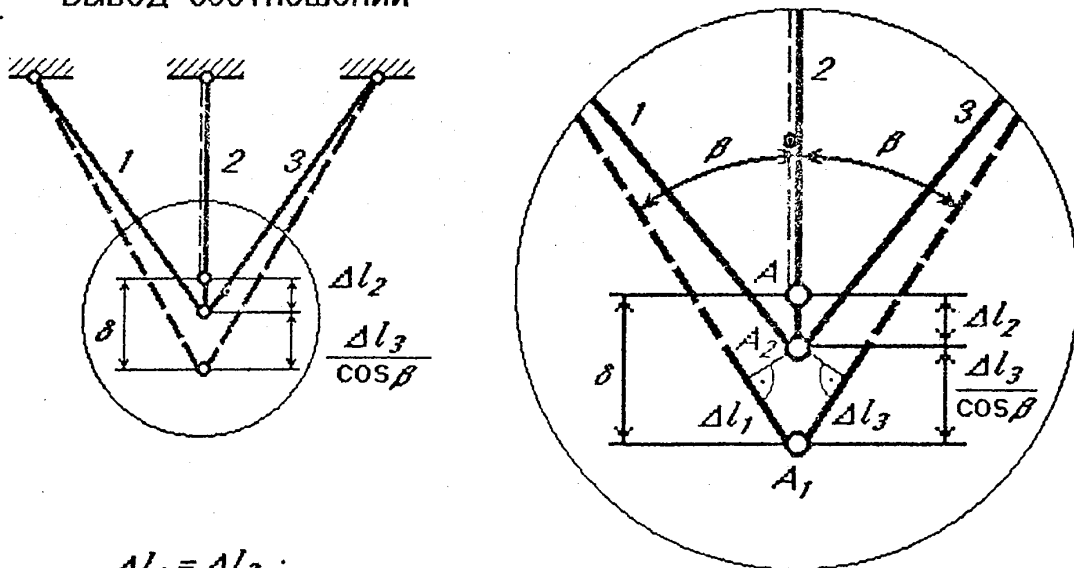
$$N_1 = N_3; \quad N_2 = 2N_1 \cos \beta \quad (1)$$

## 2. УСЛОВИЕ СОВМЕСТИСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

а) система до сборки  
(до монтажа)б) система после сборки  
(после монтажа)

## 2. УСЛОВИЕ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ (продолжение)

Вывод соотношений



$$\Delta l_1 = \Delta l_3;$$

$$\delta = \Delta l_2 + \frac{\Delta l_3}{\cos \beta} \quad (2) \text{ - условие совместности деформации.}$$

3. ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ  
МЕЖДУ УСИЛИЯМИ (1) И УДЛИНЕНИЯМИ (2)

В пределах упругости - закон Гука в усилиях:

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot S_i}; \quad (3) \text{ отсюда с учетом выражения (1):}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot S_2} = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot 2S} = \frac{2N_1 \cos \beta \cdot l}{E \cdot 2S} = \frac{N_1 \cos \beta \cdot l}{E \cdot S};$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot S_1} = \frac{N_1 \cdot 1,15l}{E \cdot S};$$

Выражение (4) в условие (2):

$$\delta = \frac{N_1 \cos \beta \cdot l}{E \cdot S} + \frac{N_1 \cdot 1,15l}{E \cdot S \cdot \cos \beta};$$

ПМиДПМ	1999	РАСТЯЖЕНИЕ - СЖАТИЕ	стр.30 из 30
--------	------	---------------------	-----------------

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОНТАЖНЫХ УСИЛИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЯХ

$$E \cdot S \delta = N_1 \cdot l \left( \cos \beta + \frac{1.15}{\cos \beta} \right) = 2.19 N_1 \cdot l;$$

$$N_1 = 0.456 \frac{\delta}{l} ES; \quad N_2 = 0.789 \frac{\delta}{l} ES;$$

$$\sigma_i = \frac{N_i}{S_i};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = 0.456 \frac{\delta}{l} E; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = 0.395 \frac{\delta}{l} E;$$

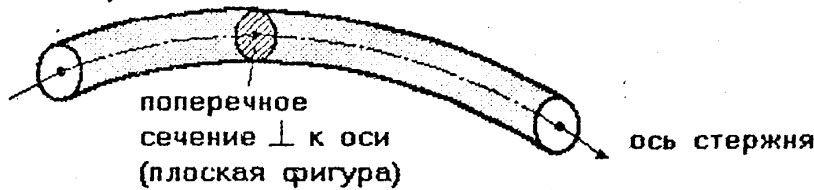
Наибольшие напряжения в наклонных стержнях 1 и 3:

$$\sigma_1 = 0.456 \frac{\delta}{l} E = 0.456 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3}}{1} \cdot 2.0 \cdot 10^5 = 91.2 \text{ МПа.}$$

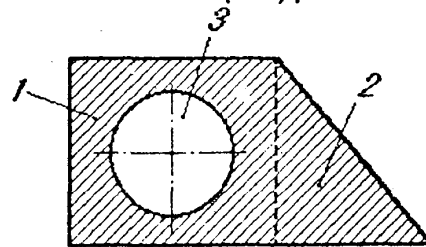
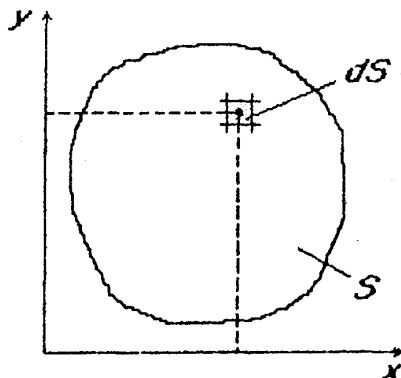
© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ

Стержень



1. ПЛОЩАДЬ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ



$$S = \sum_{l=1}^n S_l > 0$$

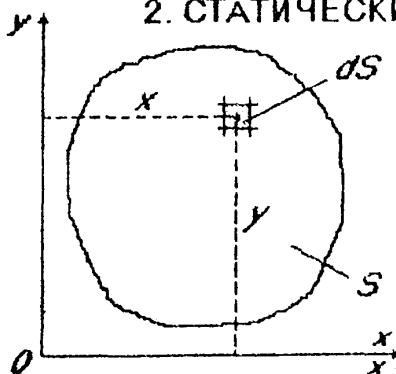
l - номер фигуры

$$(S_3 < 0)$$

$$S = \iint_S dx dy = \int dS$$

Размерность  $[м^2, см^2]$

2. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ



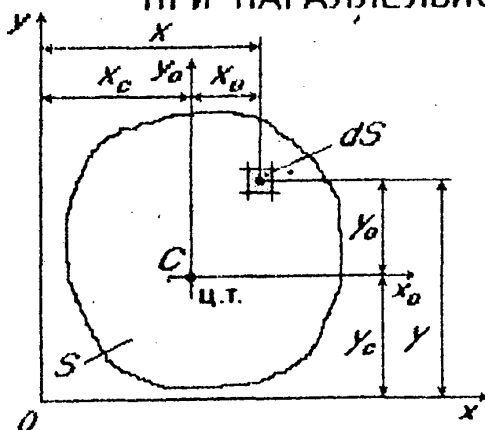
$$\left. \begin{aligned} S_x &= \int_S y dS \\ S_y &= \int_S x dS \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{статические моменты} \\ &\text{- площади относительно} \\ &\text{осей } x \text{ и } y \text{ (соответственно).} \end{aligned}$$

$$(S_x, S_y) \geq 0 \quad \text{Размерность } [м^3, см^3]$$

Оси, относительно которых  $S_x = S_y = 0$ , называются ЦЕНТРАЛЬНЫМИ.

Точка пересечения центральных осей совпадает с центром тяжести сечения.

ИЗМЕНЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ



Дано:

C - центр тяжести сечения;

$x_0, y_0$  - центральные оси,  $S_{x_0} = S_{y_0} = 0$ .

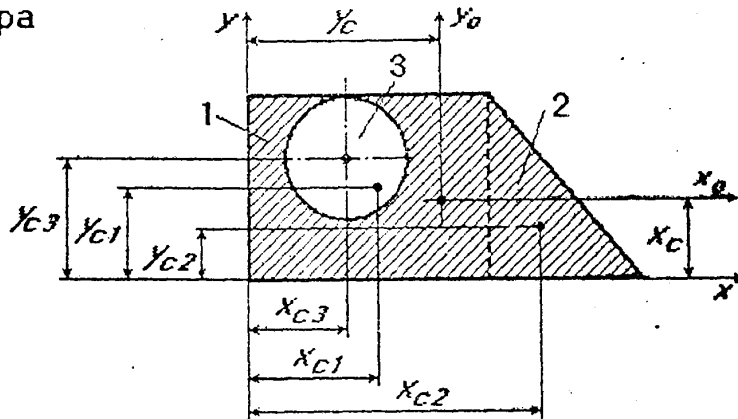
$x_c, y_c$  - координаты центра тяжести сечения в осях x и y.

Определить:

$$S_x = ?; \quad S_y = ?$$

$$x = x_0 + x_c; \quad y = y_0 + y_c.$$

Сложная фигура



1. Разбиваем сложную фигуру на простейшие.
2. Выбираем произвольные оси  $x$  и  $y$ .
3. Указываем центр тяжести каждой простейшей фигуры.
4. Вычисляем центр тяжести сложной фигуры  $X_c$  и  $Y_c$ .
5. Проводим центральные оси  $x_0$  и  $y_0$ .

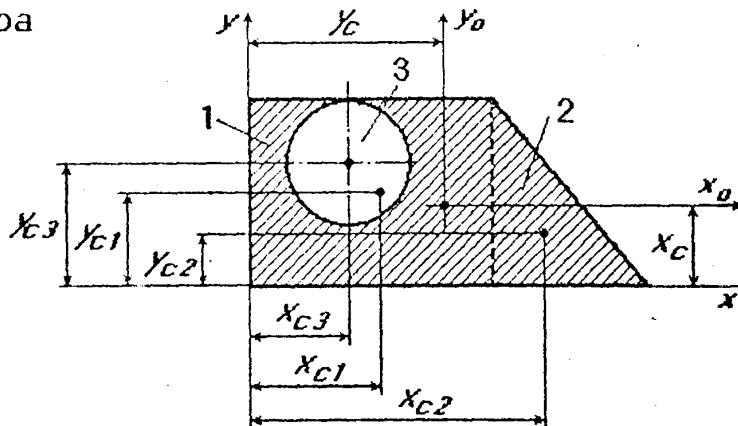
$$S_x = \sum_{i=1}^n S_x^{(i)} = \sum_{i=1}^n y_{ci} S_i = y_{c1} S_1 + y_{c2} S_2 - y_{c3} S_3;$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_y^{(i)} = \sum_{i=1}^n x_{ci} S_i = x_{c1} S_1 + x_{c2} S_2 - x_{c3} S_3;$$

$i$  - номер фигуры.

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_x^{(i)}}{\sum_{i=1}^n S_i}; \quad X_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_y^{(i)}}{\sum_{i=1}^n S_i}.$$

Сложная фигура



1. Разбиваем сложную фигуру на простейшие.
2. Выбираем произвольные оси  $x$  и  $y$ .
3. Указываем центр тяжести каждой простейшей фигуры.
4. Вычисляем центр тяжести сложной фигуры  $X_c$  и  $Y_c$ .
5. Проводим центральные оси  $x_0$  и  $y_0$ .

$$S_x = \sum_{i=1}^n S_x^{(i)} = \sum_{i=1}^n y_{ci} S_i = y_{c1} S_1 + y_{c2} S_2 - y_{c3} S_3;$$

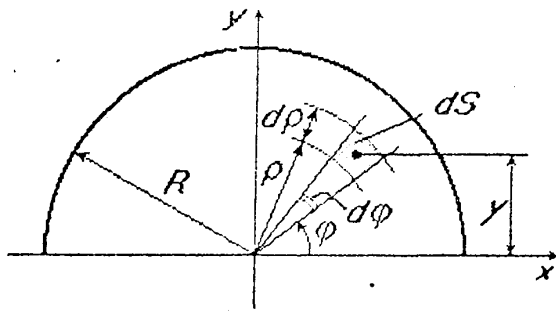
$$S_y = \sum_{i=1}^n S_y^{(i)} = \sum_{i=1}^n x_{ci} S_i = x_{c1} S_1 + x_{c2} S_2 - x_{c3} S_3;$$

$i$  - номер фигуры.

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_x^{(i)}}{\sum_{i=1}^n S_i}; \quad X_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_y^{(i)}}{\sum_{i=1}^n S_i}.$$



ПРИМЕР. Определение центра тяжести полукруга



Дано:  $R$

$$y_c = ?$$

Выбираем начальные оси  $x$  и  $y$ .  
Центр тяжести расположен на оси  $y$  - оси симметрии сечения.

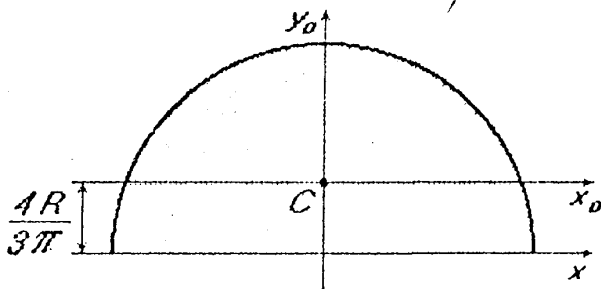
Площадь элементарной площадки:

$$dS = \rho d\phi dp; \quad y = \rho \sin \phi.$$

Статический момент сечения:

$$S_x = \int_S y dS = \int_0^R \int_0^{\pi} \rho \cdot \sin \phi \cdot \rho d\phi dp;$$

$$S_x = \int_0^R \rho^2 dp \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi = \frac{2}{3} R^3;$$

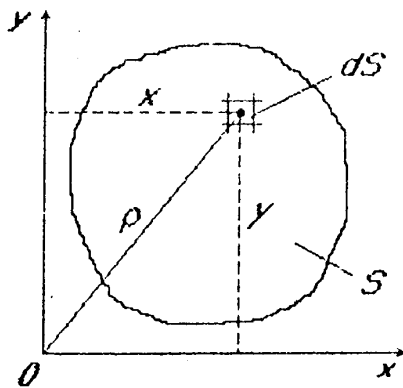


Площадь:

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2;$$

$$y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{2 R^3 \cdot 2}{3 \pi R^2} = \frac{4 R}{3 \pi}$$

### 3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ



$$I_x = \int_S y^2 dS;$$

$$I_y = \int_S x^2 dS;$$

$$I_{xy} = \int_S xy dS;$$

Осевые (относительно осей  $x$  и  $y$ ) и центробежный моменты инерции сечения.

$$I_p = \int_S \rho^2 dS = \int_S (x^2 + y^2) dS = I_x + I_y - \text{полярный момент инерции сечения относительно точки } O.$$

$$I_x, I_y, I_p > 0; \quad I_{xy} \leq 0$$

Размерность  $[M^4 \cdot CM^4]$

Сложная фигура

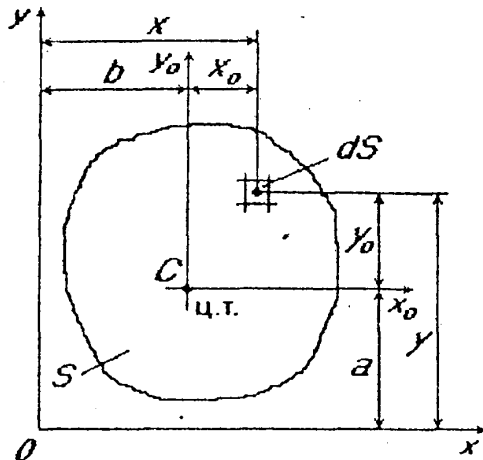


$$I_x = \sum_{i=1}^n I_x^{(i)}, \quad I_y = \sum_{i=1}^n I_y^{(i)}, \quad I_p = \sum_{i=1}^n I_p^{(i)},$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n I_{xy}^{(i)},$$

$i$  - номер фигуры.

ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ  
ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ



Дано:  $C$  - центр тяжести сечения;  
 $x_0, y_0$  - центральные оси;  
 $S_{x_0} = S_{y_0} = 0$ ;  $I_{x_0}, I_{y_0}, I_{x_0 y_0}$ ;  
 $a, b$  - координаты центра тяжести сечения в осях  $x$  и  $y$ .

Определить:  
 $I_x, I_y, I_{xy} = ?$

$x = x_0 + b$ ;  $y = y_0 + a$ .

Запишем осевые моменты инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$ .

$$I_x = \int_S y^2 dS = \int_S (y_0 + a)^2 dS = \int_S y_0^2 dS + 2a \int_S y_0 dS + a^2 \int_S dS = I_{x_0} + 2a S_{x_0} + a^2 S;$$

отсюда:

$$I_x = I_{x_0} + a^2 S;$$

аналогично для оси  $y$ :

$$I_y = I_{y_0} + b^2 S;$$

При переходе к центральным осям:

$$I_{x_0} = I_x - a^2 S;$$

Из всех моментов инерции относительно параллельных осей моменты инерции относительно центральной оси - минимальные

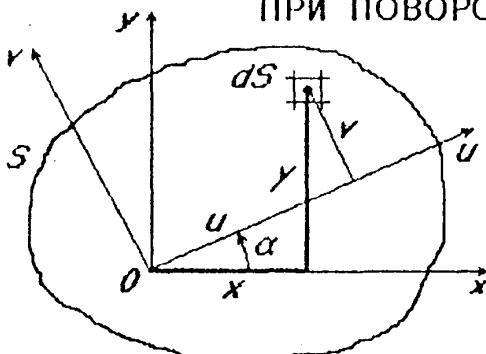
$$I_{y_0} = I_y - b^2 S.$$

Определим центробежный момент инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$ :

$$I_{xy} = \int_S xy dS = \int_S (x_0 + b)(y_0 + a) dS = \int_S x_0 y_0 dS + b \int_S y_0 dS + a \int_S x_0 dS + ab \int_S dS =$$

$$= I_{x_0 y_0} + b S_{x_0} + a S_{y_0} + ab S; \text{ отсюда: } I_{xy} = I_{x_0 y_0} + ab S.$$

ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ  
ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ



Дано: оси  $x$  и  $y$ .  $I_x, I_y, I_{xy}, \alpha$

Найти  $I_u, I_v, I_{uv} = ?$

Определим координаты  $u$  и  $v$  площадки  $dS$  в новой системе координат:

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad v = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Определим осевые моменты инерции сечения относительно осей  $u$  и  $v$ :

$$I_u = \int_S v^2 dS = \int_S (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dS = \cos^2 \alpha \int_S y^2 dS - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_S xy dS + \sin^2 \alpha \int_S x^2 dS;$$

$$I_v = \int_S u^2 dS = \int_S (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^2 dS = \sin^2 \alpha \int_S y^2 dS + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_S xy dS + \cos^2 \alpha \int_S x^2 dS;$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha + I_y \sin^2 \alpha;$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha + I_y \cos^2 \alpha$$

Если сложить величины моментов инерции относительно осей  $U$  и  $V$ , то получим:

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_p = \text{const}$$

Определим центробежный момент инерции сечения относительно осей  $U$  и  $V$

$$I_{uv} = \int_S uv \, dS = \int_S (y \sin \alpha + x \cos \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) \, dS =$$

$$= \cos^2 \alpha \int_S xy \, dS - \sin^2 \alpha \int_S xy \, dS + \sin \alpha \cos \alpha \int_S y^2 \, dS - \sin \alpha \cos \alpha \int_S x^2 \, dS$$

$$\text{Отсюда: } I_{uv} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha$$

### ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

Если  $I_u + I_v = I_x + I_y = \text{const}$  сумма остается неизменной,

то существуют оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают экстремальных значений ( $I_{max}$  и  $I_{min}$ ), то есть

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_{max} + I_{min} = \text{const}. \text{ Такие оси называются ГЛАВНЫМИ.}$$

Найдем положение этих осей, приравняв  $\frac{dI_u}{d\alpha} = 0$ .

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = 2 \cos \alpha_0 (-\sin \alpha_0) I_x - \cos 2\alpha_0 \cdot 2 I_{xy} + 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 I_y = 0. \text{ Отсюда:}$$

$$-2(I_{xy} \cos 2\alpha_0 + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_0) = -2 I_{uv} = 0.$$

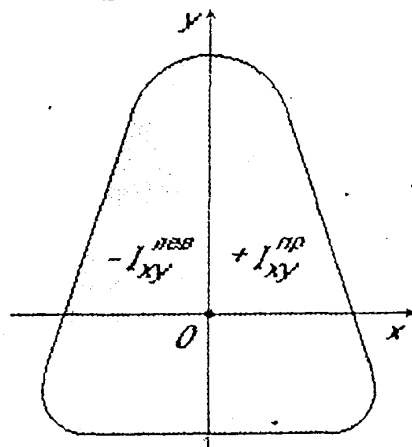
$$\boxed{\text{tg } 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}}$$

Относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю  $I_{uv} = 0$ .

Экстремальные значения осевых моментов инерции сечения:

$$I_{max/min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

### СИММЕТРИЧНОЕ СЕЧЕНИЕ

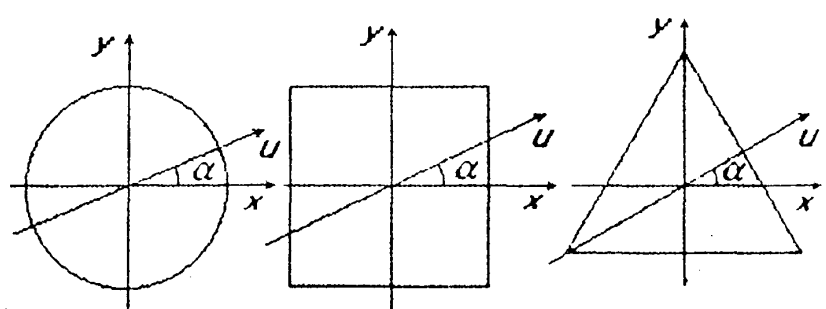


Ось  $y$  - ось симметрии

$$-I_{xy}^{лев} = I_{xy}^{пр}; I_{xy} = I_{xy}^{пр} + I_{xy}^{лев} = 0.$$

Оси  $x$  и  $y$  - главные оси инерции.

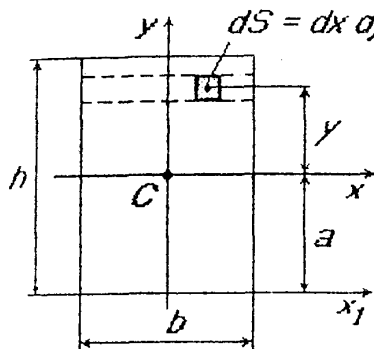
### ПРАВИЛЬНЫЕ ФИГУРЫ



$$I_x = I_y; I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha = I_x.$$

Любая ось  $U$  - главная центральная ось.

ПРЯМОУГОЛЬНОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ



Дано: Оси  $x$  и  $y$  - главные и центральные;  $b \times h$

$I_x - I_y - I_{x1} = ?$

$$I_x = \int_S y^2 dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx = \frac{bh^3}{12}$$

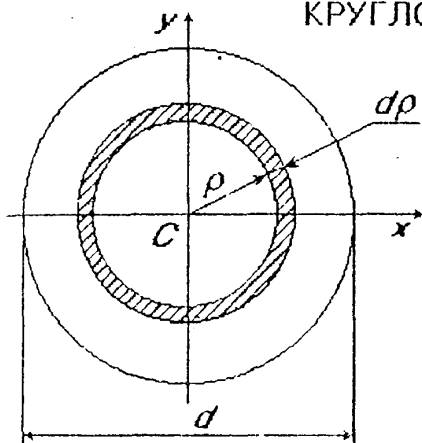
$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{x1} = I_x + a^2 S = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh$$

$$I_{x1} = \frac{bh^3}{3}$$

КРУГЛОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ



Дано: Оси  $x$  и  $y$  - главные центральные оси;  $d$

$I_p - I_x - I_y = ?$

$$I_p = \int_S \rho^2 dS \quad dS = 2\pi\rho d\rho$$

$$I_p = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{2\pi}{4} \rho^4 \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32}$$

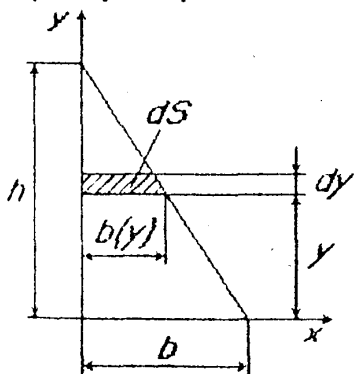
$$I_p = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Пример. Определение моментов инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$

Дано: Оси  $x$  и  $y$ ;  $b$  и  $h$ ;  $I_x - I_y = ?$



$$I_x = \int_S y^2 dS; \quad dS = b(y) dy = \frac{b}{h}(h-y) dy; \quad \frac{b(y)}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$b(y) = \frac{b}{h}(h-y); \quad I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y) dy$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

Пример. Определение моментов инерции сечения относительно центральных осей  $x_0$  и  $y_0$ .

Дано: Оси  $x_0$  и  $y_0$  - центральные оси;  $b$  и  $h$ ;  $a = \frac{h}{3}$

$$x_c = \frac{b}{3}; \quad I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$I_{x0} - I_{y0} = ?$

$$I_{x0} = I_x - a^2 S = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{1}{2} bh$$

$$I_{x0} = \frac{bh^3}{36} \quad I_{y0} = \frac{hb^3}{36}$$

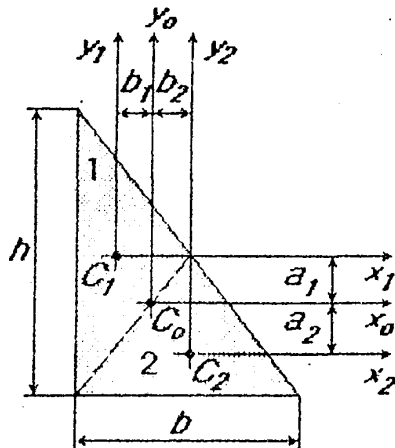
## ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК (продолжение)

Пример. Определим центробежный момент инерции сечения относительно центральных осей  $x_0$  и  $y_0$ .

Дано:  $b$  и  $h$

Оси  $x_0$  и  $y_0$  - центральные

$$I_{x_0 y_0} = ?$$



$$x_1 - \text{ось симметрии фигуры 1: } I_{x_1 y_1} = 0;$$

$$y_2 - \text{ось симметрии фигуры 2: } I_{x_2 y_2} = 0;$$

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} h \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \frac{h}{2} b = \frac{bh}{4};$$

$$b_1 = -\frac{1}{6} b; a_1 = \frac{1}{6} h; b_2 = \frac{1}{6} b; a_2 = -\frac{1}{6} h;$$

$$I_{x_0 y_0} = I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 S_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 b_2 S_2 = -\frac{h}{6} \frac{b}{6} \frac{bh}{4} - \frac{h}{6} \frac{b}{6} \frac{bh}{4};$$

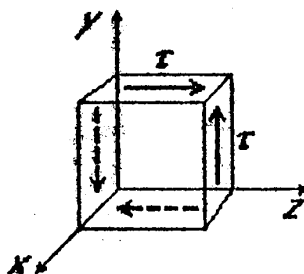
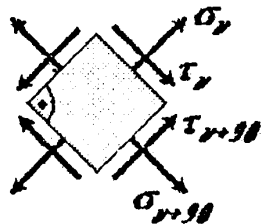
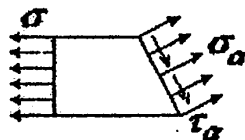
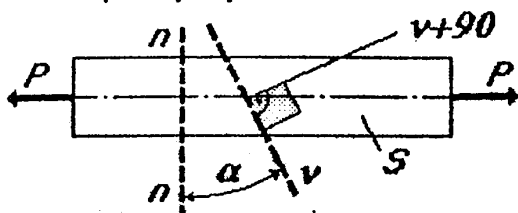
$$I_{x_0 y_0} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

СДВИГ и КРУЧЕНИЕ

Чистый сдвиг

На примере растяжения

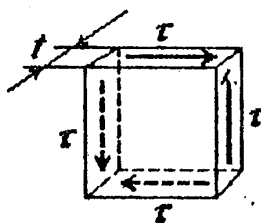
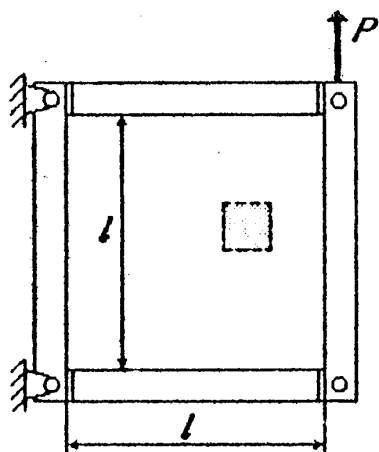


$$\tau_y = -\tau_{y+90}$$

Чистый сдвиг - напряженное состояние, на гранях прямоугольного параллелепипеда возникают только касательные напряжения.

ОДНОРОДНЫЙ ЧИСТЫЙ СДВИГ

а) пластина

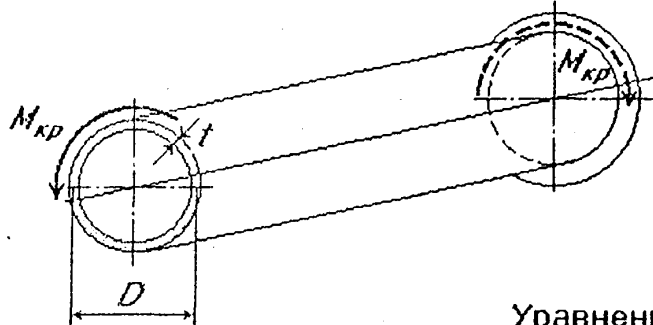


$$\tau = \frac{P}{l \cdot t}$$

t - толщина пластины

ОДНОРОДНЫЙ ЧИСТЫЙ СДВИГ (продолжение)

б) тонкостенная цилиндрическая трубка ( $t \ll D$ )



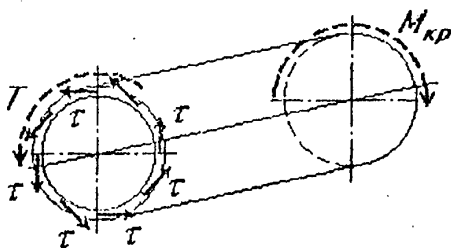
$t$  - толщина трубки;

$D$  - средний диаметр трубки;

Уравнения равновесия:

$$T = M_{кр} \quad ; \quad M_{кр} = T = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot t \cdot \frac{D}{2} \quad ;$$

$$\tau = \frac{2T}{\pi D^2 t} \quad ;$$



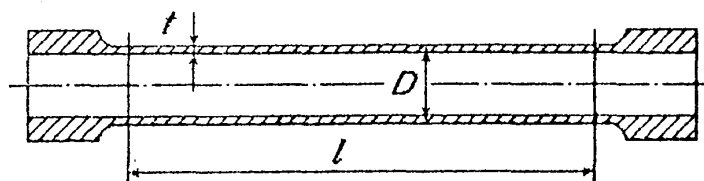
$\tau = const$ ;

$\tau = f(M_{кр})$ ;  $\tau = f(T)$ .

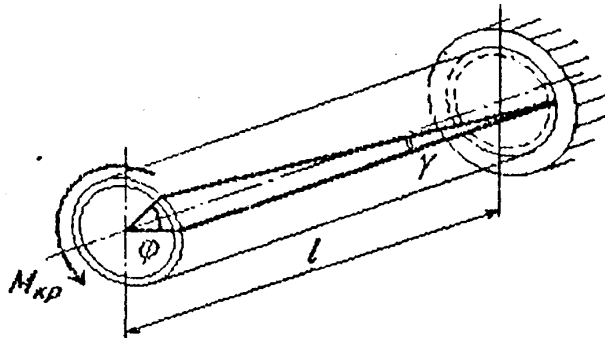
ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ЧИСТОГО СДВИГА

Аналогично испытанию на растяжение и сжатие.

а) образец - тонкостенная трубка:

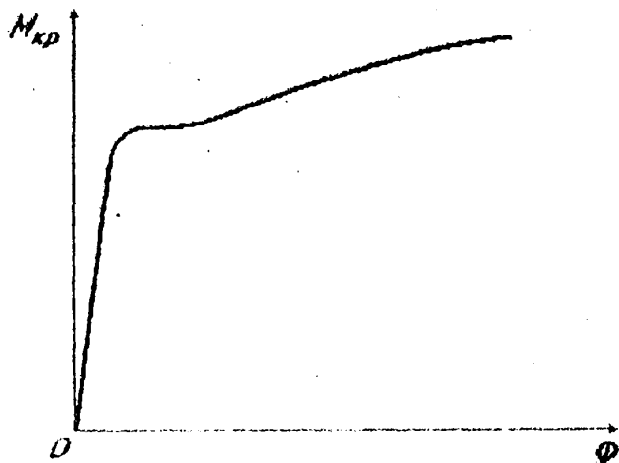


б) схема нагружения и деформирования:



### ДИАГРАММА СДВИГА (КРУЧЕНИЯ) ОБРАЗЦА ИЗ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

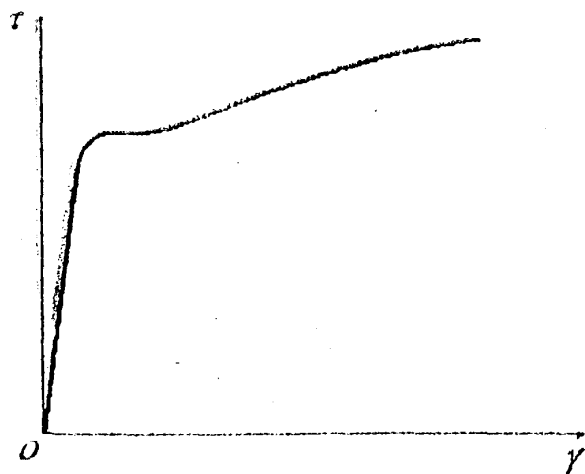
Во время испытаний измеряют  $M_{кр}$  и взаимный угол поворота сечений  $\varphi$  на длине  $l$  - получают диаграмму  $M_{кр} = f(\varphi)$



### ДИАГРАММА СДВИГА (КРУЧЕНИЯ) МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

При получении диаграммы сдвига для материала  $\tau = f(\gamma)$  перестроим диаграмму сдвига образца с помощью выражений:

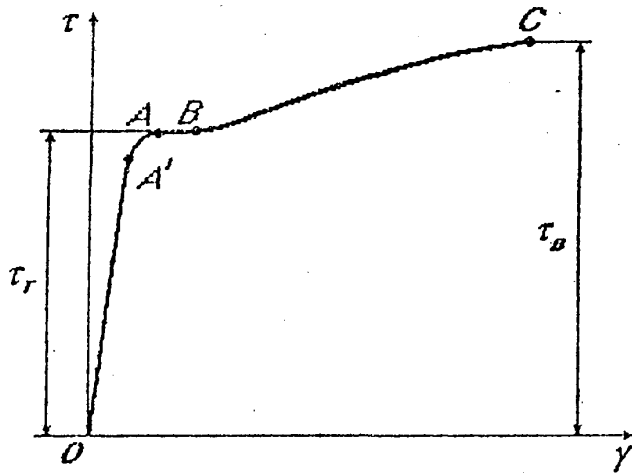
$$\tau = \frac{2M_{кр}}{\pi D^2 l} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\varphi \cdot D}{2l}$$



Сопоставление диаграммы сдвига с диаграммой растяжения для одного и того же материала показывает их качественное сходство.



**ХАРАКТЕРНЫЕ ЗОНЫ**  
Зоны упругости, текучести и упрочнения



$OA'$  - зона упругости (прямая пропорциональности);  
 $\tau = G \cdot \gamma$  - закон Гука при сдвиге;

$G$  - модуль сдвига или модуль упругости II рода;

$AB$  - зона текучести (площадка текучести);

$\tau_T$  - предел текучести при сдвиге (кручении);

$$\tau_T = (0,5 \dots 0,6) \sigma_T$$

$BC$  - зона упрочнения;

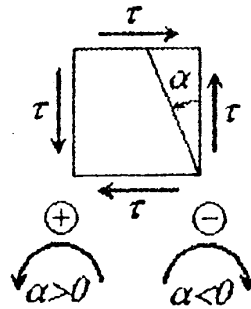
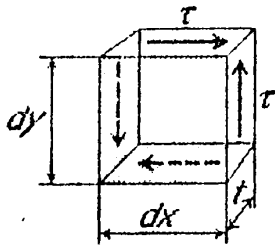
$\tau_B$  - предел прочности (временное сопротивление) при сдвиге.

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

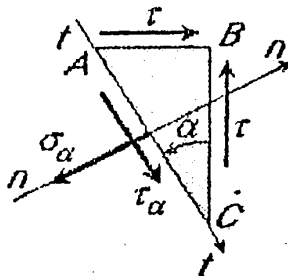
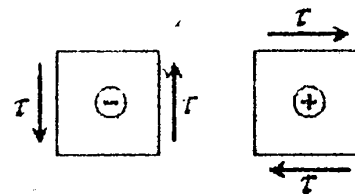
$E$  - модуль продольной упругости (I рода или модуль Юнга);

$\mu$  - коэффициент Пуассона

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ**



Правило знаков:



$$\Sigma F_{n-n} = -\sigma_{\alpha} \cdot AC \cdot t + \tau \cdot AB \cdot t \cdot \cos \alpha + \tau \cdot BC \cdot t \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma F_{t-t} = \tau_{\alpha} \cdot AC \cdot t - \tau \cdot BC \cdot t \cdot \cos \alpha + \tau \cdot AB \cdot t \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sigma_{\alpha} = \tau \cdot \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \tau \cdot \cos 2\alpha$$

ПРОСТЕЙШИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

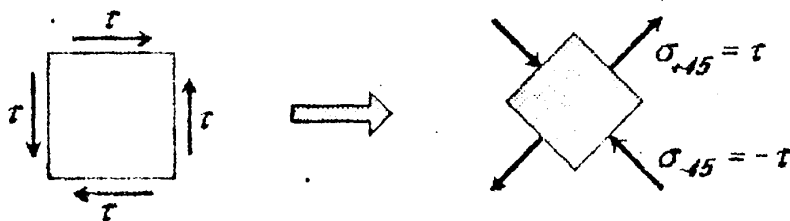
$$\tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha; \quad \sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha;$$

1)  $\tau_\alpha = \tau_{\max} = \tau; \quad \cos 2\alpha = 1; \quad \alpha = 0; \quad \tau_{\max}$  - в поперечных сечениях;

2)  $\sigma_\alpha = \sigma_{\max} = \tau; \quad \sin 2\alpha = 1; \quad 2\alpha = 90^\circ; \quad \alpha = 45^\circ;$

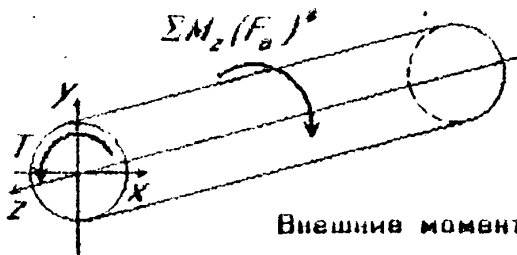
а)  $\alpha = +45^\circ; \quad \sigma_{+45} = \tau; \quad \tau_{+45} = 0;$

б)  $\alpha = -45^\circ; \quad \sigma_{-45} = -\tau; \quad \tau_{-45} = 0;$



Чистый сдвиг может быть представлен как одновременное растяжение и сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

КРУЧЕНИЕ



При кручении в поперечных сечениях стержня (вала) возникает только крутящий момент  $T$ . По величине он равен

$$T = -\sum M_z(F_0)^*$$

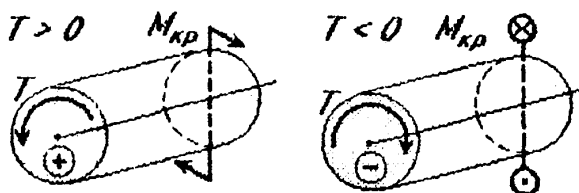
Внешние моменты, вызывающие кручение называют скручивающими моментами.

Вал - это стержень, работающий в основном на кручение.

Деформацию кручения испытывают валы редукторов, коробок передач автомобиля, трансмиссионные валы, валы, приводящие в движение воздушные винты и лопасти вертолета, пружины и другие детали.

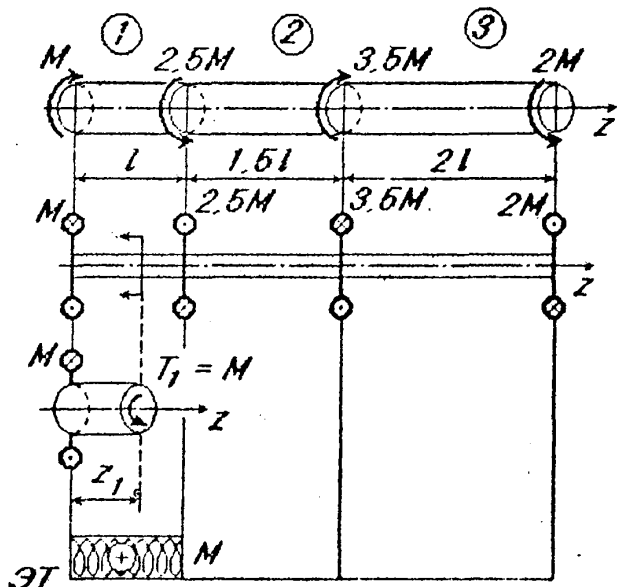
Знак крутящего момента  $T$  не имеет физического смысла.

При построении эпюр условимся о следующем правиле знаков:



ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА ПРИ КРУЧЕНИИ

График, показывающий изменение крутящего момента по длине стержня (вала), называется эпюрой крутящих моментов ЭТ.



Пример 1.

Вал под действием внешних (скручивающих) моментов находится в равновесии:

$$\sum M_z = M - 2.5M + 3.5M - 2M = 0.$$

С помощью метода сечений определим крутящие моменты в поперечных сечениях вала. Разобьем вал на три участка.

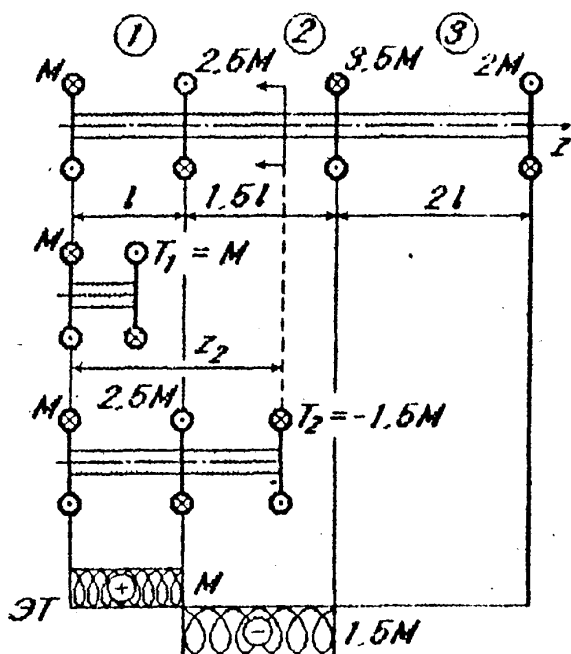
1-й участок ( $0 < z_1 < l$ )

$$T_1 = M$$

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА ПРИ КРУЧЕНИИ

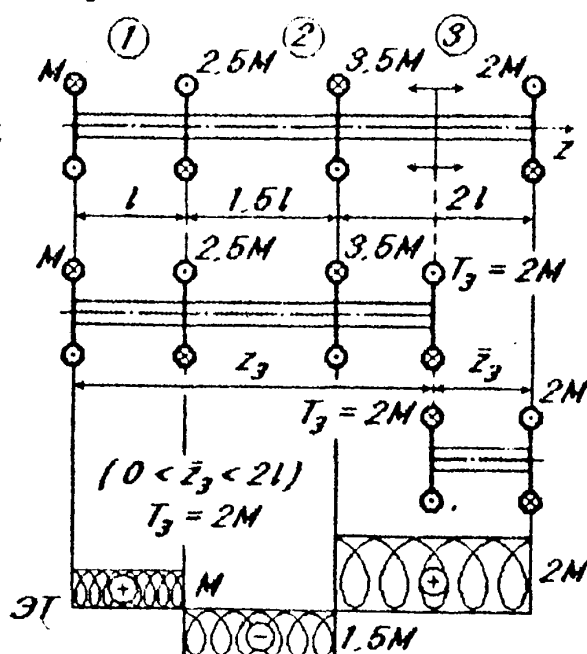
2-й участок ( $l < z_2 < 2.5l$ )

$$T_2 = M - 2.5M = -1.5M$$



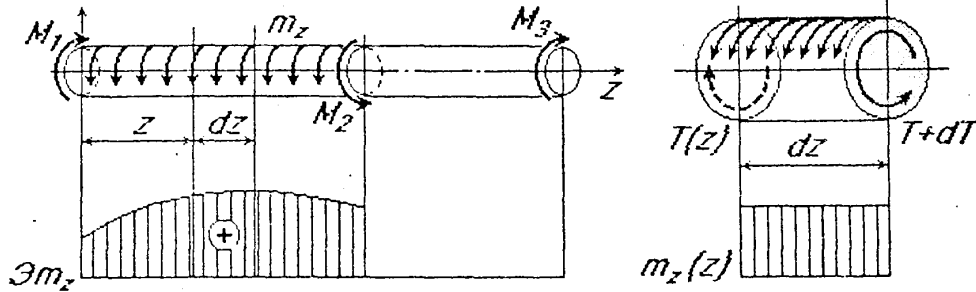
3-й участок ( $2.5l < z_3 < 4.5l$ )

$$T_3 = M - 2.5M + 3.5M = 2M$$



**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ СКРУЧИВАЮЩЕГО МОМЕНТА**

Вал (стержень) находится в равновесии под действием системы внешних (скручивающих) моментов.



Бесконечно малый отрезок  $dz$  находится в равновесии под действием распределенных скручивающих моментов  $m_z$  и крутящих моментов, отличающихся на бесконечно малую величину  $dT$ :

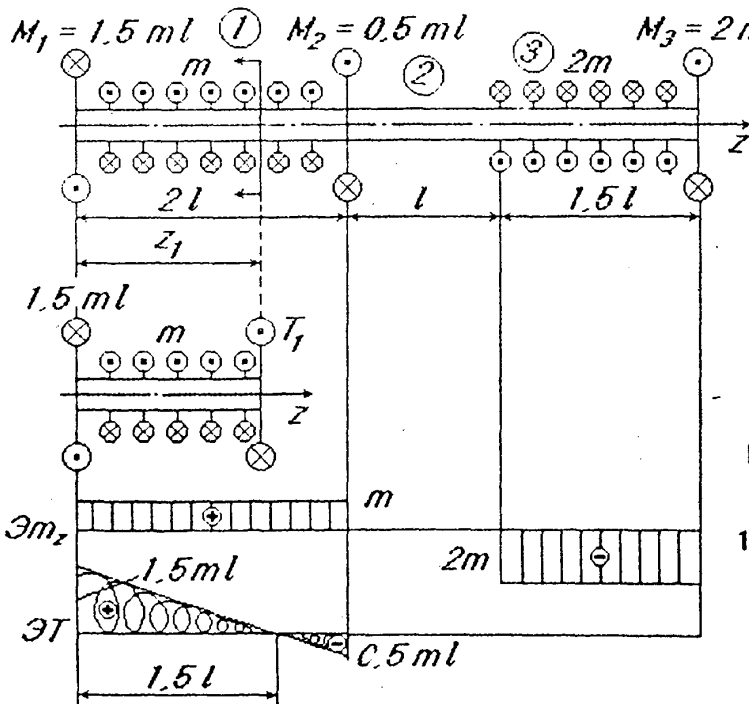
$$\sum M_z = T(z) - m_z dz - (T+dT) = 0; \quad \frac{dT}{dz} = -m_z$$

После интегрирования:  $T(z) = T(0) - \int_0^z m_z dz$

Здесь  $T(0)$  - постоянная интегрирования - значение крутящего момента в начале участка (при  $z = 0$ ).

**ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА**

Уравнение равновесия:  $\sum M_z = 1.5ml - m \cdot 2l - 0.5ml + 2m \cdot 1.5l - 2ml = 0$



Пример 2. Заданы

скручивающие  
сосредоточенные  
моменты:

$$M_1 = 1.5 ml,$$

$$M_2 = 0.5 ml,$$

$$M_3 = 2 ml$$

и распределенные  
моменты  $m$  и  $2m$ .

Построить  $\sum m_z$  и  $\sum T$ .

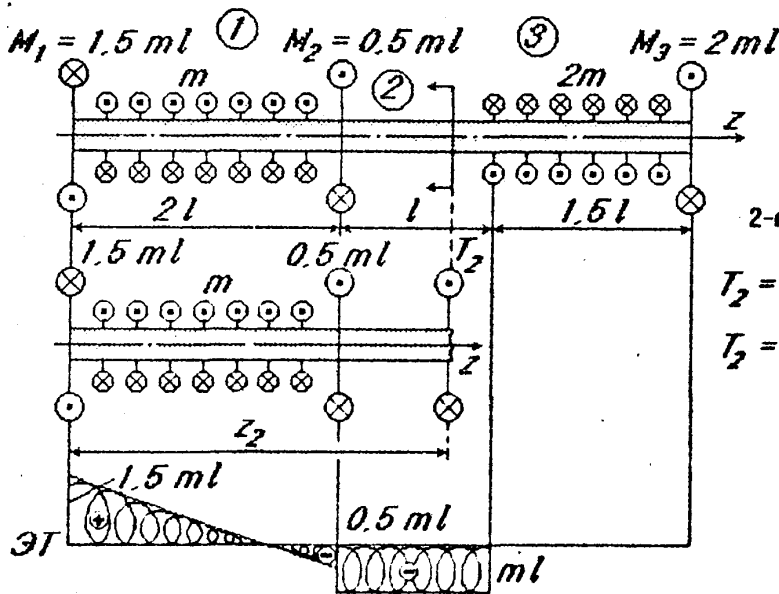
1-я участок ( $0 < z_1 < 2l$ )

$$T_1 = 1.5 ml - m \cdot z;$$

$$T(0) = 1.5 ml;$$

$$T(2l) = -0.5 ml.$$

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ (продолжение)



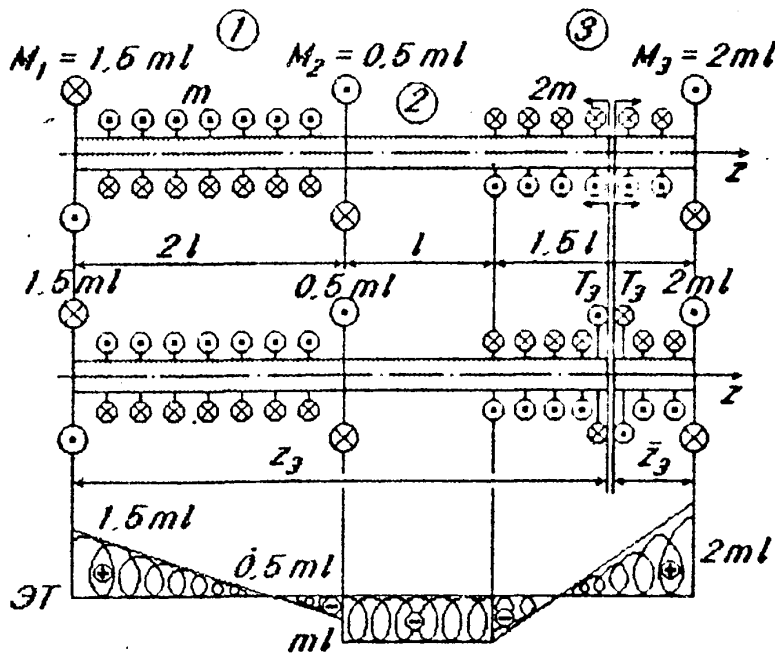
Пример 2.

2-я участок ( $2l < z_2 < 3l$ )

$$T_2 = 1.5ml - m \cdot 2l - 0.5ml$$

$$T_2 = -ml = const.$$

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ (продолжение)



Пример 2.

3-я участок

( $3l < z_3 < 4.5l$ )

$$T_3 = 1.5ml - m \cdot 2l - 0.5ml + 2m(z - 3l)$$

( $0 < \bar{z}_3 < 1.5l$ )

$$T_3 = 2ml - 2m \bar{z}_3$$

$$T_3(0) = 2ml$$

$$T_3(1.5l) = -ml$$

### КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ (ВАЛА) КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

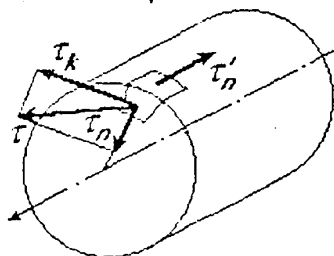
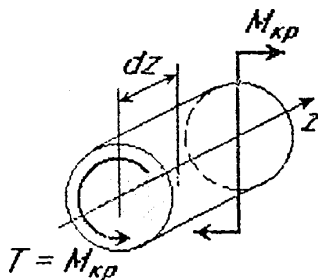
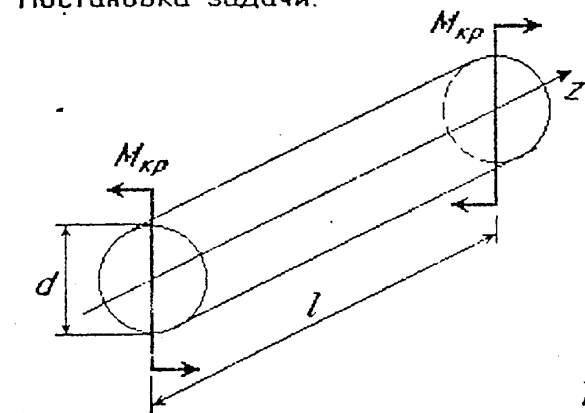
Напряжения в поперечном сечении вала при кручении.

Постановка задачи:

Дано:  $d, l, G, M_{кр}$

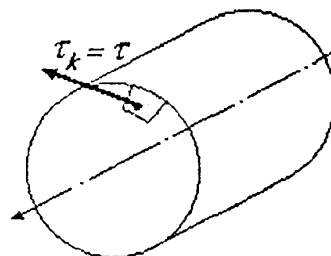
Определить:

$\tau = ? \theta = ? \varphi = ?$



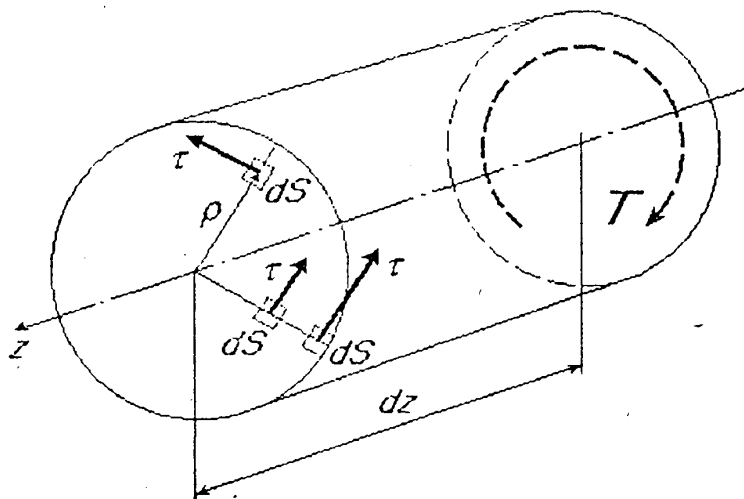
Касательные напряжения в поперечных сечениях для точек вблизи контура направлены по касательной к дуге контура

$$\tau_n = \tau'_n = 0; \quad \tau = \tau_k$$



### 1. СТАТИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Рассмотрим равновесие части стержня длиной dz



$$\sum M_z = 0;$$

$$T = \int_S \tau \rho dS \quad (1)$$

условия равновесия

$T$  - крутящий момент;

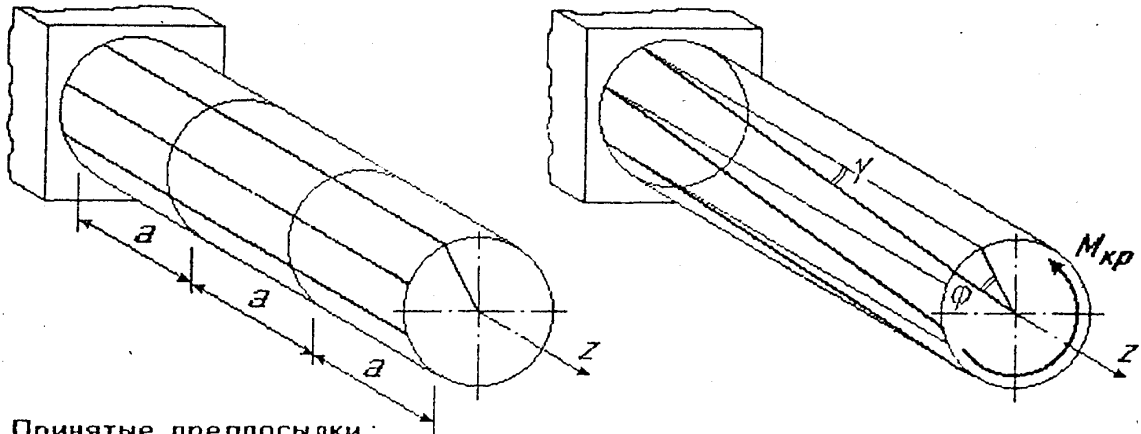
$\rho$  - расстояние от оси  $z$  вращения вала до площадки  $dS$ ;

Из условия равновесия (1) нельзя найти  $\tau = \tau(\rho)$ , так как выражению (1) удовлетворяют разные законы изменения  $\tau$  от  $\rho$ .

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

а) Вал до нагружения  
(до деформации)

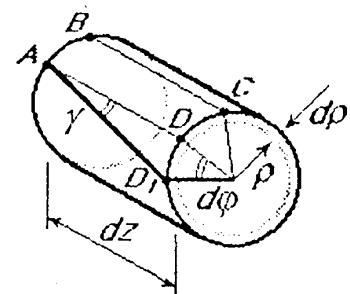
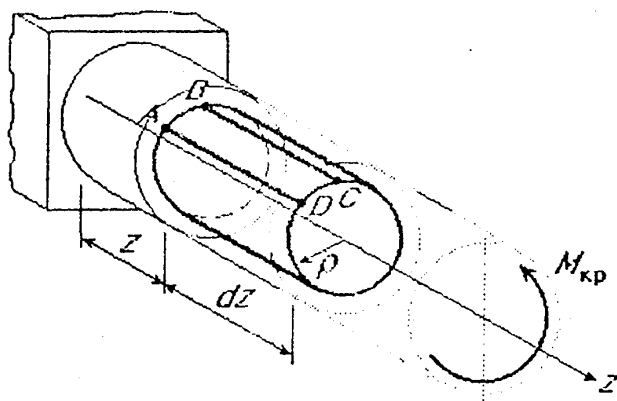
б) Вал в деформированном виде  
(после нагружения)



Принятые предпосылки:

- 1) Поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений - гипотеза Бернулли)
- 2) Радиусы в поперечных сечениях остаются прямыми и лежат в тех же плоскостях. Они поворачиваются на некоторый угол.
- 3) Расстояние между поперечными сечениями остаются неизменными и после деформации.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ (продолжение)



$$DD_1 = \rho d\phi = \gamma dz \quad (2)$$

- условия совместности деформаций;

$d\phi$  - угол поворота правого торцевого сечения DC относительно левого сечения AB;

$\gamma$  - угол сдвига цилиндрической поверхности.

Из выражения (2) имеем  $\gamma = \rho \frac{d\phi}{dz}$  (2\*)

Обозначим:  $\theta = \frac{d\phi}{dz}$  - относительный угол закручивания.

$$\gamma = \rho \theta \quad (2^{**})$$

### 3. ФИЗИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Для решения статических уравнений используем зависимость между напряжениями и деформациями (в пределах упругости - закон Гука):

$$\tau = G\gamma \quad (3) \quad \text{- закон Гука при сдвиге.}$$

Решаем систему уравнений (1) - (3) трех сторон задачи:

$$\tau = \rho G\theta \quad (4) \quad \text{Для сечения } G\theta = \text{const}$$

$\tau = f(\rho)$  - линейная функция.

Выражение (4) в уравнение (1):

$$T = \int_S \tau \rho dS = \int_S \rho G \theta \rho dS = G\theta \int_S \rho^2 dS$$

Обозначим:  $I_p = \int_S \rho^2 dS$  - полярный момент инерции сечения.

$$T = GI_p \theta \quad \text{или} \quad \theta = \frac{T}{GI_p} \left[ \frac{\text{рад}}{\text{м}} \right] \quad (5)$$

$GI_p$  - жесткость сечения вала при кручении.

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО СЕЧЕНИЮ ПРИ КРУЧЕНИИ

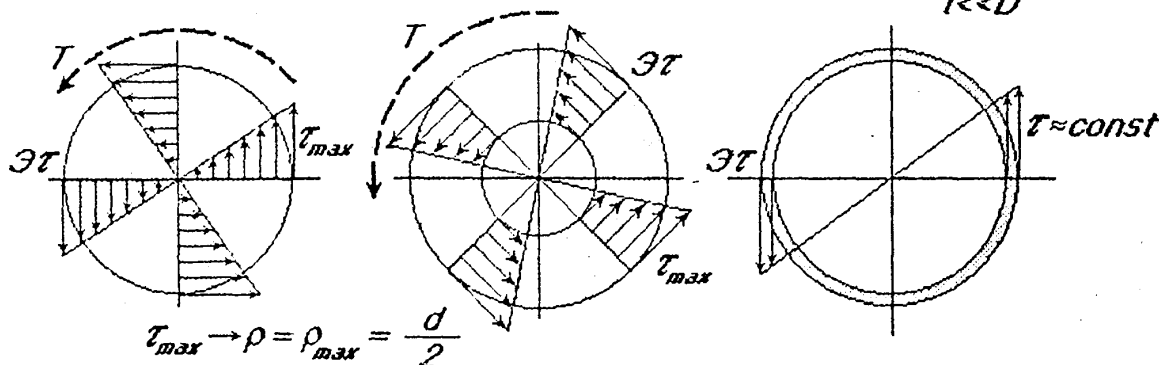
Выражение (5) в выражение (4)

$$\tau = \rho G \theta = \rho G \frac{T}{GI_p} \quad \boxed{\tau = \frac{T}{I_p} \rho} \quad (II)$$

а) сплошное круглое сечение

б) кольцевое сечение

в) тонкостенное кольцевое сечение (тонкостенная трубка)



$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \rho_{\max} \quad W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} \quad \text{- полярный момент сопротивления при кручении круглого поперечного сечения}$$

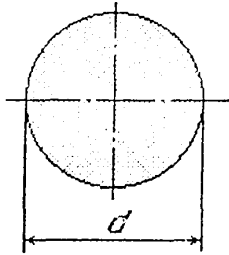
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯРНОГО МОМЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ

Полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения при кручении.

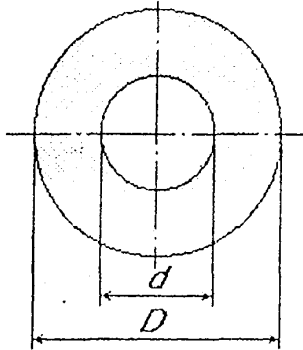
а) сплошное круглое сечение



$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad \rho_{\max} = \frac{d}{2};$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

б) кольцевое сечение

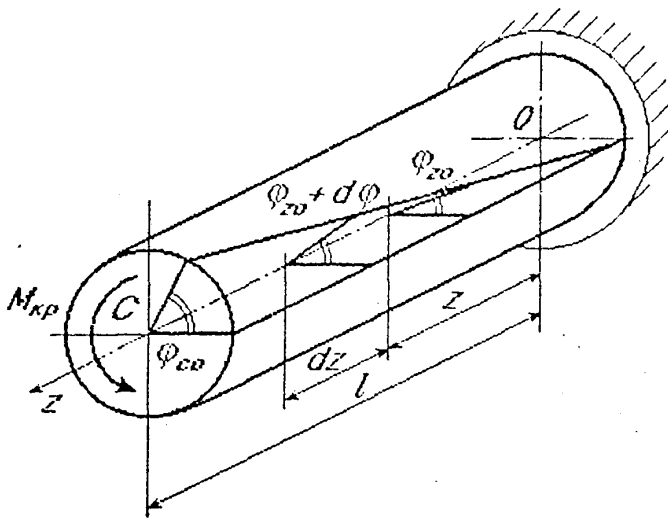


$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4)$$

$$c = \frac{d}{D}; \quad \rho_{\max} = \frac{D}{2};$$

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4);$$
~~$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{\pi d^3}{16}$$~~

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ



$$\theta = \frac{d\phi}{dz} = \frac{T}{Gl_p};$$

$$d\phi = \frac{T dz}{Gl_p};$$

$$\phi_{z0} = \int_0^z \frac{T dz}{Gl_p};$$

$$\phi_{св} = \int_0^l d\phi = \int_0^l \frac{T dz}{Gl_p};$$

Для постоянного сечения с постоянным крутящим моментом:

$$\phi_{z0} = \frac{Tz}{Gl_p}; \quad \phi_{св} = \frac{Tl}{Gl_p}$$

## УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Вал круглого поперечного сечения.

а) Условия прочности:

$$\max \tau < [\tau]; \quad [\tau] = \frac{\bar{\tau}}{[n]}$$

$$\bar{\tau} = \begin{cases} \tau_T - \text{пластичный материал;} \\ \tau_B - \text{хрупкий материал;} \end{cases}$$

$$\max \tau = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau].$$

Порядок расчета:

1. Выбор опасного сечения — ЭТ
2. Выбор опасной точки в сечении — Эτ
3. Материал вала
4. Условия прочности

УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ  
(продолжение)

б) Условия жесткости:

$$1) \max \theta = \frac{T_{\max}}{G I_D} \leq [\theta];$$

$$2) \max \varphi = [\varphi];$$

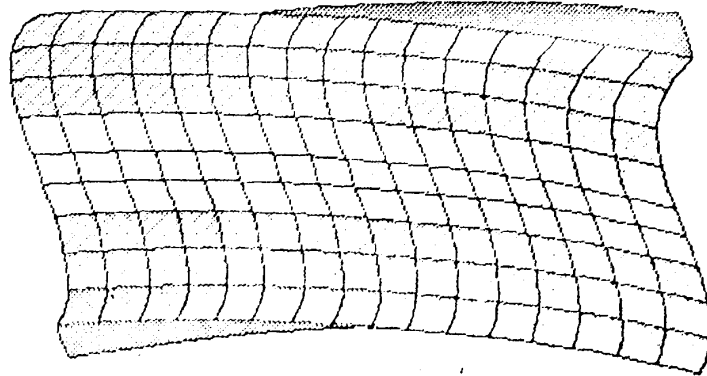
Здесь:  $[\theta]$  и  $[\varphi]$  - допустимые углы закручивания  
(относительный и абсолютный);

Порядок расчета:

1. Построение эпюры крутящих моментов (ЭТ)
2. Выбор опасного относительного угла закручивания Эθ
3. Выбор наибольшего угла закручивания Эφ
4. Условия жесткости по  $\max \theta$  и  $\max \varphi$ .

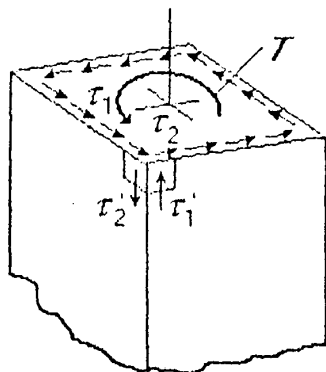
### КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ (ВАЛА) С НЕКРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Задача об определении напряжений в стержне не может быть решена методами сопротивления материалов. Гипотеза плоских сечений не применима.



Сечения стержня заметно искривляются. Общие соображения относительно распределения  $\tau$  и приведены готовые формулы.

### КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ



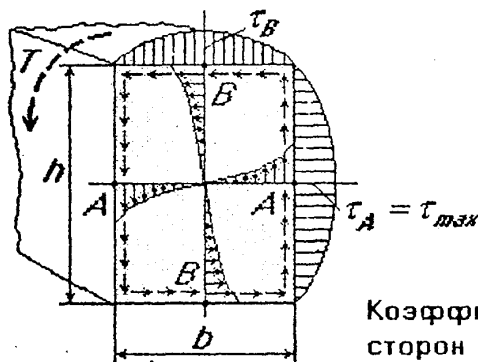
$$\tau_1 = \tau_1' = 0;$$

$$\tau_2 = \tau_2' = 0.$$

Касательные напряжения вблизи внешнего угла в поперечном сечении отсутствуют.

Касательные напряжения  $\tau$  вблизи контура направлены по касательной к контуру.

### КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ (продолжение)



$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{T}{\alpha h b^2}$$

$$\tau_B = \eta \tau_{\max}$$

$h$  - большая,  $b$  - малая стороны прямоугольника;

$$\theta = \frac{T}{G \beta h b^3}; \quad \varphi = \frac{T l}{G \beta h b^3}$$

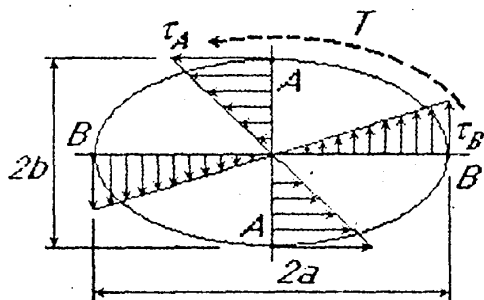
Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\eta$  зависят от отношения сторон  $h/b$  и числовые значения приведены в таблице.

$h/b$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	10	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.231	0.246	0.258	0.267	0.313	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.313	0.333
$\eta$	1.000	0.859	0.795	0.766	0.753	0.742	0.742

$W_k = \alpha h b^2$  - геометрический фактор прочности;

$I_k = \beta h b^3$  - геометрический фактор жесткости.

### КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ



$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{2T}{\pi a b^2}$$

$$\tau_B = \frac{2T}{\pi b a^2}$$

$$\theta = \frac{T}{G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}$$

$$\varphi = \frac{T l}{G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}$$

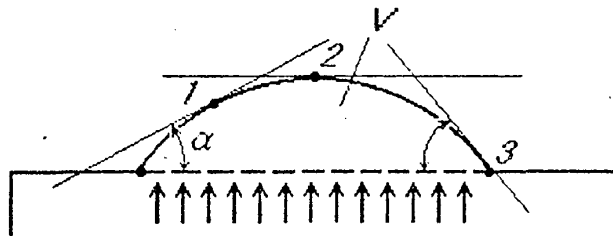
### ПОНЯТИЕ О МЕМБРАННОЙ (ПЛЕНОЧНОЙ) АНАЛОГИИ

В задачах механики совершенно различные по физической сущности задачи сводятся к одним и тем же дифференциальным уравнениям. Задача о кручении стержня любого поперечного сечения сводится к тому же дифференциальному уравнению, что и задача о равновесии пленки, натянутой по контуру того же очертания и нагруженной равномерно распределенным давлением.



а) направление  $\tau$  в какой-либо точке сечения стержня совпадает с касательной к горизонтали изогнутой поверхности пленки;

### ПОНЯТИЕ О МЕМБРАННОЙ (ПЛЕНОЧНОЙ) АНАЛОГИИ (продолжение)



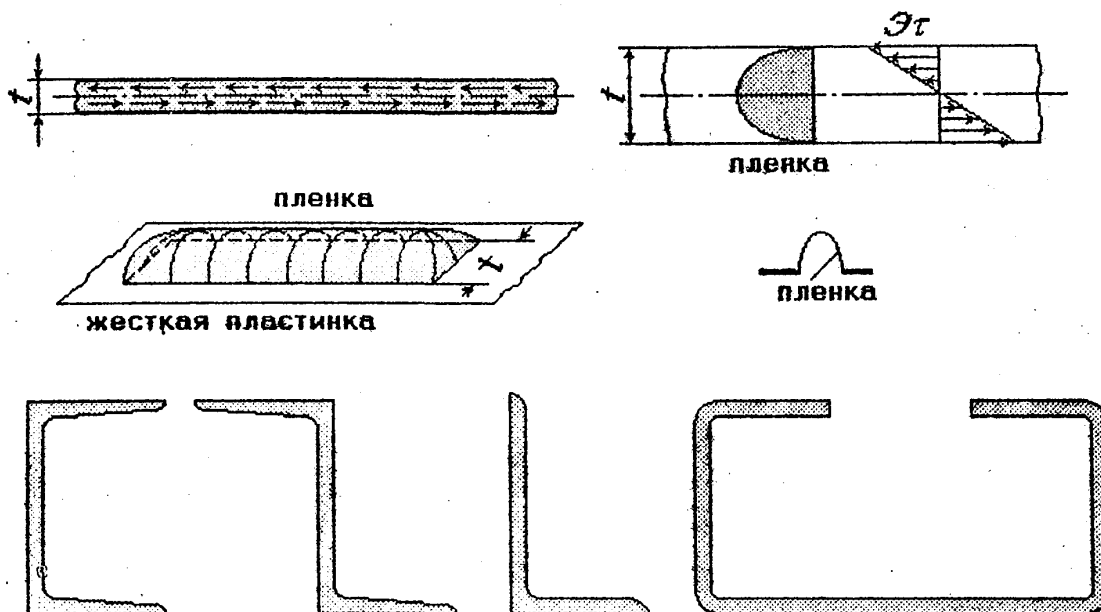
б) величина  $\tau \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha$  в точке поперечного сечения пропорционально тангенсу угла между линией наибольшего ската в соответствующей точке и плоскостью сечения.

в) аналогом крутящего момента  $T$  является объем, заключенный между поверхностью пленки и плоскостью контура сечения.

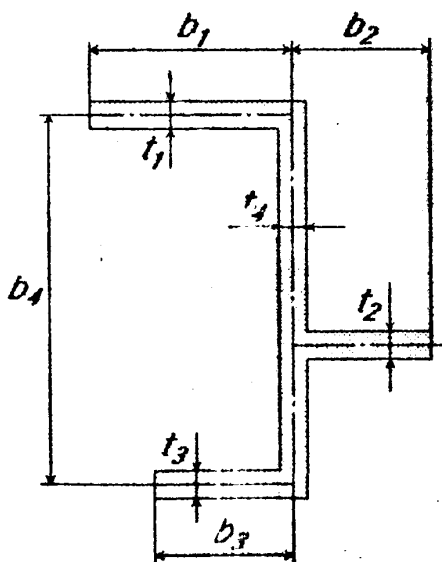
$$T \Rightarrow V$$

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Типичные формы профилей .



КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ  
(продолжение)



$$\tau_{max} = \frac{T t_{max}}{I_k};$$

$$\theta = \frac{T}{G I_k};$$

$$\varphi = \frac{T l}{G I_k};$$

$$I_k = \frac{1}{3} \eta \sum_{i=1}^n b_i t_i^3;$$

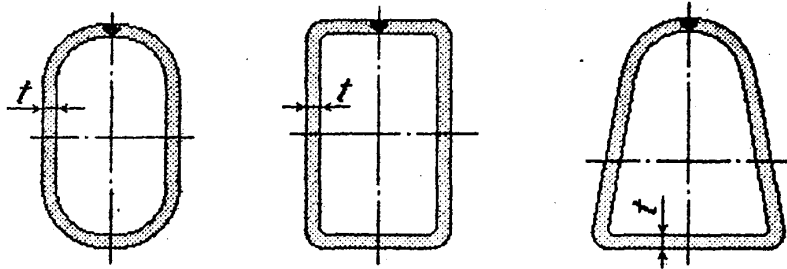
$I_k$  - геометрический фактор жесткости при кручении открытого профиля;

$\eta$  - коэффициент, учитывающий места перехода сечений.

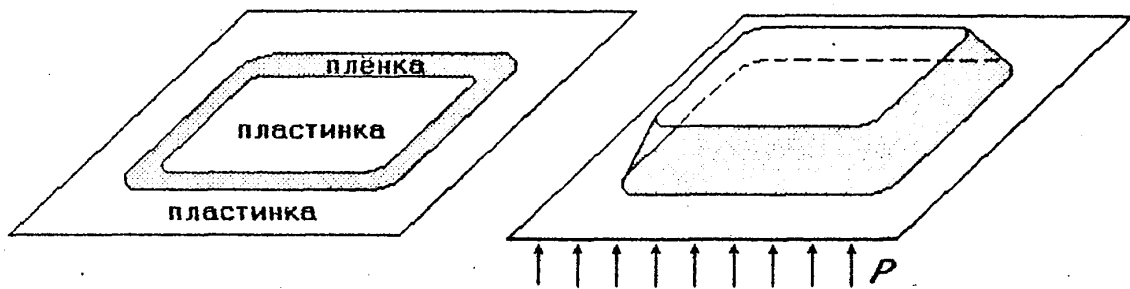
$$\eta = 1.05 \dots 1.20; \text{ обычно } \eta \approx 1.0$$

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

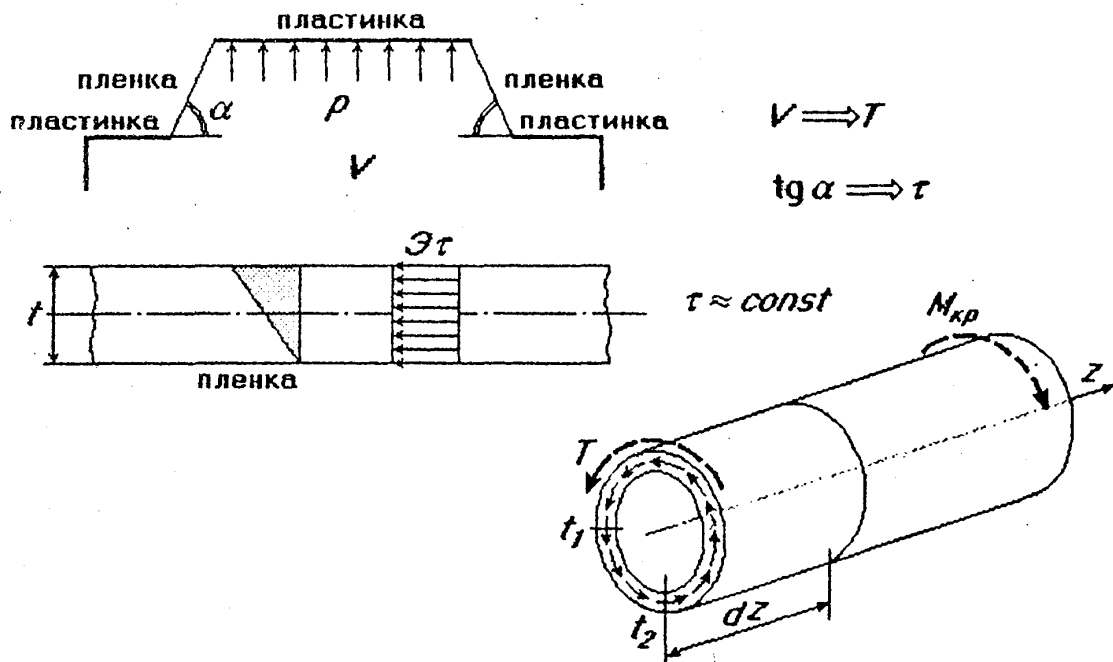
Типичные формы профиля



Плёночная аналогия

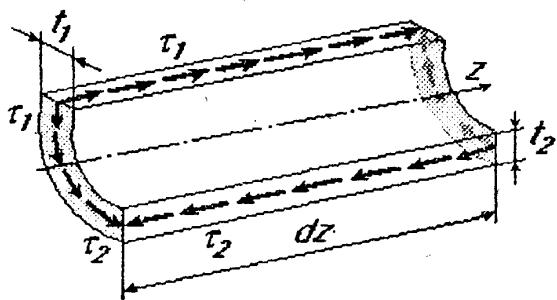


КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ  
(продолжение)



©Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

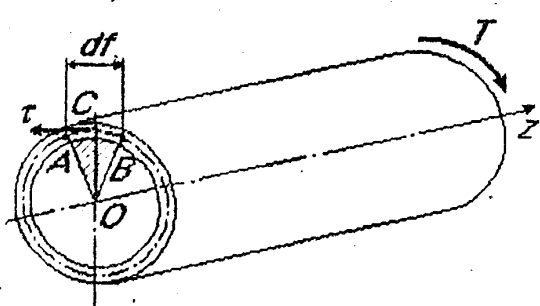
КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ  
(продолжение)



$$\sum F_{xz} = \tau_1 t_1 dz - \tau_2 t_2 dz = 0;$$

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \tau; t_1 = \tau t = const;$$

$$\tau_{max} t_{min} = \tau_{min} t_{max} = const;$$



$$dS = AB \cdot t = t \cdot df; AB \cdot OC = 2S_{\Delta OAB};$$

$$T = \int_S \tau \cdot dS \cdot OC = \int_f \tau \cdot t \cdot OC \cdot df =$$

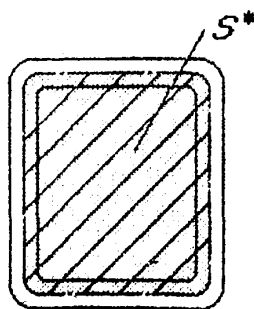
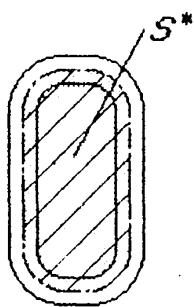
$$= \tau t \int OC \cdot df = \tau t 2S^*;$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{t_{min} 2S^*}.$$

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ  
(продолжение)

Здесь:  $f$  - периметр поперечного сечения (длина средней линии);

$S^*$  - площадь, ограниченная средней линией профиля.

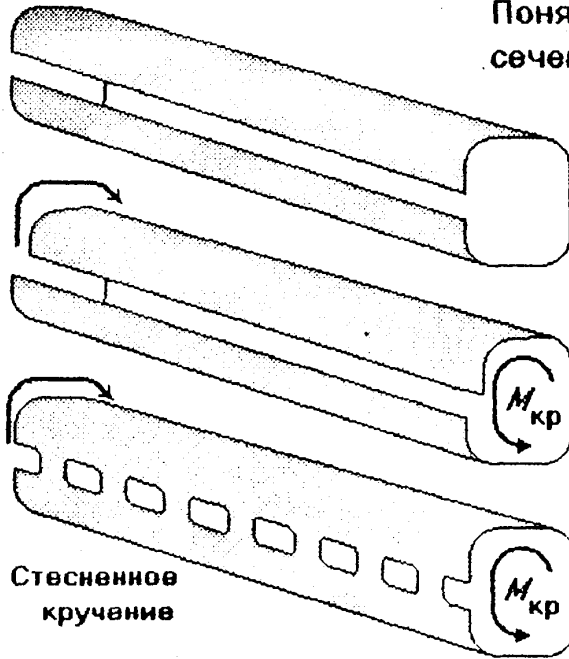


$$\theta = \frac{T \cdot f}{4G(S^*)^2 t}$$



**СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ**

Понятие о деформации поперечных сечений и стесненном кручении

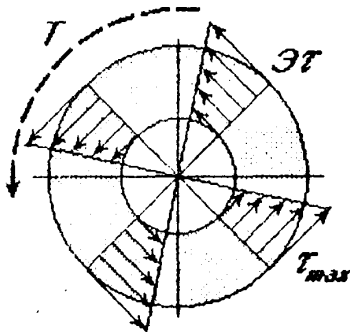


При кручении тонкостенного открытого профиля поперечное сечение выходит из своей начальной плоскости - происходит деформация сечения.

Ограничение деформации приводит к повышению жесткости и прочности стержня. Кручение в таких условиях носит название стесненного кручения.

Стесненное кручение

**РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ (ВАЛА) ПРИ КРУЧЕНИИ**



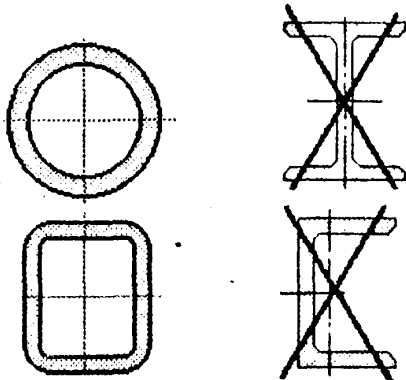
Условия прочности:

$$\max \tau < [\tau]; \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_k}$$

Для круглого поперечного сечения:

$$W_k \Rightarrow W_p$$

$$\psi_k = \sqrt{\frac{W_k^2}{S^3}}$$



Тип сечения	$\psi_k$
Швеллер, двутавр	0,04... 0,07
Прямоугольник $h/b=10$	0,1
Квадрат	0,21
Круглое сечение	0,28
Кольцевое сечение: $c = d/D = 0,5$ $c = 0,9$	0,37 1,16

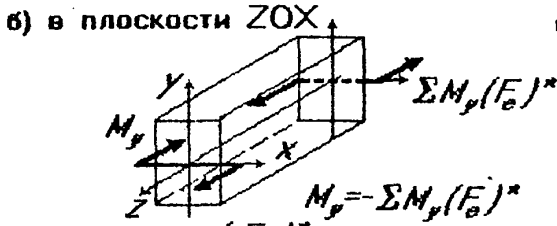
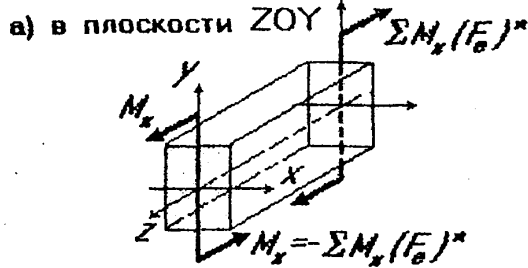
© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

ИЗГИБ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

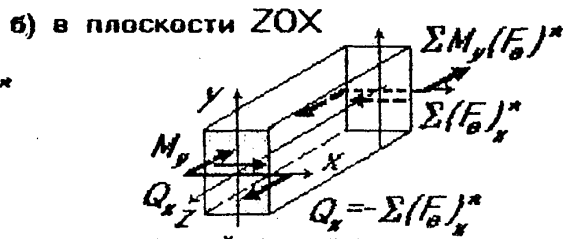
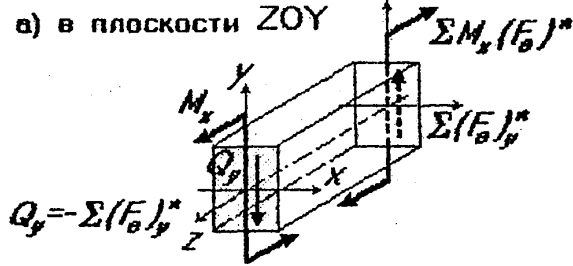
Изгиб - вид нагружения стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  ( $N=0, T=0$ )

Классификация видов изгиба:

1. Чистый изгиб

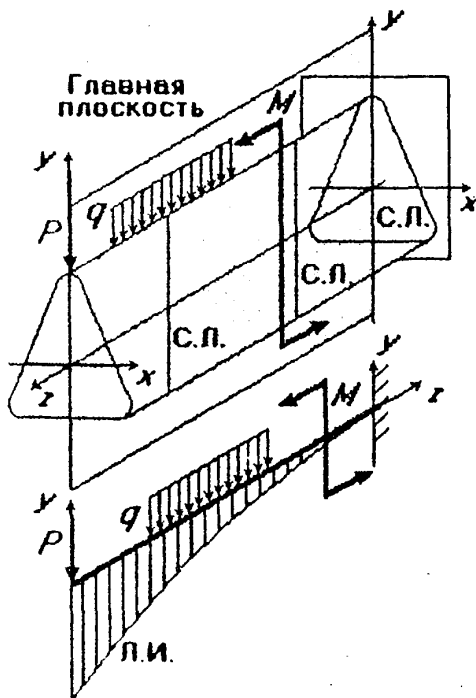


2. Поперечный изгиб



Здесь символ  $(F_0)^*$  обозначает внешние силы, действующие на отсеченную часть.

КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ ИЗГИБА



Плоский, прямой и косой изгибы.

Если все нагрузки и реакции связей действуют в одной плоскости, являющейся главной плоскостью стержня, то изгиб называется плоским.

Балка - это прямой стержень, работающий при плоском изгибе.

Силовая линия (С.Л.) - след пересечения плоскости действия В.С.Ф. ( $M$  и  $Q$ ) с плоскостью поперечного сечения.

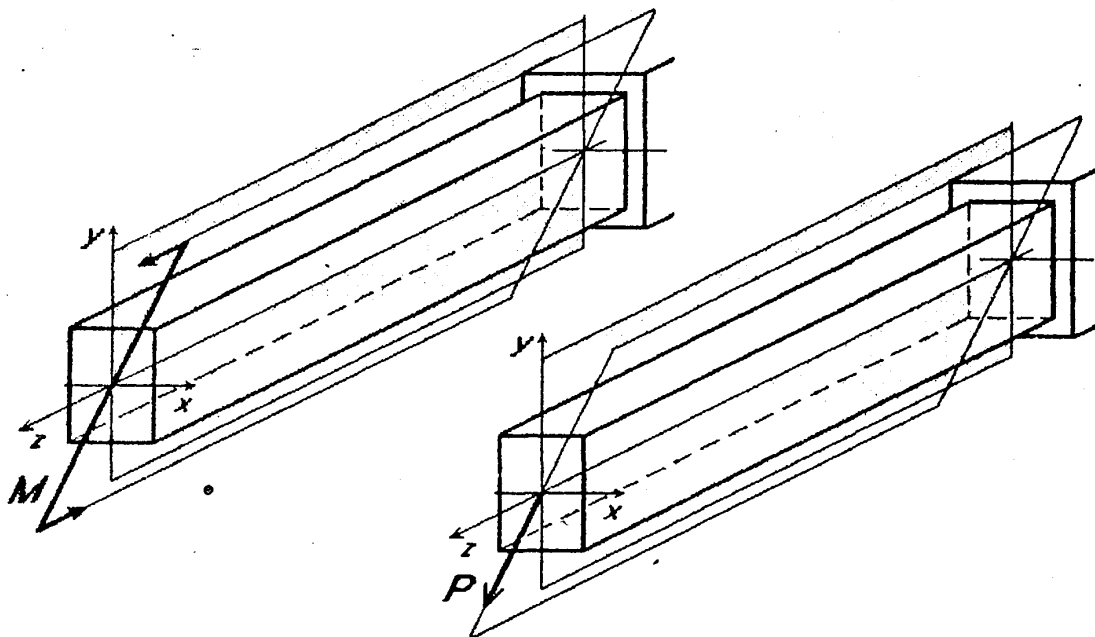
Линия изгиба (Л.И.) - направление перемещения при изгибе точки центра тяжести сечения.

Прямой изгиб - С.Л. и Л.И. совпадают.

Косой изгиб - С.Л. и Л.И. не совпадают.

## КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ ИЗГИБА ( продолжение )

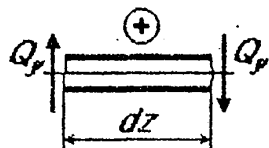
Примеры косоугольного изгиба :

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ  
( В С Ф ) В БАЛКЕ

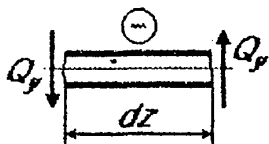
Расчетная схема балки изображается линией, представляющей собой ось стержня.

Для наглядного представления характера изменения В С Ф по длине балки строят эпюры.

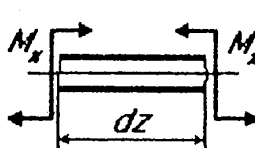
## ПРАВИЛА ЗНАКОВ :

а) для поперечной силы  $Q_y$ б) для изгибающего момента  $M_x$  :

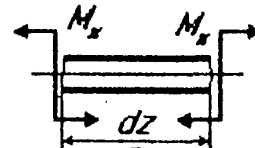
Поворот элемента  $dz$   
по часовой стрелки



Поворот элемента  $dz$   
против часовой стрелки

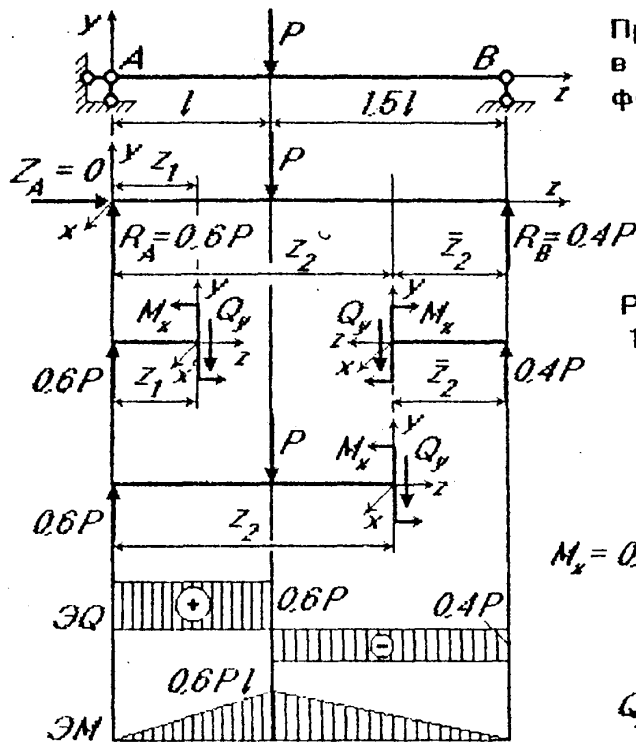


Сжатые верхние  
волокна



Сжатые нижние  
волокна

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ БАЛКИ



Пример 1. Построить эпюры ВСФ в балке путем определения функций  $Q_y = Q_y(z)$  и  $M_x = M_x(z)$ .

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= P \cdot l - R_B \cdot 2.5l = 0; \\ \Sigma M_B &= P \cdot 1.5l - R_A \cdot 2.5l = 0; \\ R_B &= 0.4P; \quad R_A = 0.6P. \end{aligned}$$

Разобьем балку на два участка:  
1-й участок ( $0 < z_1 < l$ )

$$Q_y = 0.6P; \quad M_x = 0.6P \cdot z_1;$$

2-й участок ( $l < z_2 < 2.5l$ )

$$Q_y = 0.6P - P = -0.4P;$$

$$M_x = 0.6P \cdot z_2 - P(z_2 - l) = Pl - 0.4P \cdot z_2;$$

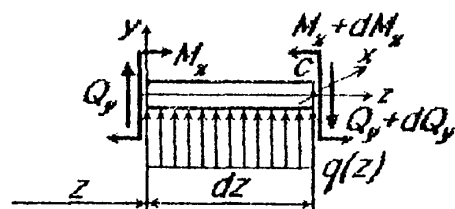
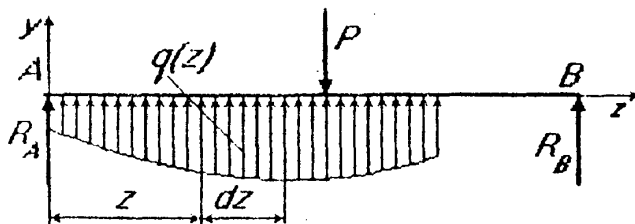
$$(0 < \bar{z}_2 < 1.5l)$$

$$Q_y = -0.4P; \quad M_x = 0.4P \cdot \bar{z}_2;$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВСФ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Зависимости для прямого стержня (балки).

Балка находится в равновесии под действием системы внешних сил (активных и реактивных).



Условия равновесия для выделенного элемента dz:

$q(z), Q_y$  и  $M_x$  - положительные.

$$\Sigma Y = Q_y + q(z)dz - (Q_y + dQ_y) = 0; \quad \Sigma M_{xc} = M_x + Q_y \cdot dz + q \cdot dz \cdot \frac{1}{2} dz - (M_x + dM_x) = 0;$$

Дифференциальные зависимости:

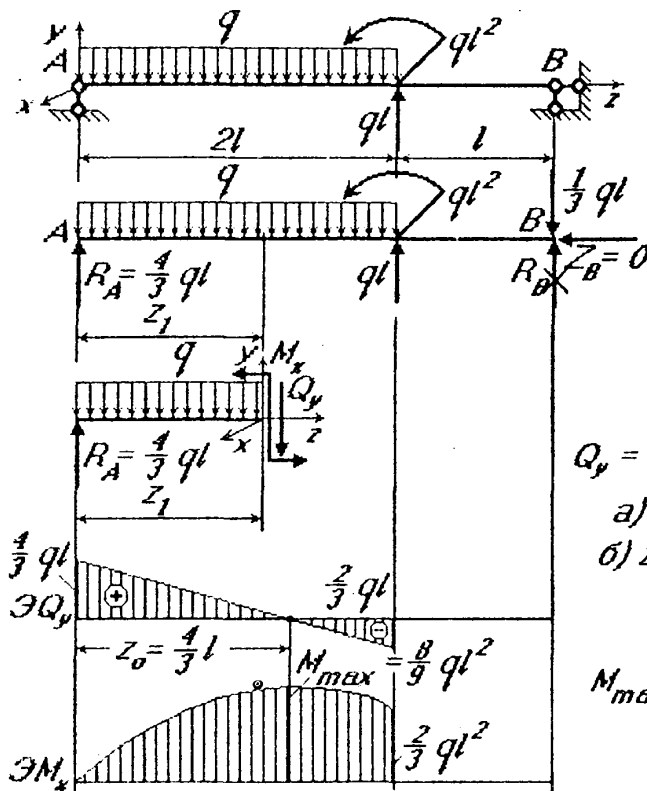
Интегральные зависимости:

$$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz}; \quad q = \frac{d^2M}{dz^2}$$

$$Q(z) = Q(0) + \int_0^z q dz; \quad M(z) = M(0) + \int_0^z Q dz;$$

Здесь  $Q(0)$  и  $M(0)$  - постоянные интегрирования поперечная сила и изгибающий момент в начале участка (при  $z = 0$ )

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ



$$\Sigma M_A = q \cdot 2l \cdot l - ql^2 \cdot ql \cdot 2l - R_B \cdot 3l = 0;$$

$$\Sigma M_B = R_A \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot 2l - ql^2 + ql \cdot l = 0;$$

$$R_B = -\frac{1}{3} ql; \quad R_A = \frac{4}{3} ql;$$

Проверка:

$$\Sigma Y = \frac{4}{3} ql - q \cdot 2l + ql - \frac{1}{3} ql = 0;$$

1-ый участок:  
( $0 < z_1 < 2l$ )

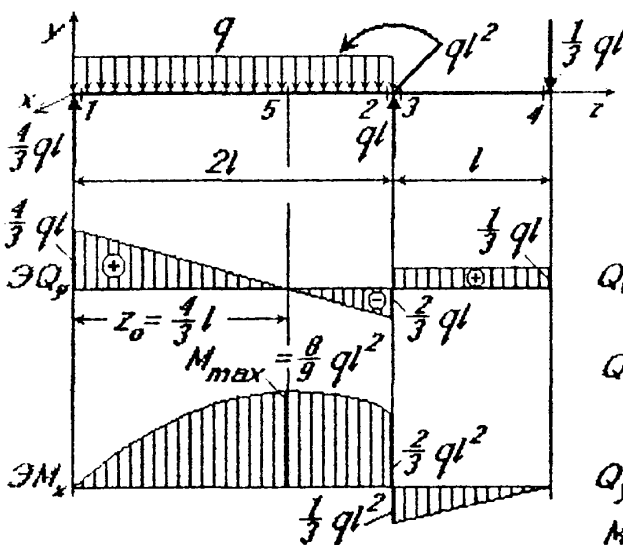
$$Q_y = \frac{4}{3} ql - q \cdot z_1; \quad M_x = \frac{4}{3} ql \cdot z_1 - q \cdot z_1 \cdot \frac{1}{2} z_1;$$

а)  $z_1 = 0: Q_y = \frac{4}{3} ql; \quad M_x = 0;$   
 б)  $z_1 = 2l: Q_y = -\frac{2}{3} ql; \quad M_x = \frac{2}{3} ql^2;$

$$Q_0 = \frac{4}{3} ql - q \cdot z_0 = 0; \quad z_0 = \frac{4}{3} l;$$

$$M_{max} = \frac{4}{3} ql \cdot \frac{4}{3} l - q \cdot \frac{4}{3} l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} l = \frac{8}{9} ql^2;$$

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ( $\Sigma Q_y$  и  $\Sigma M_x$ ) ПО СЕЧЕНИЯМ (по точкам)



$$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz}; \quad q = \frac{d^2 M}{dz^2}$$

- 1)  $q = 0:$   
 $Q(z) = const; \quad M(z) = az + b;$
- 2)  $q = const:$   
 $Q(z) = az + b; \quad M(z) = az^2 + bz + c;$
- 3)  $q = az + b:$   
 $Q(z) = az^2 + bz + c; \quad M(z) = az^3 + bz^2 + cz + d;$

Участок 1-2:  $q(z) = -q;$

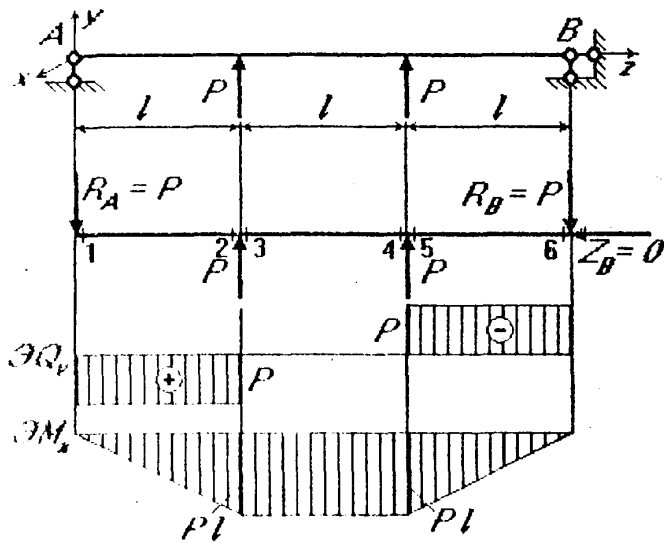
$$Q_{y1} = \frac{4}{3} ql; \quad Q_{y2} = \frac{4}{3} ql - q \cdot 2l = -\frac{2}{3} ql;$$

$$M_{x1} = 0; \quad M_{x2} = \frac{4}{3} ql \cdot 2l - q \cdot 2l \cdot l = \frac{2}{3} ql^2;$$

Участок 3-4:  $q(z) = 0; \quad Q_{x3} = Q_{x4} = \frac{1}{3} ql; \quad M_{x4} = 0; \quad M_{x3} = \frac{1}{3} ql \cdot l = \frac{1}{3} ql^2;$   
 сжатые нижние волокна

$$M_{x5} = M_{max} = \frac{4}{3} ql \cdot \frac{4}{3} l - q \cdot \frac{4}{3} l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} l = \frac{8}{9} ql^2$$

ПРЯМОЙ ЧИСТЫЙ ИЗГИБ



$$\begin{aligned}
 Q_1 &= Q_2 = -P; \\
 Q_3 &= Q_4 = 0; \\
 Q_5 &= Q_6 = P; \\
 M_{x1} &= 0; \\
 M_{x2} &= M_{x3} = Pl \text{ (сжатие} \\
 &\quad \text{нижних волокна)} \\
 M_{x4} &= M_{x5} = Pl; \\
 M_{x6} &= 0;
 \end{aligned}$$

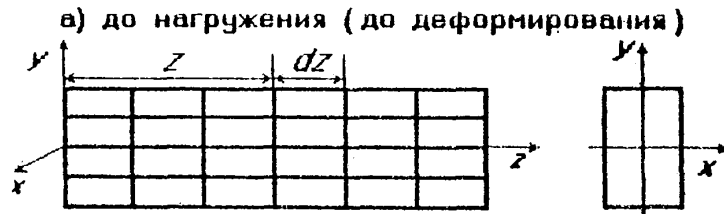
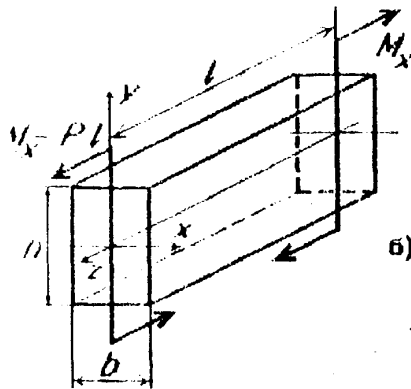
Участок 3-4 находится в условиях прямого чистого изгиба.

$$Q_3 = Q_4 = 0; \quad M_{x3} = M_{x4} = Pl = const;$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ ИЗОГНУТОЙ ОСИ И НАПРЯЖЕНИЙ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ПРИ ПРЯМОМ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Постановка задачи:

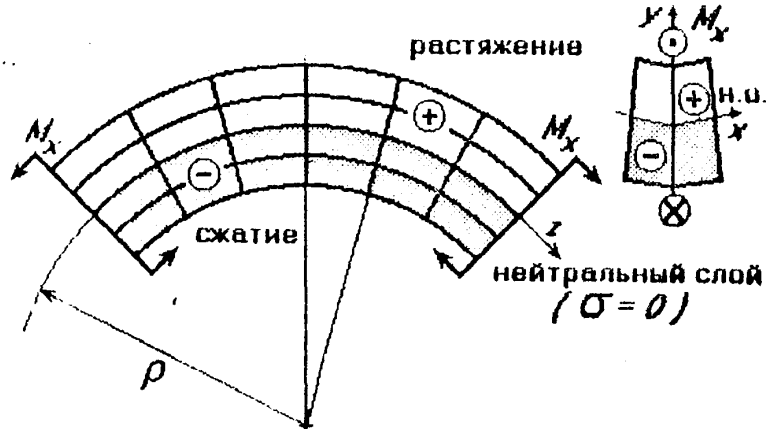
Механизм деформирования:



б) в деформированном виде (после нагружения)

Дано:  
 $M_x = Pl, l, h \times b, E$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} &= ? & \sigma &= ? \\
 & & \tau &= ?
 \end{aligned}$$



## МЕХАНИЗМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ (продолжение)

- 1) Каждый слой искривляется:  
часть слоев растянута (верхняя),  
другая - сжата (нижняя)
- НЕЙТРАЛЬНЫЙ СЛОЙ - не деформируется, длина Н.С. равна длине стержня до деформации.
- 2) НЕЙТРАЛЬНАЯ ОСЬ - линия пересечения Н.С. с плоскостью поперечного сечения.
- 3) Поперечные сечения поворачиваются относительно нейтральных осей - оставаясь плоскими.

## НЕИЗВЕСТНО:

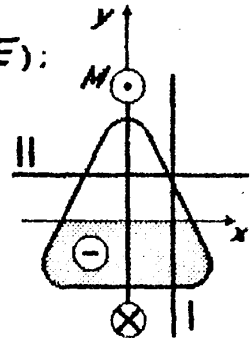
- 1) положение Н.О. (ось  $x$ ) по высоте сечения;
- 2)  $\sigma = \sigma(x, y)$  - закон распределения напряжений.

## ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ:

- 1) материал - сплошной, однородный, изотропный, идеально упругий (закон Гука  $\sigma = E\varepsilon$ ;  $E_p = E_c = E$ );
- 2) гипотеза о естественном состоянии материала.  
Напряжения в сечениях I и II  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  -  
в этих сечениях нет силовых факторов.

$$\sigma_x = \sigma = \sigma(x, y).$$

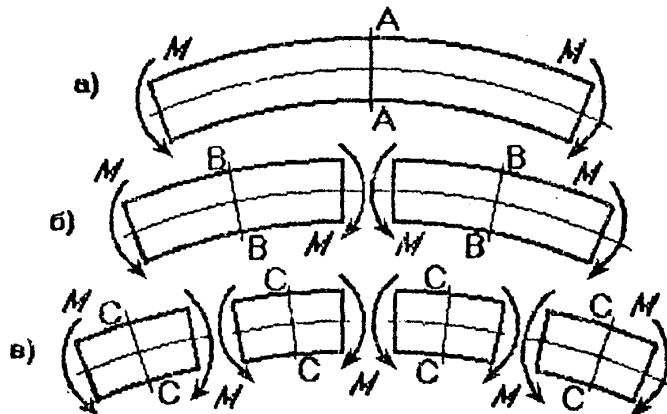
- 3) перемещения поперечных сечений (углы поворота) и точек стержня малы по сравнению с размерами поперечного сечения.



## МЕХАНИЗМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ (продолжение)

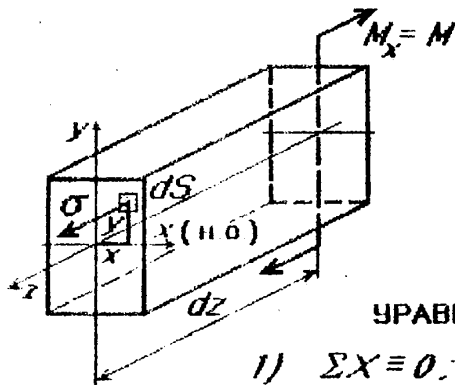
- 4) ГИПОТЕЗА плоских сечений (гипотеза Бернулли) - сечения плоские до деформации и перпендикулярные к оси стержня остаются плоскими после деформации и перпендикулярными к изогнутой оси стержня.

Для стержня постоянного сечения гипотеза Бернулли доказывается из симметрии нагружения.



### 1. СТАТИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Рассмотрим равновесие части стержня (балки) длиной  $dz$ :



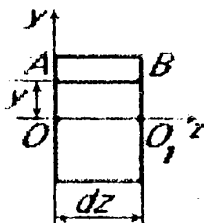
$x$  - нейтральная ось;  
 $y$  - силовая линия (линия изгиба);  
 $\tau = 0$ , т.к.  $Q_x = Q_y = 0$ ;  $T = 0$ ;

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \Sigma X &\equiv 0; & 3) \quad \Sigma Z &= \int_S \sigma dS = 0; \\ 2) \quad \Sigma Y &\equiv 0; & 5) \quad \Sigma M_y &= \int_S \sigma \cdot x \cdot dS = 0; \\ 4) \quad \Sigma M_z &\equiv 0; & 6) \quad \Sigma M_x &= M - \int_S \sigma \cdot y \cdot dS = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

### 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Рассмотрим элемент  $dz$  до и после деформации:



$OO_1$  - нейтральный слой (длиной  $dz$ );  
 $\rho$  - радиус кривизны нейтрального слоя;  
 $d\theta$  - угол поворота сечений;

$$dz = \widehat{OO_1} = \rho \cdot d\theta;$$

$$\Delta(dz) = \widehat{AB} - \widehat{OO_1} = (\rho + y) d\theta - \rho \cdot d\theta = y d\theta;$$

$$\epsilon_{AB} = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{y d\theta}{\rho \cdot d\theta}.$$

УСЛОВИЯ СОВМЕСТИМОСТИ ДЕФОРМАЦИИ:

$$\boxed{\epsilon = \frac{y}{\rho}} \quad (2) \text{ линейная функция от } y;$$

Связь между  $\rho$  и  $d\theta$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} = \kappa(z) \text{ - кривизна нейтрального слоя не зависит от координат произвольной точки } x \text{ и } y.$$



## 3. ФИЗИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

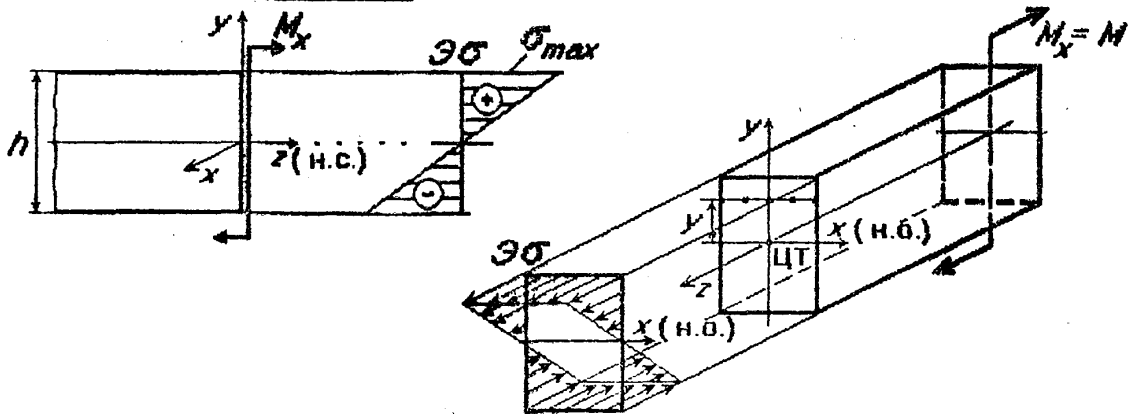
Для решения статических уравнений (1) и (2) используем зависимость между напряжениями и деформациями (в пределах упругости - закон Гука).

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (3)$$

$$E = E(x, y) = \text{const.}$$

Решение совместно уравнений (1) - (3): (3)  $\rightarrow$  (2)

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (4) \quad E \text{ и } \rho \text{ — для сечения постоянные.}$$



## 4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ (1) - (4)

Подставим выражение (4) в уравнения равновесия (1):

1. в уравнение 3):

$$\int_S \sigma dS = \frac{E}{\rho} \int_S y dS = \frac{E}{\rho} \cdot S_x = 0; \quad \frac{E}{\rho} \neq 0;$$

$S_x = 0$  - нейтральная ось  $x$  проходит через центр тяжести сечения.

2. в уравнение 5):

$$\int_S \sigma \cdot x dS = \frac{E}{\rho} \int_S x \cdot y dS = \frac{E}{\rho} \cdot I_{xy} = 0;$$

$I_{xy} = 0$  - нейтральная ось  $x$  и силовая линия  $y$  - главные и центральные оси поперечного сечения.

Оси  $x$  и  $y$  - взаимноперпендикулярны.

3. в уравнение 6): 
$$M = \int_S \sigma \cdot y dS = \frac{E}{\rho} \int_S y^2 dS = \frac{E}{\rho} \cdot I_x;$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (5)$$

$EI_x$  - жесткость сечения стержня при изгибе (в плоскости  $yoz$ )

$$M_x = M(z) = \text{const.}; \quad EI_x = EI_x(z) = \text{const.};$$

$\frac{1}{\rho} = \alpha(z) = \text{const}$  - при чистом изгибе стержень постоянного сечения изгибается по дуге окружности.

НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ  
ПРИ ПРЯМОМ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Выражение (5) → (4):

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = \frac{EM_x}{EI_x} y;$$

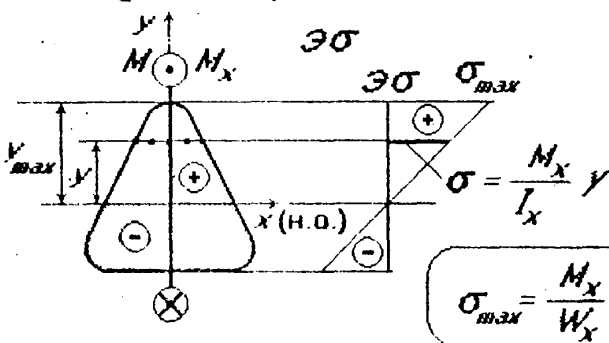
$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \quad (III)$$

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y$$

— формула получена без учета знаков для  $M$  и  $y$ .

$M$  и  $y$  подставляются без знака (по модулю); знак  $\sigma$  определяется по эпюре  $M$  (правило сжатого волокна) и положению точки (сверху или снизу от оси стержня).

При прямом чистом изгибе силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей сечения, тогда другая главная центральная ось будет нейтральной осью.



$$S_x = 0; I_{xy} = 0;$$

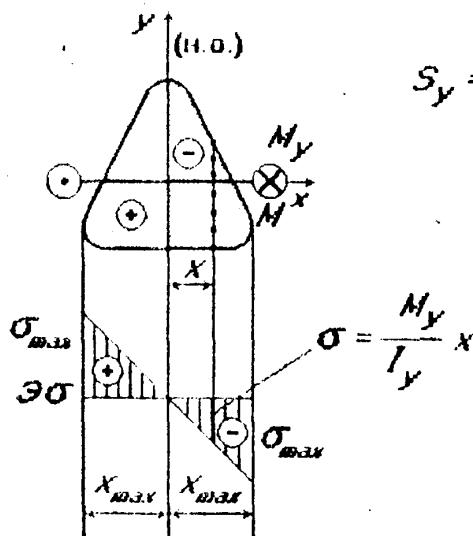
$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} y_{max} = \frac{M_x}{W_x}$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} \quad \text{момент сопротивления сечения изгибу (относительно оси } x \text{)}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x}$$

НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ  
ПРИ ПРЯМОМ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ (продолжение)

При прямом чистом изгибе силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей сечения, тогда другая главная центральная ось будет нейтральной осью.



$$S_y = 0; I_{xy} = 0;$$

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_y}{W_y}$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{max}} \quad \text{момент сопротивления сечения изгибу (относительно оси } y \text{)}$$

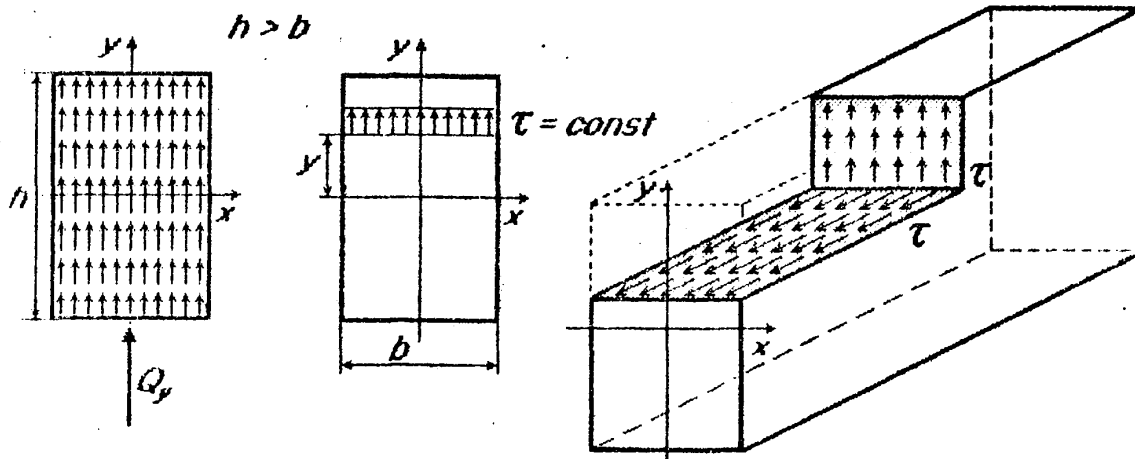
$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} x \quad (III)$$

### НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

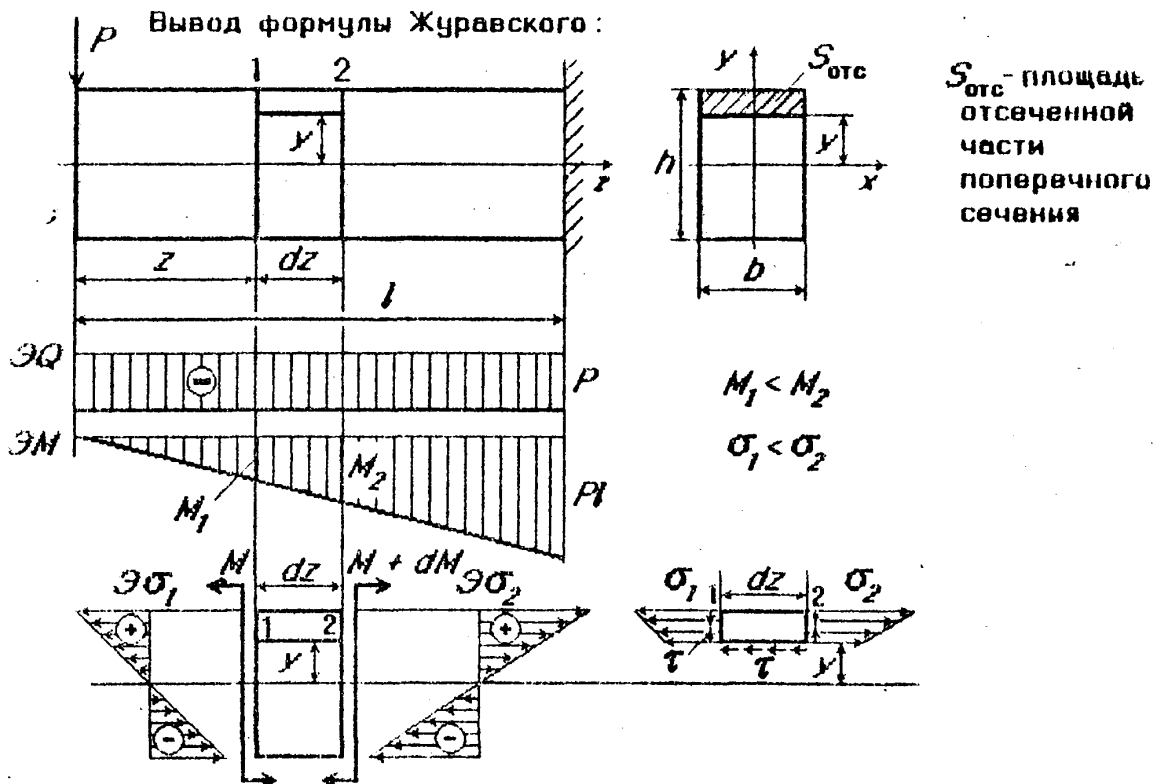
Определение касательных напряжений при поперечном изгибе  
( формула Журавского )

Допущения :

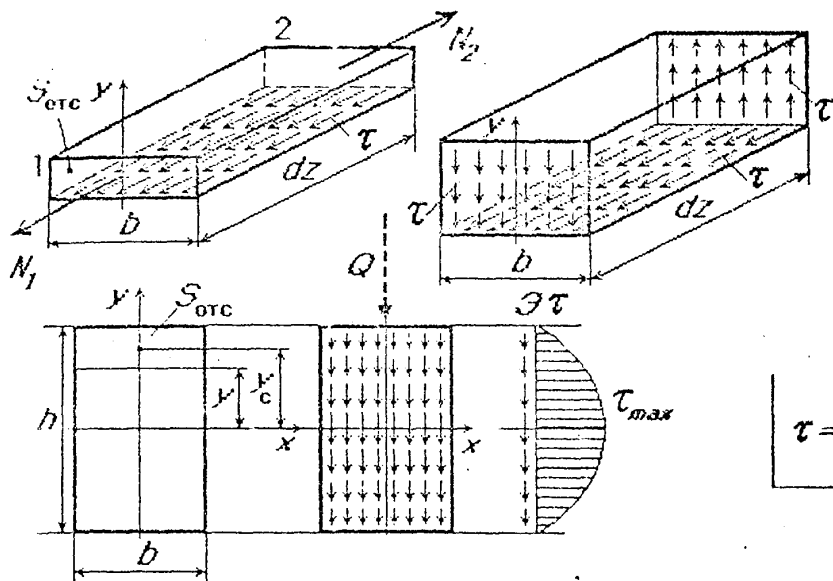
- 1) касательные напряжения в точках сечения направлены параллельно поперечной силе  $Q_y$  ;
- 2) касательные напряжения в точках сечения , расположенных на одном уровне , по величине равны между собой :



### КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ



КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ



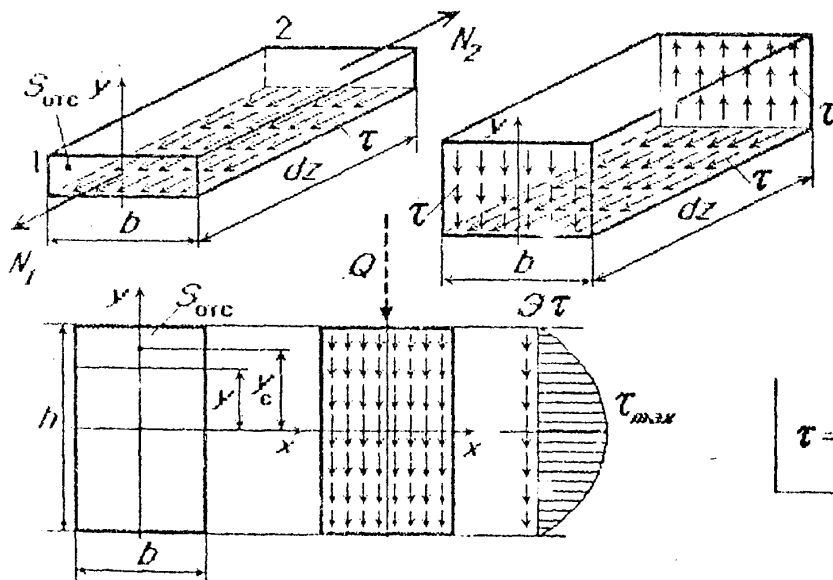
Касательные напряжения в поперечных сечениях равны касательным напряжениям в продольных сечениях, как парные им.

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b}$$

$$S_x^{\text{отс}} = S_{\text{отс}} \cdot y_c = \left(\frac{h}{2} - y\right) b \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \quad I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad b = b;$$

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \quad \tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}$$

КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ



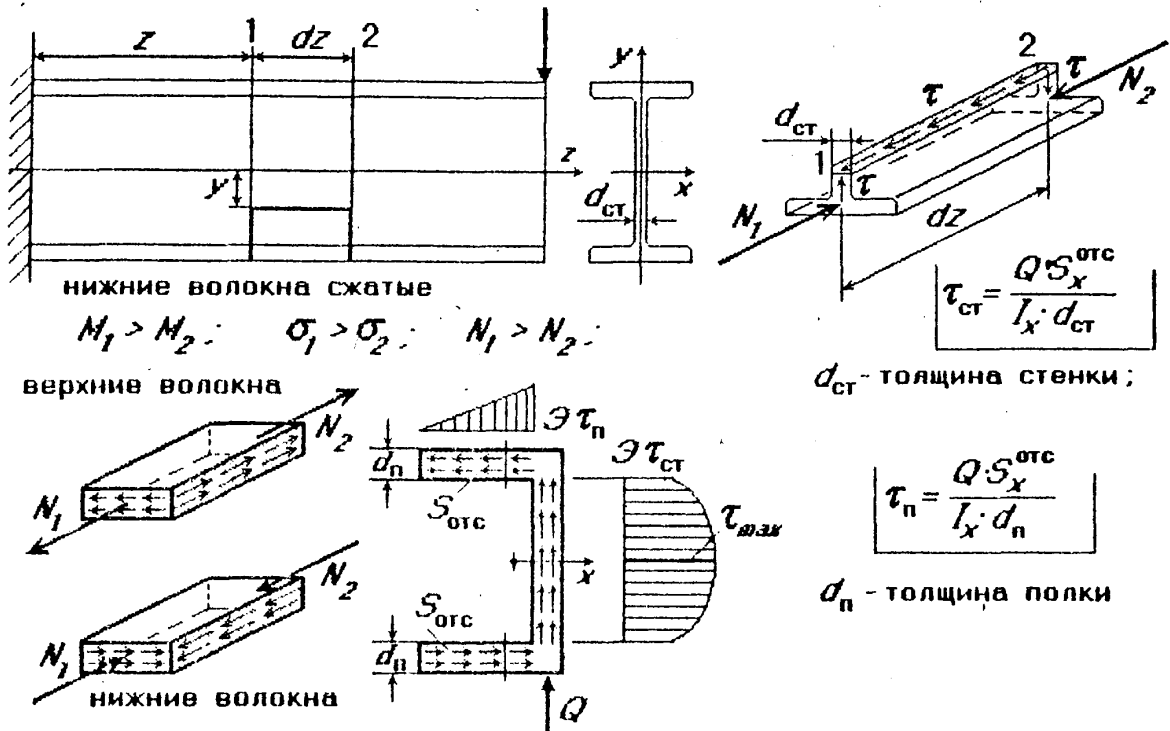
Касательные напряжения в поперечных сечениях равны касательным напряжениям в продольных сечениях, как парные им.

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b}$$

$$S_x^{\text{отс}} = S_{\text{отс}} \cdot y_c = \left(\frac{h}{2} - y\right) b \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \quad I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad b = b;$$

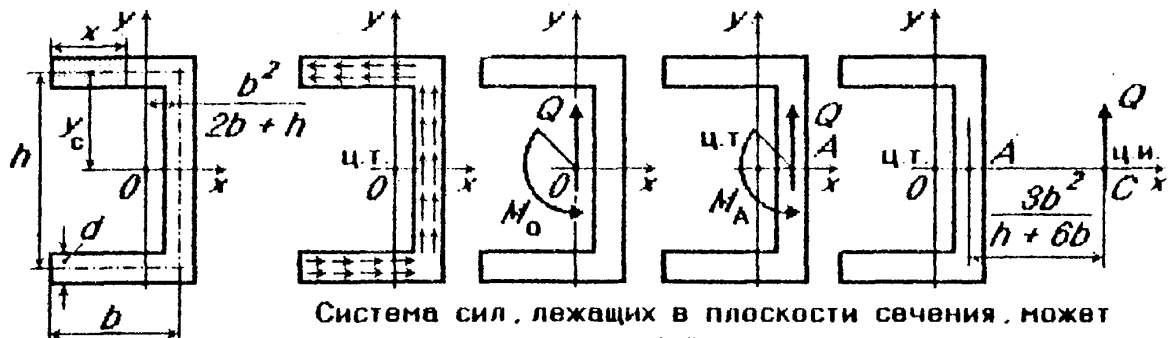
$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \quad \tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}$$

КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ



ПОНЯТИЕ О ЦЕНТРЕ ИЗГИБА

Касательные напряжения в корытном профиле:



Система сил, лежащих в плоскости сечения, может быть приведена к любой точке плоскости в виде равнодействующей силы и момента.

$$I_x = \frac{d h^2}{12} (h + 6b)$$

а) полка:  $S_x^{отс} = \frac{h}{2} d x; \tau_n = \frac{6Qx}{h \cdot d (h + 6b)}$

б) стенка:  $S_x^{отс} = \frac{d}{2} (bh + \frac{h^2}{4} - y^2); \tau_{ст} = \frac{6Q(bh + \frac{h^2}{4} - y^2)}{h^2 d (h + 6b)}$

$M_A = h \int_0^b \tau_n \cdot d \cdot dS$   
 $M_A = Q \frac{3b^2}{h + 6b}$

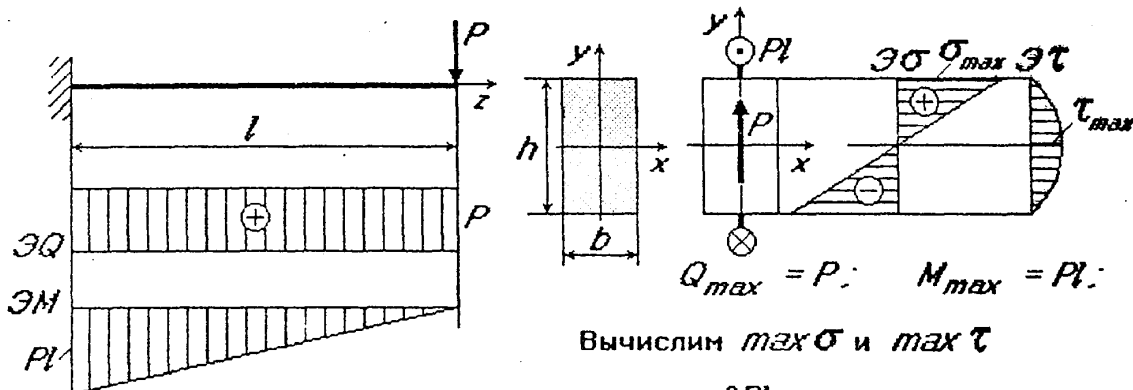
Центр изгиба это точка, относительно которой момент касательных сил в сечении при поперечном изгибе равен нулю.

## УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

При прямом поперечном изгибе в поперечных сечениях возникают нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения.

Для сплошных сечений касательные напряжения  $\tau$  малы по сравнению с нормальными напряжениями  $\sigma$ .

Пример. Консольная балка прямоугольного поперечного сечения.



Вычислим  $\max \sigma$  и  $\max \tau$

$$\max \sigma = \max(\sigma_{\max}) = \frac{M_{\max}}{W_x}$$

$$\max \sigma = \frac{6Pl}{bh^2}; \quad \max \tau = \frac{3P}{2bh}$$

$$\max \tau = \max(\tau_{\max}) = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b}$$

$$\frac{\max \sigma}{\max \tau} = \frac{6Pl \cdot 2bh}{bh^2 \cdot 3P} = \frac{4l}{h} \cdot \frac{l}{h} \geq 5 \dots 10;$$

$$\max \tau \ll \max \sigma.$$

## РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ:

$$\max \sigma \leq [\sigma];$$

$$n = \frac{\bar{\sigma}}{\max \sigma} \geq [n];$$

$$\max \sigma = \max(\sigma_{\max})$$

$$[\sigma] = \frac{\bar{\sigma}}{[n]}.$$

$\bar{\sigma}$  - предельное напряжение,  
 $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\tau} - \text{пластичные материалы,} \\ \sigma_{\sigma} - \text{хрупкие материалы.} \end{array} \right.$

ПОРЯДОК РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ

1. Выбор опасного сечения:

$$\text{ЭQ и ЭM} \rightarrow M_{\max}$$

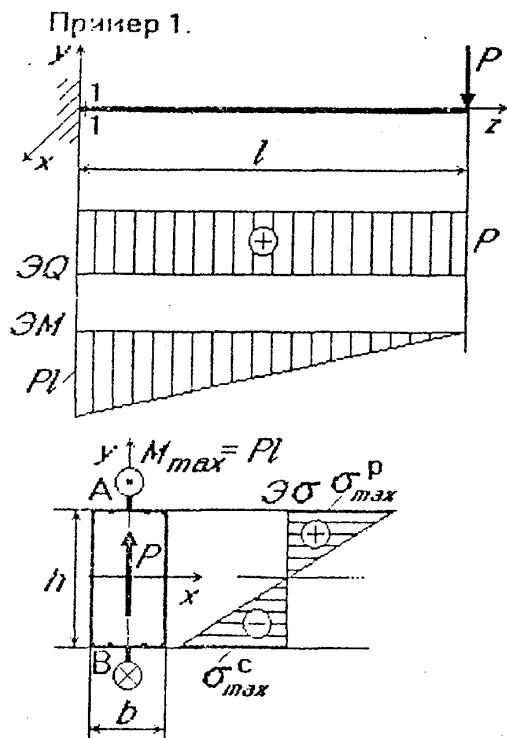
2. Выбор опасной точки:

$$\text{Э}\sigma \rightarrow \sigma_{\max} \rightarrow \max \sigma$$

3. Материал.

4. Условие прочности.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ



Дано:  $P, l, \sigma_T, [n], b \cdot h$ ,  
поперечное сечение имеет 2 оси симметрии, материал пластичный.

$$[\sigma]_p = [\sigma]_c = [\sigma]$$

1. Опасное сечение 1-1:

$$M_{max} = Pl; Q_{max} = P;$$

2. Опасные точки: т. А и т. В:

$$\sigma_{max}^p = \sigma_{max}^c = \frac{M_{max}}{W_x}$$

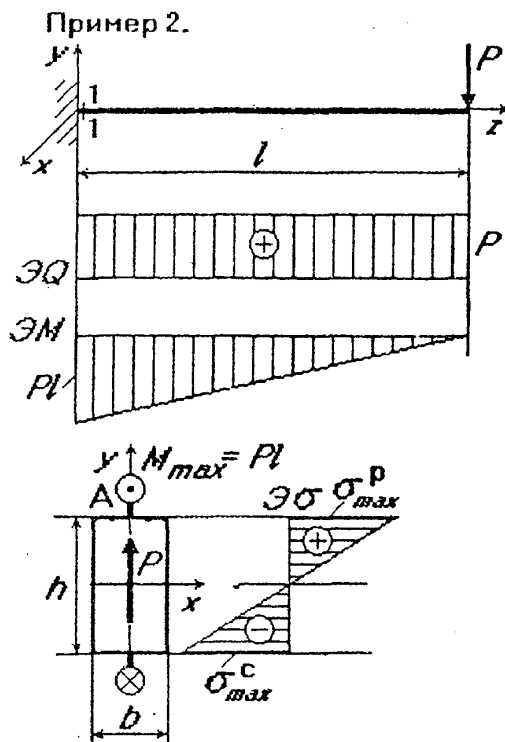
3. Материал пластичный - одинаково работает на растяжение и сжатие.

4. Условие прочности:

$$\max \sigma = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$\max \sigma = \frac{6Pl}{bh^2} \leq \frac{\sigma_T}{[n]}$$

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ



Дано:  $P, l, [n], b \cdot h$ ,  
поперечное сечение имеет 2 оси симметрии, материал хрупкий (чугун)

$$\sigma_{вр} < \sigma_{вс}; [\sigma]_p < [\sigma]_c;$$

1. Опасное сечение 1-1:

$$M_{max} = Pl; Q_{max} = P;$$

2. Опасные точки: т. А:

$$\sigma_{max}^p = \frac{M_{max}}{W_x}$$

3. Материал хрупкий:

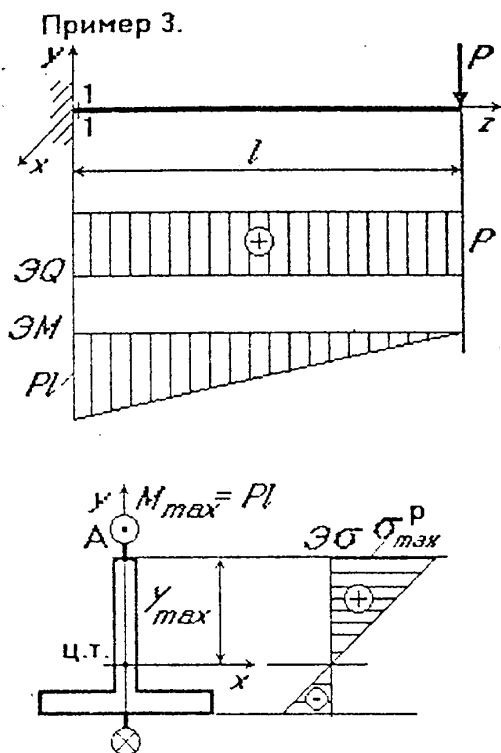
$$[\sigma]_p < [\sigma]_c;$$

4. Условия прочности:

$$\max \sigma_p = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]_p;$$

$$\max \sigma_p = \frac{6Pl}{bh^2} \leq \frac{\sigma_{вр}}{[n]}$$

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ



Дано:  $P, l, \sigma_T, [n]$ ,  
материал пластичный -  $[\sigma]_p = [\sigma]_c = [\sigma]$ ,  
сечение несимметричное относительно оси  $x$ .  
Оси  $x$  и  $y$  - главные и центральные оси поперечного сечения:

1. Опасное сечение 1-1:

$$M_{max} = Pl; Q_{max} = P;$$

2. Опасные точки: т. А:

$$\sigma_{max}^p = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max};$$

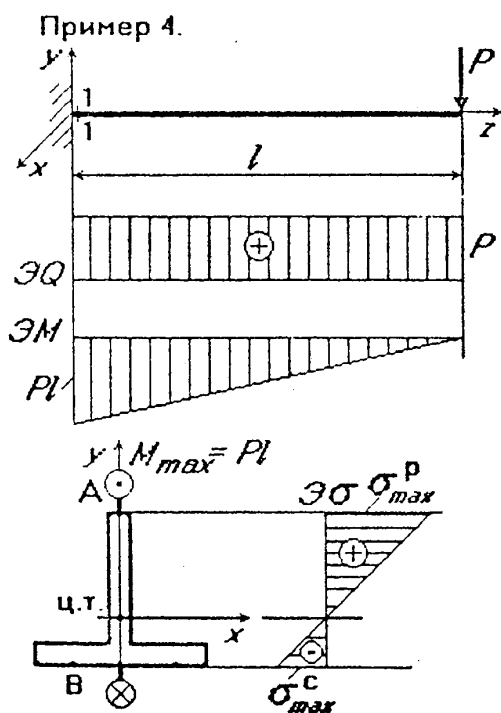
3. Материал пластичный - одинаково работает на растяжение и сжатие

4. Условие прочности:

$$\max \sigma = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max} \leq [\sigma];$$

$$\max \sigma = \frac{Pl}{I_x} y_{max} \leq \frac{\sigma_T}{[n]}.$$

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ



Дано:  $P, l, [n]$ ,  
материал хрупкий (чугун)

$$\sigma_{вр} < \sigma_{вс}; [\sigma]_p < [\sigma]_c;$$

сечение несимметричное относительно оси  $x$ .

Оси  $x$  и  $y$  - главные и центральные оси поперечного сечения:

1. Опасное сечение 1-1:

$$M_{max} = Pl; Q_{max} = P;$$

2. Опасные точки: т. А и т. В:

$$\sigma_{max}^p > \sigma_{max}^c;$$

3. Материал хрупкий:

$$[\sigma]_p < [\sigma]_c;$$

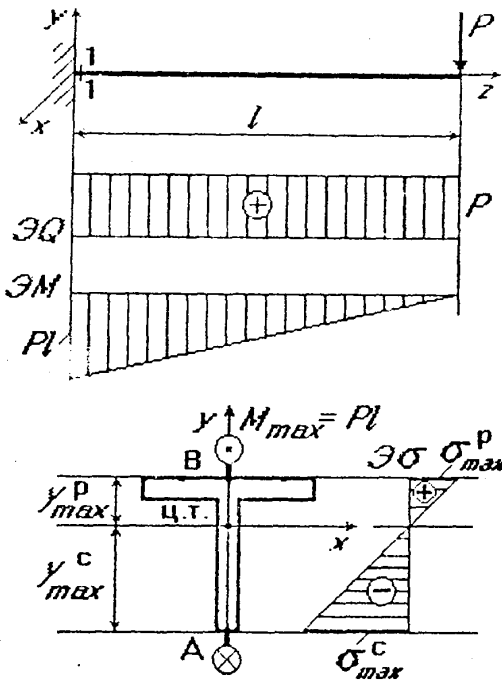
Сечение расположено не рационально. Для хрупкого материала выгодно, чтобы  $\max \sigma$  были бы напряжениями сжатия

$$\max \sigma = \sigma_{max}^c.$$



ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Пример 4. (продолжение). Сечение повернули на 180°.



1. Опасное сечение 1-1:  
 $M_{max} = Pl; Q_{max} = P;$
2. Опасные точки: т. А и т. В:
3. Материал хрупкий:  
 $[\sigma]_p < [\sigma]_c;$
4. Условие прочности:

$$\max \sigma_p^B = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max}^p \leq [\sigma]_p$$

$$\max \sigma_c^A = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max}^c \leq [\sigma]_c$$

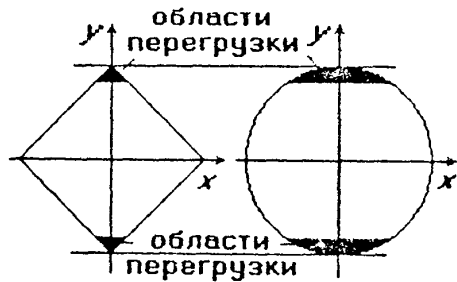
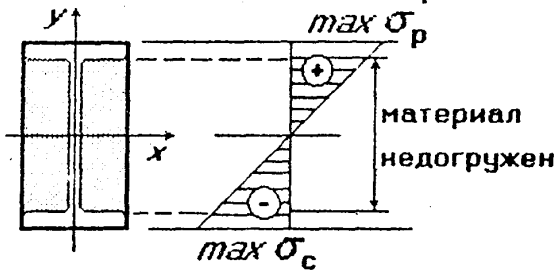
Отсюда:  
Внешняя нагрузка:  $P = \min (P_1^p, P_2^c).$

Размеры поперечного сечения:  $S = \max (S_1^p, S_2^c).$

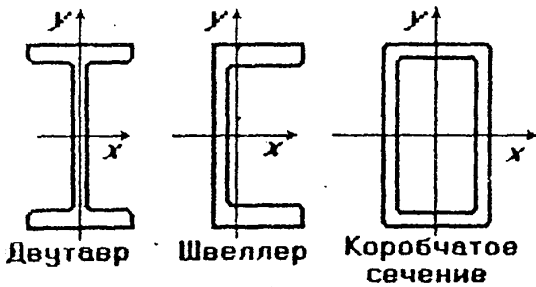
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БАЛОК

1. Материал пластичный:  $\bar{\sigma} = \sigma_T (\sigma_{Tp} = \sigma_{Tc})$

Наиболее выгодным будет сечение, симметричное относительно нейтральной оси ( $\max \sigma_p = \max \sigma_c$ )



Наиболее рациональные - тонкостенные симметричные сечения:



Для тонкостенных сечений делается проверка прочности по  $\max \tau$

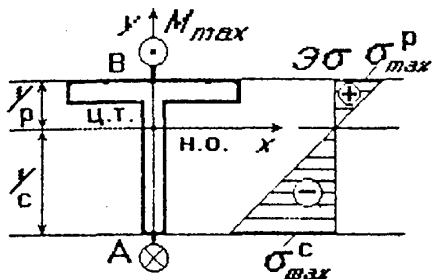
$$\max \tau \leq [\tau];$$

$$[\tau] = \frac{\bar{\tau}}[n] = (0.5 \dots 0.6) [\sigma]_p.$$

Проверка прочности по  $\max \tau$  делается также и для анизотропных материалов или для составных сечений (дерево, текстолит, стеклопластик, склеенные сечения и т.д.)

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БАЛОК

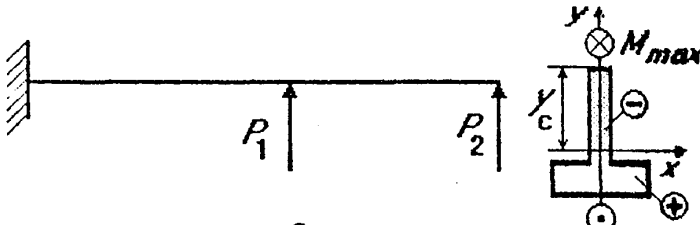
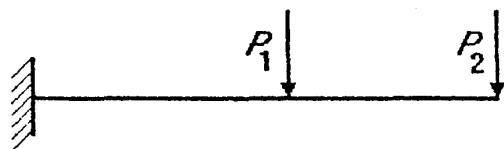
2. Хрупкие материалы:  $\bar{\sigma} = \sigma_{вр} - \sigma_{вс} - \sigma_{вр} < \sigma_{вс}$ ;  $[\sigma]_p < [\sigma]_c$ .  
 Рациональное (равнопрочное) сечение - несимметрично относительно нейтральной оси (оси  $x$ )



Сечение необходимо располагать рациональным образом (желательно иметь расположение эпюры ЭМ по одну сторону).

Равнопрочное сечение:

$$\frac{y_p}{y_c} = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_c}$$



Выгодно:  $\max \sigma = \sigma_{max}^c (y_c = y_{max})$

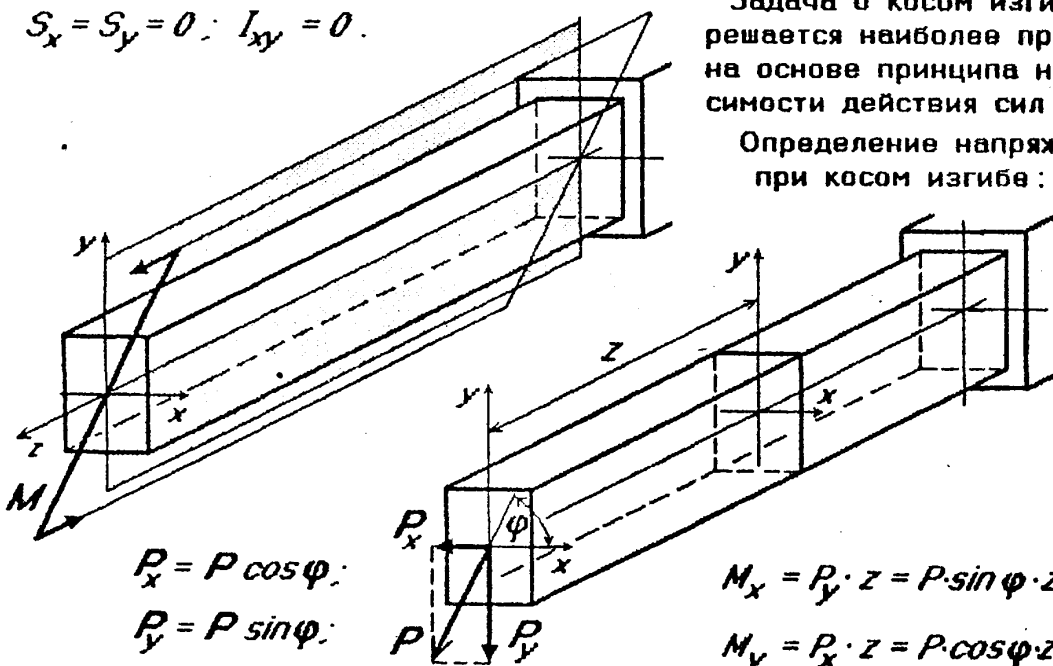
КОСОЙ ИЗГИБ

При косом изгибе - силовая линия (с.л.) не совпадает с главной центральной осью сечения и с линией изгиба (л.и.).  
 Оси  $x$  и  $y$  главные и центральные оси.

$$S_x = S_y = 0; I_{xy} = 0.$$

Задача о косом изгибе решается наиболее просто на основе принципа независимости действия сил.

Определение напряжений при косом изгибе:



$$P_x = P \cos \varphi;$$

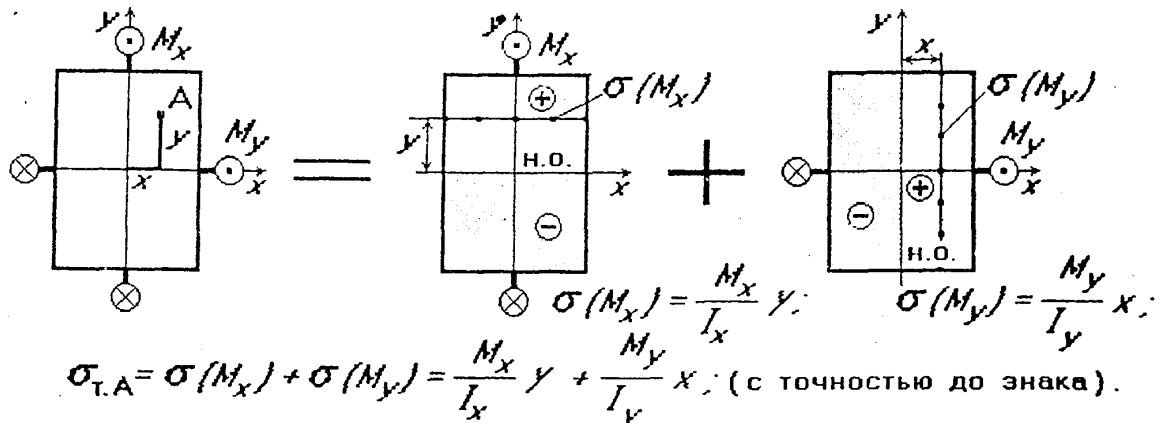
$$P_y = P \sin \varphi;$$

$$M_x = P_y \cdot z = P \cdot \sin \varphi \cdot z;$$

$$M_y = P_x \cdot z = P \cdot \cos \varphi \cdot z.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

КОСОЙ ИЗГИБ - одновременный изгиб в двух главных плоскостях.



Напряжения по сечению распределены по линейному закону. Наибольшие напряжения в точках наиболее удаленных от нейтральной оси ( $\sigma_{н.о.} = 0$ ).

Уравнение Н.О. - для точки А ( $x > 0, y > 0$ ):

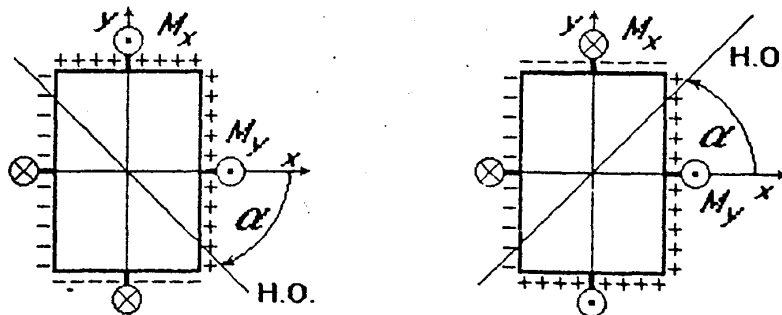
$$\sigma_{н.о.}(x,y) = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0 \text{ - уравнение нейтральной оси;}$$

$$y = k_1 x = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot x \text{ - уравнение прямой, проходящей через начало координат (центр тяжести сечения).}$$

ПОЛОЖЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНОЙ ОСИ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

$$y = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot x = -\frac{P \cdot \cos \varphi \cdot z \cdot I_x}{P \cdot \sin \varphi \cdot z \cdot I_y} \cdot x; \quad y = k_1 x = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \varphi \cdot x;$$

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha = \left| -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \varphi \right| \text{ - тангенс угла наклона Н.О.}$$

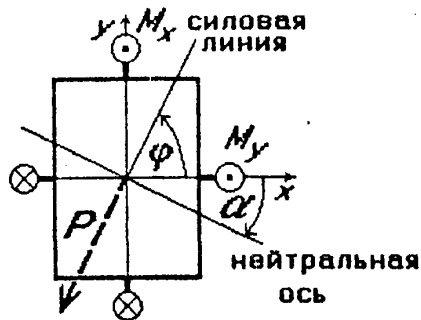


Знак угла  $\alpha$  легко определяется по знаку напряжений  $\sigma(M_x)$  и  $\sigma(M_y)$ . Н.О. проходит через ц.т. и те области сечения, для которых  $\sigma(M_x)$  и  $\sigma(M_y)$  имеют разные знаки.

### ПОЛОЖЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНОЙ ОСИ И СИЛОВОЙ ЛИНИИ ПРИ КОСОМ ( ПРЯМОМ ) ИЗГИБЕ

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1 k_2 = -1; \quad k_1 = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \varphi; \quad k_2 = \operatorname{tg} \varphi.$$



$$k_1 k_2 = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi = -\frac{I_x}{I_y};$$

а) В общем случае  $I_x \neq I_y$ :

$$k_1 k_2 = -\frac{I_x}{I_y} \neq -1.$$

нейтральная ось и силовая линия не перпендикулярны.

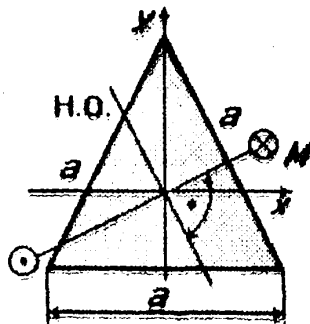
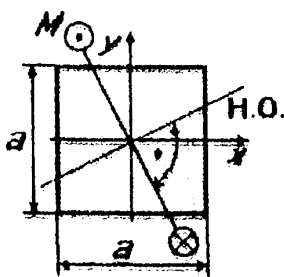
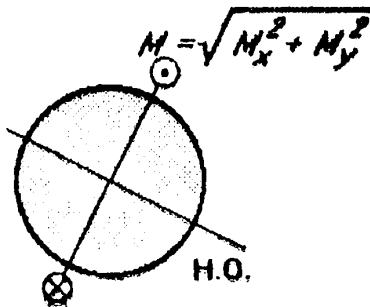
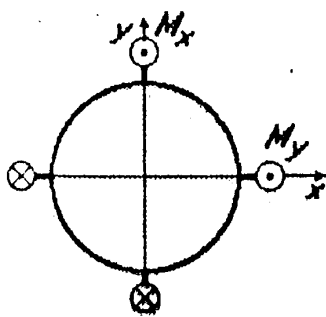
б) Если  $I_x = I_y$  ( $I_{xy} = 0$ ):  $k_1 k_2 = -\frac{I_x}{I_y} = -1.$

Такие сечения не испытывают косою изгиб. Изгиб прямой.

### ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КОСОГО ( ПРЯМОГО ) ИЗГИБА

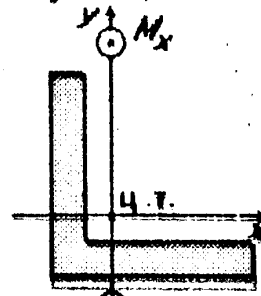
Оси  $x$  и  $y$  главные и центральные

$$I_x = I_y; \quad S_x = S_y = 0; \quad I_{xy} = 0.$$

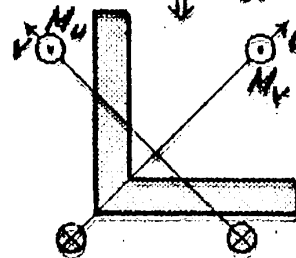


Оси  $x$  и  $y$  не главные оси:

$$I_x = I_y; \quad I_{xy} \neq 0.$$



КВАДРАТНЫЙ ИЗГИБ:  $I_u \neq I_v$ ;  $I_{uv} = 0$ .



РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Определение  $\max \sigma$  :

Оси  $x$  и угловые и центральные

$$S_x = S_y = 0; I_{xy} = 0.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{M_y \cdot I_x}{M_x \cdot I_y} \right|$$

$$\max \sigma_p = \sigma_{T.A} = \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A$$

$$\max \sigma_c = \sigma_{T.B} = \left| -\frac{M_x}{I_x} y_B - \frac{M_y}{I_y} x_B \right|$$

$$\sigma_{T.A} = \max \sigma_p$$

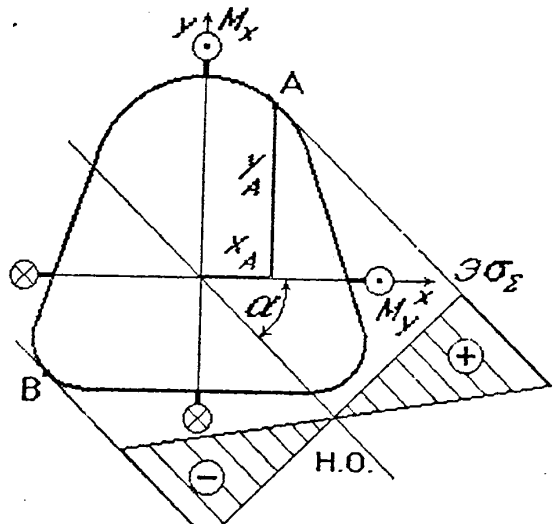
УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ:

1. Пластичный материал:

$$\bar{\sigma} = \sigma_T; [\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]}; \max \sigma \leq [\sigma].$$

2. Хрупкий материал:

$$\bar{\sigma} = \sigma_{вр} \cdot \sigma_{вс}; \max \sigma_p \leq [\sigma]_p; \max \sigma_c \leq [\sigma]_c; [\sigma]_p = \frac{\sigma_{вр}}{[n]_p}; [\sigma]_c = \frac{\sigma_{вс}}{[n]_c}$$

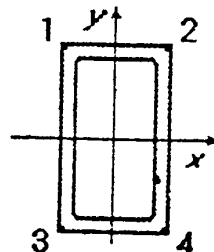
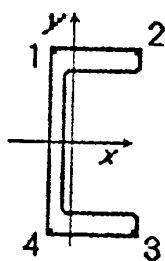
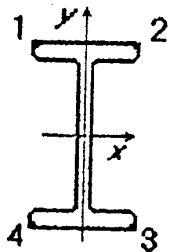
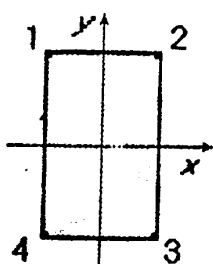


$$\sigma_{T.B} = \max \sigma_c$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КОСОГО ИЗГИБА

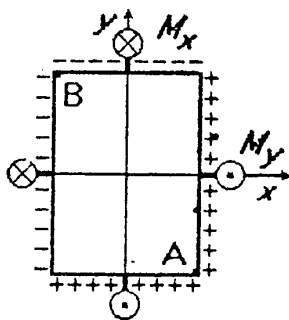
А. Сечение с выступающими углами:

1) Оси  $x$  и  $y$  - оси симметрии:



и т.д.

Опасная точка - наиболее удаленная от осей  $x$  и  $y$  (угловая точка).



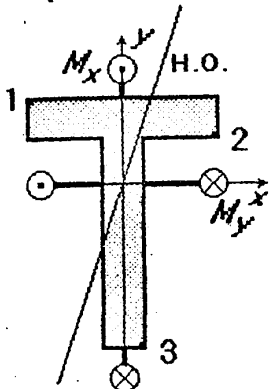
$$\max \sigma_p = \sigma_{T.A} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; W_x = \frac{bh^2}{6}$$

$$\max \sigma_c = \sigma_{T.B} = \left| -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right|; W_y = \frac{hb^2}{6}$$

В частности - так можно определять напряжения и для квадратного сечения.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КОСОГО ИЗГИБА (продолжение)

2) Сечение не симметрично одной из осей:

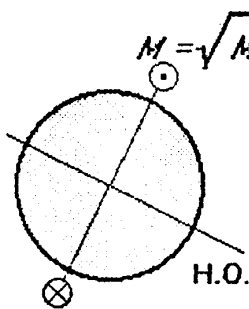
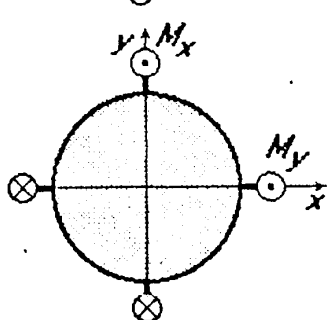


Оси  $x$  и угловые и центральные  
 $S_x = S_y = 0; I_{xy} = 0.$

$$\sigma_i = \pm \frac{M_x}{I_x} y_i \pm \frac{M_y}{I_y} x_i; \quad i = 1, 2, 3;$$

Отсюда определяем  $\max \sigma_p$  и  $\max \sigma_c$

Б. Расчет круглого поперечного сечения:



$$W_x = W_y = W_{H.O.} = W = \frac{\pi d^3}{32};$$

$$\max \sigma = \pm \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \in [\sigma].$$

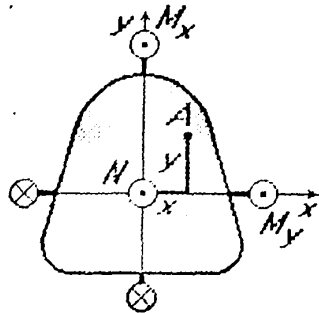
ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ)  
СТЕРЖНЯ БОЛЬШОЙ ЖЕСТКОСТИ



Изгиб с растяжением или сжатием - нагружение, при котором в поперечных сечениях одновременно действует продольная растягивающая или сжимающая сила  $N$  и изгибающий момент  $M_x$ .

Брус большой жесткости, если при расчете можно не учитывать дополнительный изгибающий момент ( $P \cdot f_{\max}$ ), т.е. деформациями стержня можно пренебречь. В этом случае можно применять принцип независимости действия сил.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ С РАСТЯЖЕНИЕМ ИЛИ СЖАТИЕМ СТЕРЖНЯ БОЛЬШОЙ ЖЕСТКОСТИ



Оси  $x$  и угловые и центральные  
 $S_x = S_y = 0; I_{xy} = 0.$

$$\sigma_{T.A} = \sigma(x, y) = \sigma(N) + \sigma(M_x) + \sigma(M_y):$$

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x; \text{ (с точностью до знака).}$$

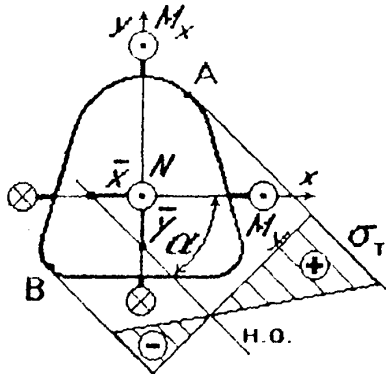
Напряжения по сечению распределены по линейному закону. Наибольшие напряжения в точках наиболее удаленных от нейтральной оси ( $\sigma_{н.б} = 0$ ).

Уравнение Н.О. - для точки  $A(x > 0, y > 0)$ :

$$\sigma_{н.о}(x, y) = \frac{N}{S} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0 \text{ - уравнение нейтральной оси;}$$

Нейтральная ось не проходит через начало координат (центр тяжести сечения).

### РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ С РАСТЯЖЕНИЕМ ИЛИ СЖАТИЕМ СТЕРЖНЯ БОЛЬШОЙ ЖЕСТКОСТИ



Оси  $x$  и угловые и центральные  
 $S_x = S_y = 0; I_{xy} = 0.$

Условие прочности:  $\max \sigma \in [\sigma].$

Точка с  $\max \sigma$  наиболее удалена от Н.О.

Определение  $\max \sigma$

Уравнение нейтральной оси:

$$\frac{N}{S} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

$$x = 0; \bar{y} = -\frac{N}{M_x} \cdot \frac{I_x}{S}; \quad y = 0; \bar{x} = -\frac{N}{M_y} \cdot \frac{I_y}{S}.$$

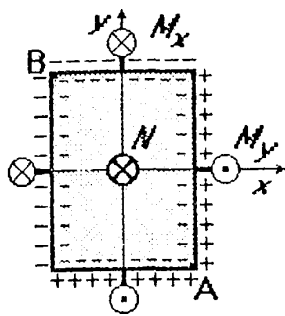
$$\sigma_{T.B} = \max \sigma_c$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \left| \frac{M_y \cdot I_x}{M_x \cdot I_y} \right| \text{ - такой же, как при косом изгибе;}$$

$$\max \sigma_p = \sigma_{T.A} = \frac{N}{S} + \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A; \quad \max \sigma_c = \sigma_{T.B} = \left| \frac{N}{S} - \frac{M_x}{I_x} y_B - \frac{M_y}{I_y} x_B \right|$$

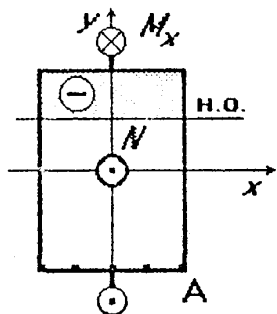
$\sigma(N) = \frac{N}{S}$  - учитывается только при определении допустимой нагрузки и при проверочном расчете. При проектировочном расчете влиянием  $N$  можно пренебречь.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИЗГИБА С РАСТЯЖЕНИЕМ ИЛИ СЖАТИЕМ



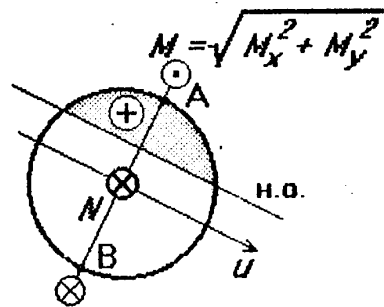
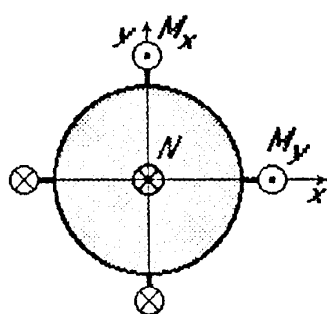
$$\max \sigma = \max \sigma_c = \sigma_{T.B} = -\frac{N}{S} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}$$

$$\max \sigma_p = \sigma_{T.A} = -\frac{N}{S} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$



$$\max \sigma = \sigma_{T.A} = \frac{N}{S} + \frac{M_x}{W_x}$$

прямой изгиб и растяжение.



$$\max \sigma = \max \sigma_c = \sigma_{T.B} = -\frac{N}{S} - \frac{M}{W_u}$$

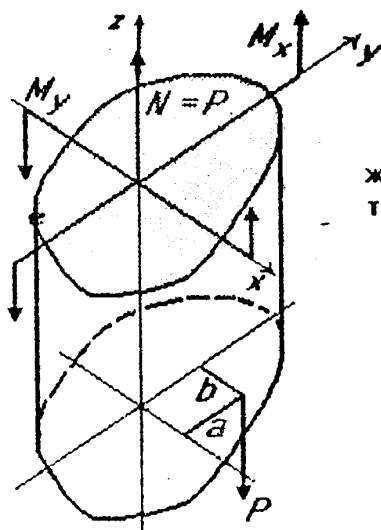
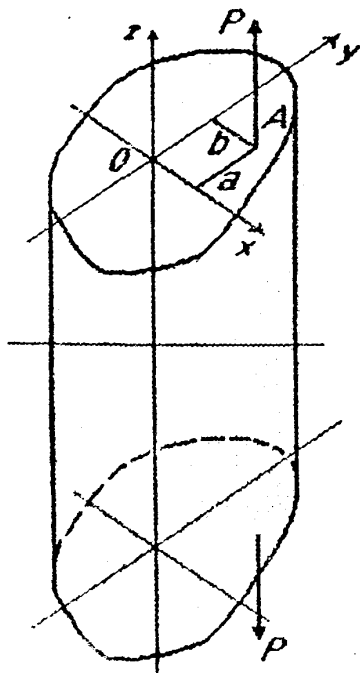
$$\max \sigma_p = \sigma_{T.A} = -\frac{N}{S} + \frac{M}{W_u}$$

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

При внецентренном растяжении или сжатии внешняя сила параллельна оси стержня и смещена относительно оси Z.

Оси x и y главные и центральные

$$S_x = S_y = 0; I_{xy} = 0.$$

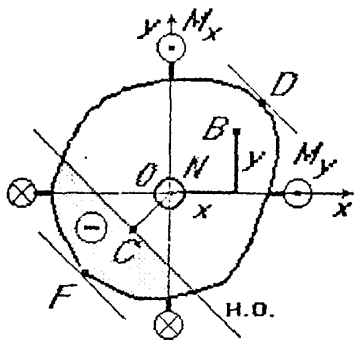


Внешняя сила P приложена в т. А с координатами a и b.

$$M_x = P \cdot a; \quad M_y = P \cdot b.$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ



Оси  $x$  и  $y$  угловые и центральные  
 $S_x = S_y = 0; I_{xy} = 0.$

$$\sigma_{т.в} = \sigma(x, y) = \sigma(N) + \sigma(M_x) + \sigma(M_y);$$

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x; \quad (\text{с точностью до знака}).$$

$$\sigma = \frac{P}{S} + \frac{P \cdot a}{I_x} y + \frac{P \cdot b}{I_y} x;$$

Уравнение нейтральной оси:

$$\frac{1}{S} + \frac{a}{I_x} y + \frac{b}{I_y} x = 0;$$

Нейтральная ось не проходит через центр тяжести сечения.

Опасные точки  $D$  и  $F$ .

Наибольшие напряжения

$$\max \sigma = \max \sigma_p = \sigma_{т.в. D};$$

$$\max \sigma = P \left( \frac{1}{S} + \frac{a}{I_x} y_D + \frac{b}{I_y} x_D \right).$$

Расстояние от начала координат (от центра тяжести) до нейтральной оси:

$$OC = \frac{\frac{1}{S}}{\sqrt{\frac{a^2}{I_x^2} + \frac{b^2}{I_y^2}}}$$

По мере приближения силы  $P$  к ц.т. нейтральная ось удаляется от него.

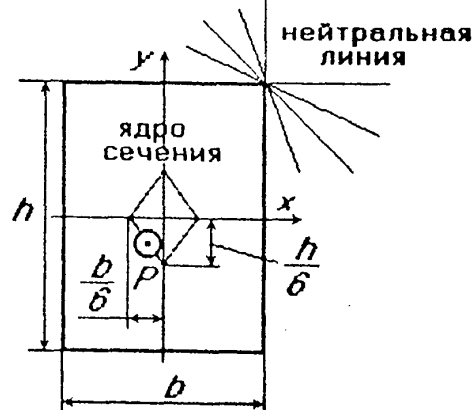
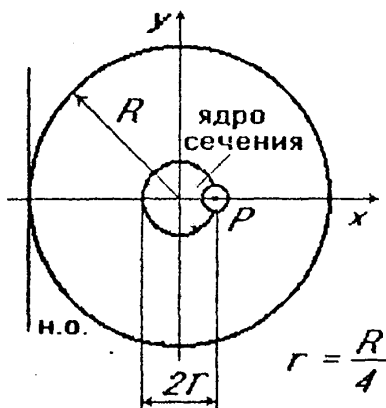
ЯДРО СЕЧЕНИЯ

При внецентренном растяжении и сжатии нейтральная ось может как пересекать сечение, так и находиться за его пределами. В первом случае в сечении возникают и растягивающие, и сжимающие напряжения.

Во втором случае во всех точках сечения напряжения будут одного знака.

В окрестности центра тяжести существует область, называемая ЯДРОМ СЕЧЕНИЯ. Если след силы  $P$  находится внутри ядра сечения, напряжения во всех точках сечения будут одного знака.

Вопрос о ядре сечения имеет значение для расчета кирпичных или бетонных колонн, которые должны испытывать только сжатие.



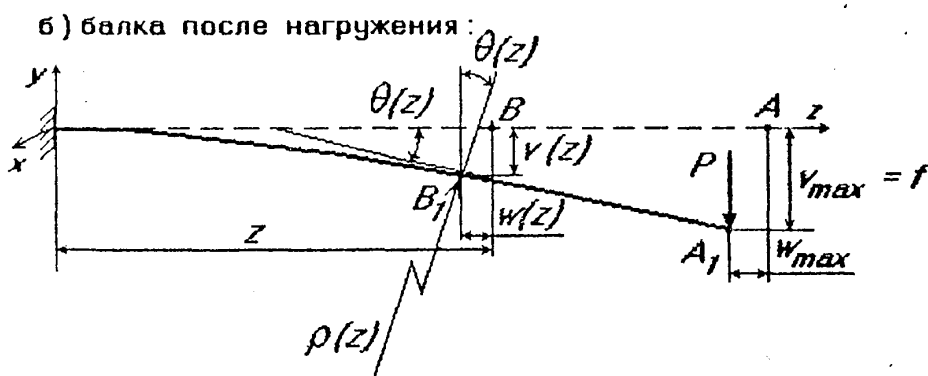
## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня (упругой линии балки).



В результате деформирования ось балки искривляется, поперечные сечения перемещаются в новые положения.

## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ (продолжение)



$v(z)$  - поперечное (вертикальное) перемещение центра тяжести сечения (прогиб балки);

$w(z)$  - продольное (горизонтальное) перемещение сечения;

$\theta(z)$  - угол поворота сечения (угол между касательной к изогнутой оси балки и осью  $Z$ );

$\rho(z)$  - радиус кривизны изогнутой оси;

$y_{max} = f$  - стрела прогиба.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ

Ограничимся рассмотрением случая малых перемещений:

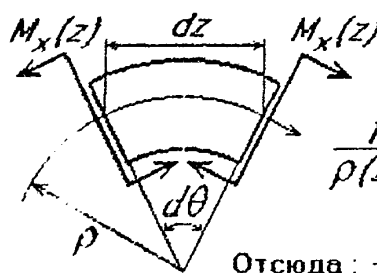
$$y_{\max} \leq 0.005l;$$

а)  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta = \frac{dy}{dz} = v'(z);$

б)  $w(z)$  - перемещениями можно пренебречь, т. е. центры тяжести перемещаются перпендикулярно оси  $Z$ ;

в)  $v = y(z)$  - уравнение кривой, по которой изогнется ось балки.

Форму изогнутой оси балки определим с помощью выражений:



$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_x}{EI_x}$  - для чистого изгиба;  
 $\frac{1}{\rho(z)} = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_x(z)}{EI_x}$  - для поперечного изгиба (не учитывается влияние поперечной силы  $Q_y$ );  
 Отсюда:  $\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EI_x}$  (1) - приближенное дифференциальное уравнение упругой линии.

При больших перемещениях:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{[1+(v')^2]^{3/2}} = \frac{M_x(z, w)}{EI_x}$$

При малых перемещениях:

$$(v') \ll 1; M_x(z, w) = M(z).$$

## ДРУГАЯ ФОРМА УПРУГОЙ ЛИНИИ

При плоском прямом изгибе прямого стержня имеют место следующие зависимости:

$v = y(z)$  - упругая линия;

$$\frac{dv}{dz} = \theta(z) - \text{угол поворота сечения};$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\rho(z)} = \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EI_x}; \quad EI_x \frac{d^2v}{dz^2} = M_x(z) \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dz} = Q = \frac{d}{dz} \left[ EI_x \frac{d^2v}{dz^2} \right]; \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2} = q = \frac{d^2}{dz^2} \left[ EI_x \frac{d^2v}{dz^2} \right];$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EI_x \frac{d^2v}{dz^2} \right] = q(z) \quad (2) - \text{другая форма упругой линии.}$$

Стержень (балка) постоянного поперечного сечения:

$$EI_x = EI_x(z) = \text{const};$$

$$EI_x \frac{d^2v}{dz^2} = M(z) \quad (1)$$

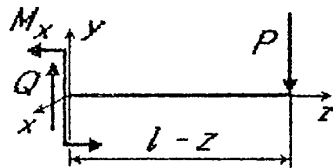
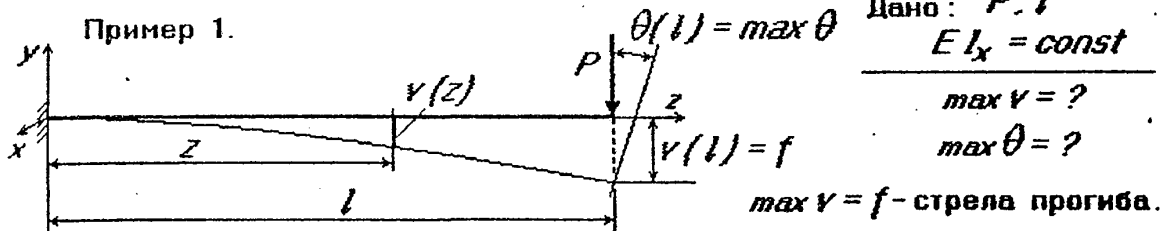
$$EI_x \frac{d^4v}{dz^4} = q(z) \quad (2)$$

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

#### 1. Рассмотрим уравнение (1)

Пример 1.



$$M(z) = -P(l-z);$$

$$E I_x v'' = -Pl + Pz;$$

$$E I_x v' = E I_x \theta(z) = -Plz + \frac{1}{2} Pz^2 + C;$$

$$E I_x v(z) = -\frac{1}{2} Plz^2 + \frac{1}{6} Pz^3 + Cz + D;$$

Геометрический смысл постоянных интегрирования:

при  $z=0$ :  $C = E I_x \theta(0) = E I_x \theta_0$ ;  
 $D = E I_x v(0) = E I_x v_0$ ;

$v_0$  и  $\theta_0$  - прогиб и угол поворота сечения в начале координат.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Постоянные  $C = E I_x \theta_0$  и  $D = E I_x v_0$  находят из условий закрепления концов балки - геометрические граничные условия.

В нашем примере:

$z=0$  жесткое защемление:  $v_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ .

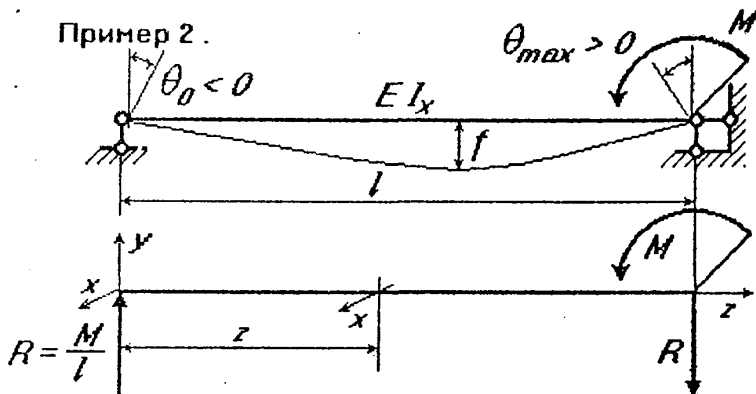
отсюда  $C = D = 0$ .

$$v(z) = -\frac{Pz^2}{2E I_x} \left(1 - \frac{z}{3}\right); \quad \theta(z) = -\frac{Pz}{E I_x} \left(1 - \frac{z}{2}\right).$$

$$v_{max} = v(l) = f = -\frac{Pl^3}{3E I_x} \cdot [M] \quad (-) \text{ - направление вниз - против оси } y.$$

$$\theta_{max} = \theta(l) = -\frac{Pl^2}{2E I_x} \cdot [\text{рад}] \quad (-) \text{ - поворот по ходу часовой стрелки.}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
УПРУГОЙ ЛИНИИ



Дано:  $P, l$   
 $E I_x = const$

$y_{max} = f = ?$

$\theta_{max} = ?$

$M_x(z) = \frac{M}{l} z$ ;

$E I_x v'' = \frac{M}{l} z$ ;

$E I_x v' = E I_x \theta(z) = \frac{1}{2} \frac{M}{l} z^2 + C$ ;

$E I_x v(z) = \frac{1}{6} \frac{M}{l} z^3 + C z + D$ ;

Граничные условия:

при:  $z = 0, D = E I_x v_0 = 0$ ;

$z = l, E I_x v(l) = \frac{1}{6} M l + C l = 0$ ;

$C = E I_x \theta_0 = -\frac{1}{6} M l$ ;

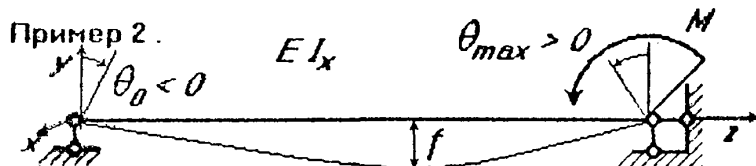
Условия закрепления:

при:  $z = 0, v(0) = v_0 = 0; \theta(0) = ?$

$z = l, v(l) = 0; \theta(l) = ?$

$\theta_0 = -\frac{M l}{6 E I_x}$ ;

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
УПРУГОЙ ЛИНИИ (продолжение)



Дано:  $P, l$   
 $E I_x = const$

$y_{max} = f = ?$

$\theta_{max} = ?$

$E I_x \theta(z) = \frac{1}{2} \frac{M}{l} z^2 - \frac{1}{6} M l$ ;

$\frac{1}{2} \frac{M}{l} z^2 - \frac{1}{6} M l = 0$ ;

$E I_x v(z) = \frac{1}{6} \frac{M}{l} z^3 - \frac{1}{6} M l z$ ;

$z = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0.577 l; \theta_0 = -\frac{M l}{6 E I_x}$ ;

При  $y_{max} = f, \theta = \frac{dv}{dz} = 0$ ;

$E I_x y_{max} = \frac{1}{6} \frac{M}{l} \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{6} M l \frac{l}{\sqrt{3}} = -\frac{M l^2}{9 \sqrt{3}}$  (направление вниз - против оси  $y$ ).

$f = \frac{M l^2}{9 \sqrt{3} E I_x} \approx 6.4 \cdot 10^{-2} \frac{M l^2}{E I_x}$ ;

$E I_x \theta(l) = \frac{M}{2 l} l^2 - \frac{M l}{6} = \frac{M l}{3}$ ;

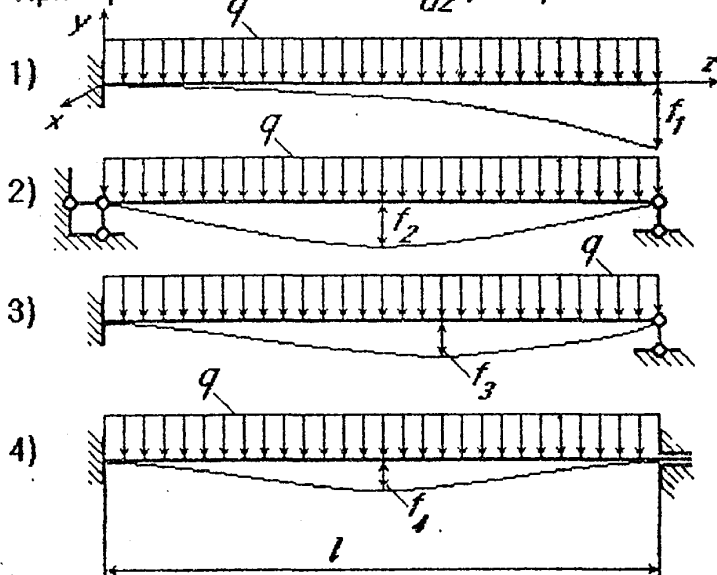
$\theta(l) = \theta_{max} = \frac{1}{3} \frac{M l}{E I_x}$ ;

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ (четвертого порядка)

Рассмотрим уравнение (2)

В некоторых случаях удобнее использовать дифференциальное уравнение четвертого порядка:

Примеры:  $EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} = q(z)$  (2);  $EI_x v^{(4)} = q(z)$  (2).



Дано:  $q \cdot l$ .

$EI_x = \text{const}$

$f = ?$

Для всех балок:

$$EI_x v^{(4)} = -q;$$

$q < 0$  - направлена против оси  $y$ ;

Упругие линии для балок будут отличаться только постоянными интегрирования.

Балки 3) и 4) - статически неопределимы.

### РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$EI_x v^{(4)} = -q, \quad EI_x v^{(3)} = Q = -qz + C_1.$$

$$EI_x v'' = M = -\frac{1}{2} qz^2 + C_1 z + C_2.$$

$$EI_x v' = EI_x \theta = -\frac{1}{6} qz^3 + \frac{1}{2} C_1 z^2 + C_2 z + C_3.$$

$$EI_x v = -\frac{1}{24} qz^4 + \frac{1}{6} C_1 z^3 + \frac{1}{2} C_2 z^2 + C_3 z + C_4.$$

Физический смысл постоянных  $C_i$ :

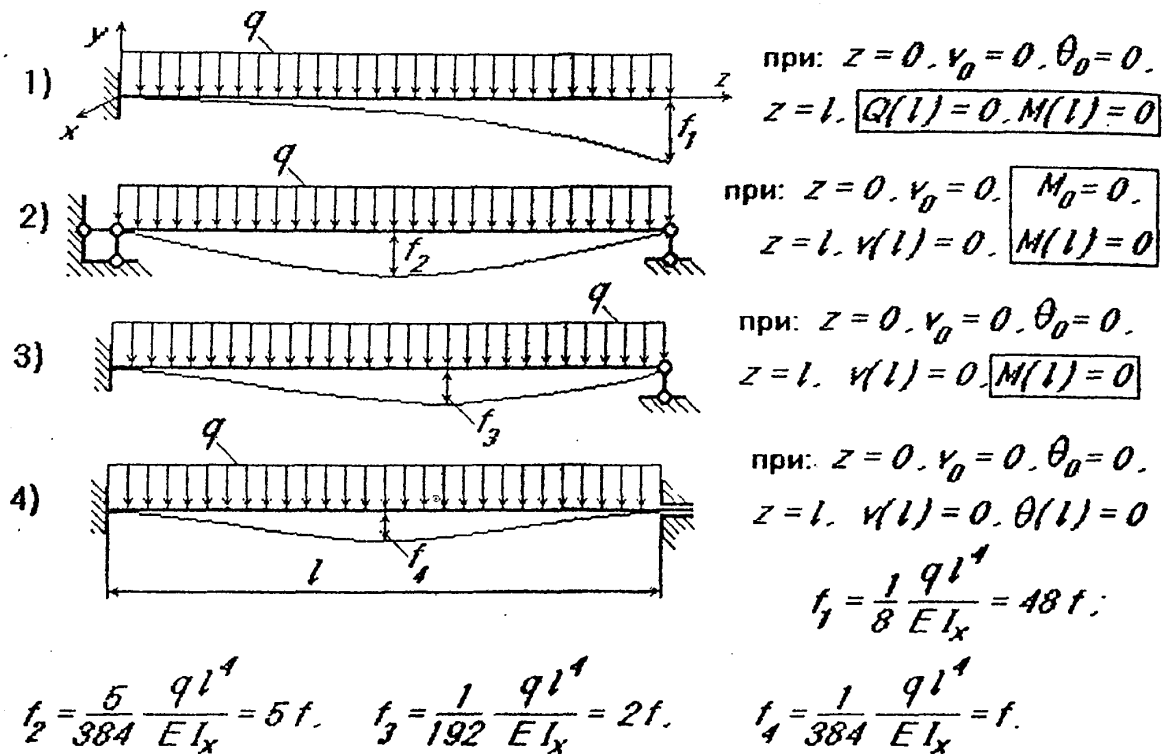
при  $z = 0$ ,  $\left. \begin{array}{l} C_1 = Q_0 \\ C_2 = M_0 \end{array} \right\}$  силовые граничные условия;

$Q_0$  и  $M_0$  - поперечная сила и изгибающий момент в начале координат;

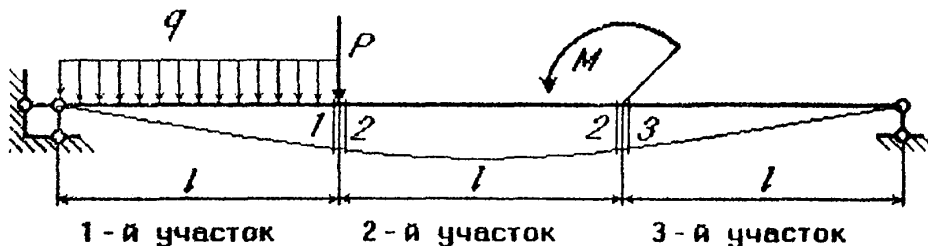
$\left. \begin{array}{l} C_3 = EI_x \theta_0 \\ C_4 = EI_x v_0 \end{array} \right\}$  геометрические граничные условия.

Постоянные  $C_i$  можно найти из силовых и геометрических граничных условий.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА



МНОГОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ



Если балка имеет 2 или несколько участков (n), то для каждого участка нужно составить свое дифференциальное уравнение и после интегрирования будет 2n постоянных интегрирования.

Для их нахождения необходимо записать условия закрепления концов балки ( $z=0, v_1=0$  и  $z=3l, v_3(3l)=0$ ) и условия плавного сопряжения на границе участков (условия неразрывности перемещений):

$$z=l, v_1(l)=v_2(l), \theta_1(l)=\theta_2(l).$$

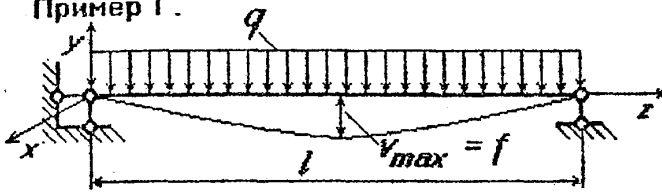
$$z=2l, v_2(2l)=v_3(2l), \theta_2(2l)=\theta_3(2l)$$

$$2n-2=2(n-1)$$

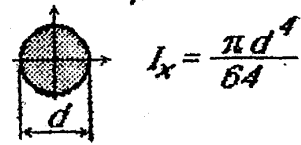
Число стыков (n-1) и каждый стык - 2 граничных условия.

РАСЧЕТ БАЛОК НА ЖЕСТКОСТЬ

Пример 1.



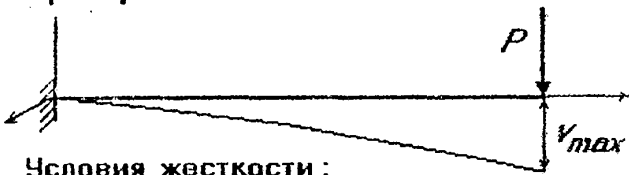
Дано:  $q, l, d, E$ .



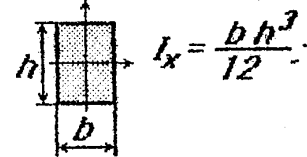
Условия жесткости:  $y_{max} = f \leq [f]$ ;  $y_{max} = f \leq \frac{5ql^4 \cdot 64}{384E\pi d^4} \leq [f]$

Отсюда:  $\max(d)$  или  $\min(q)$ .

Пример 2.



Дано:  $P, l, b, h, E$

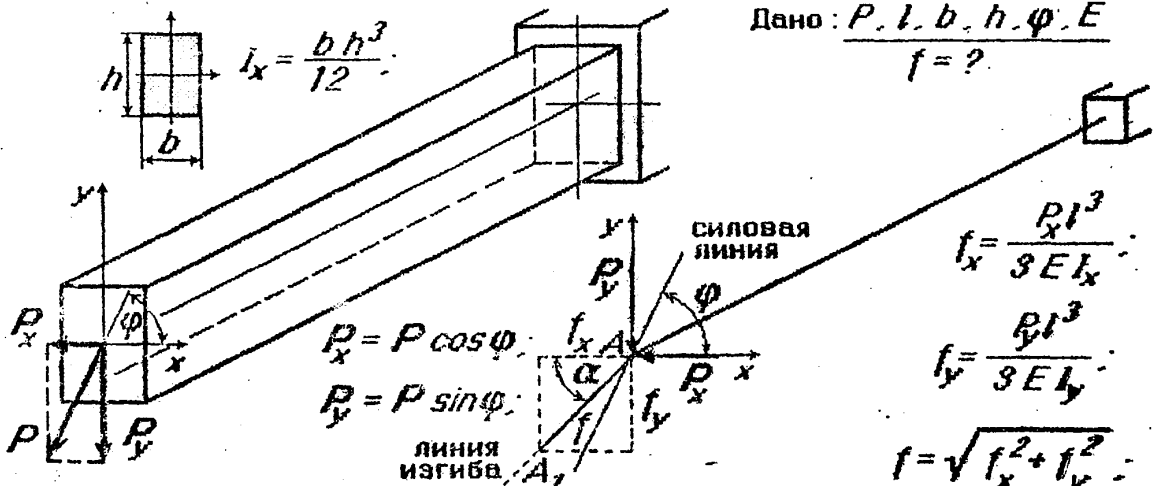


Условия жесткости:

$y_{max} = f \leq [f]$ ;  $y_{max} = f \leq \frac{Pl^3 \cdot 12}{3Ebh^3} \leq [f]$ . Отсюда:  $\max(b \times h)$  или  $\min(P)$ .

$[f]$  - допустимый прогиб балки (допустимая стрела прогиба).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ



Дано:  $P, l, b, h, \varphi, E$   
 $f = ?$

$\text{tg } \alpha = \frac{f_y}{f_x} = \frac{P_y l^3}{3EI_y} \cdot \frac{3EI_x}{P l^3} = \frac{P \sin \varphi}{P \cos \varphi} \cdot \frac{I_x}{I_y}$        $\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi \cdot \frac{I_x}{I_y}$

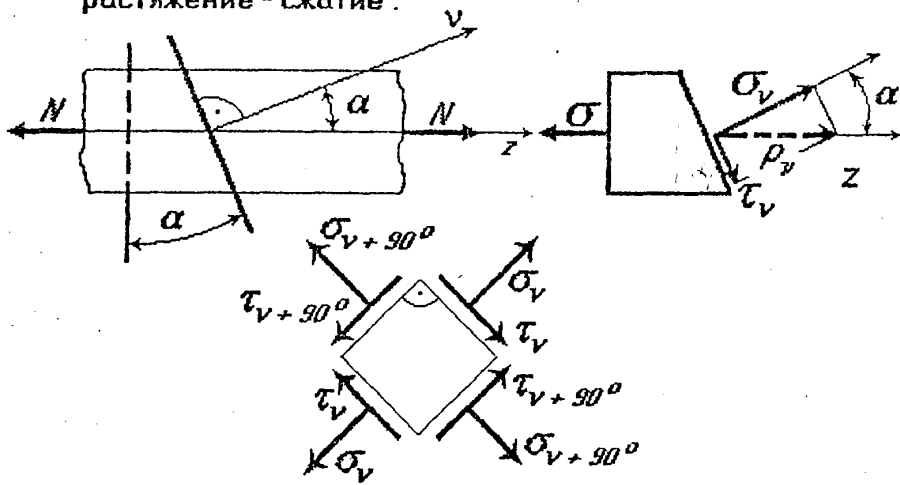
- а) В общем случае  $I_x \neq I_y$ , силовая линия и линия изгиба не совпадают - косоый изгиб.
- б) Если  $I_x = I_y$  ( $I_{xy} = 0$ ) - силовая линия и линия изгиба совпадают - прямой изгиб. (слайд 16-05)



ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ  
НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Напряжения в площадке, проведенной через заданную точку тела, зависят от положения площадки:

растяжение - сжатие:

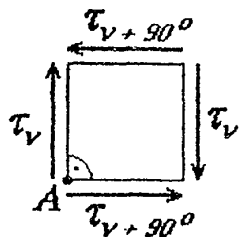


$$\sigma = \frac{N}{S}$$

$$\rho_v = \sigma \cos \alpha$$

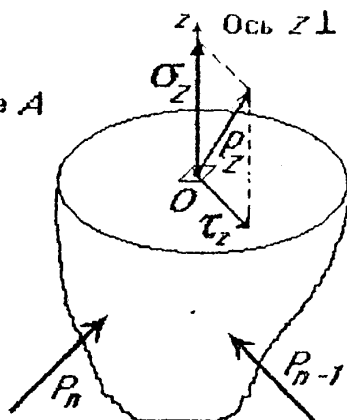
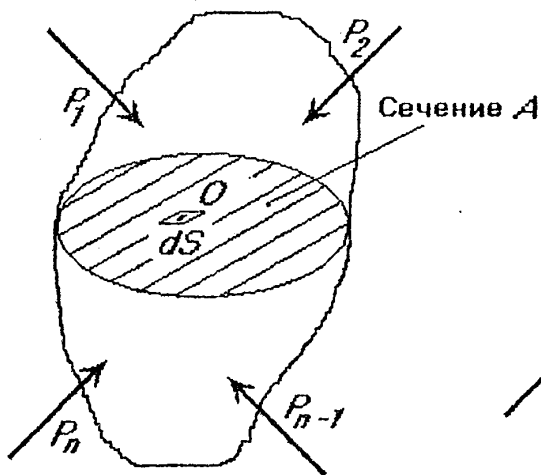
$$\sigma_v = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_v = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

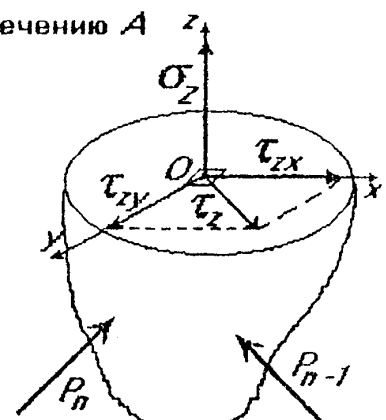


$$\sum M_A = 0$$

Рассмотрим сплошное тело (не обязательно упругое), нагруженное системой внешних сил ( $P_B$ ) и находящееся в равновесии. Сплошность материала дает возможность перехода к бесконечно малым объемам.



$$\rho_z^2 = \sigma_z^2 + \tau_z^2$$



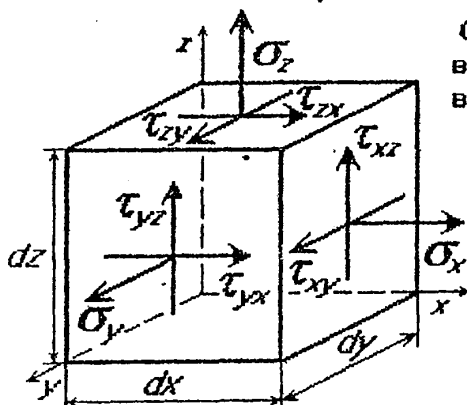
$$\tau_z^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2$$

Совокупность напряжений в точке тела, отвечающих всем проходящим через эту точку площадкам, называют **НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ**

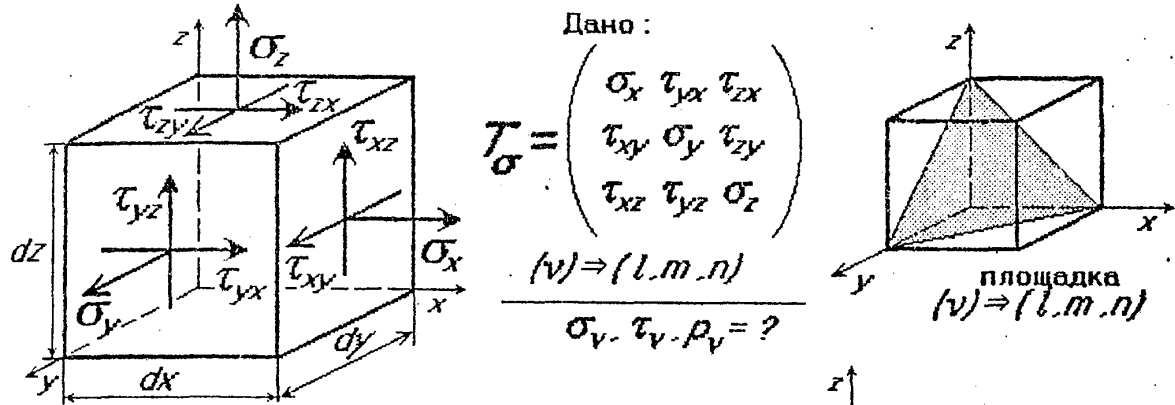
Выделим бесконечно малый прямоугольный параллелепипед (с точкой O внутри) с помощью трех пар плоскостей: полные напряжения в секущей площадке раскладываем на три составляющих.

Размеры параллелепипеда:

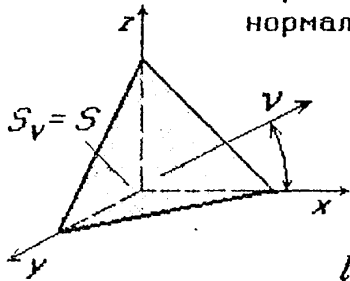
$$dx \times dy \times dz$$



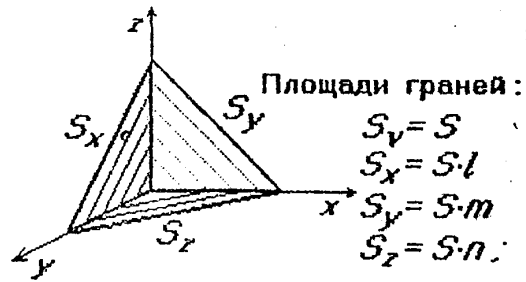
**НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОЩАДКЕ, ПРОИЗВОЛЬНО НАКЛОНЕННОЙ К ОСЯМ**



Положение площадки определяется положением нормали  $v(l, m, n)$



$$\begin{aligned} \cos(\hat{v}, x) &= l; \\ \cos(\hat{v}, y) &= m; \\ \cos(\hat{v}, z) &= n; \end{aligned}$$

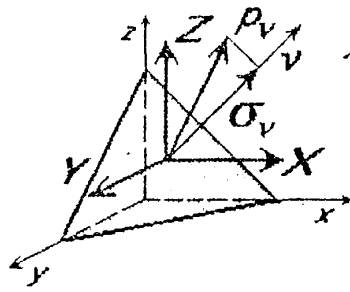


Площади граней:

$$\begin{aligned} S_v &= S \\ S_x &= S \cdot l \\ S_y &= S \cdot m \\ S_z &= S \cdot n \end{aligned}$$

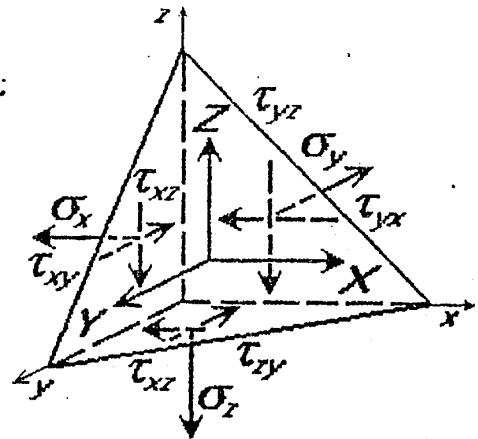
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Воспользуемся методом сечений и рассмотрим равновесие трехгранной призмы:



$X, Y, Z$  - составляющие полного напряжения  $\rho_v$ :

$$\begin{aligned} \rho_v^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2; \\ \rho_v^2 &= \sigma_v^2 + \tau_v^2; \\ \sigma_v &= Xl + Ym + Zn; \end{aligned}$$



Условия равновесия:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= X S - \sigma_x S_x - \tau_{yx} S_y - \tau_{zx} S_z; \\ \Sigma Y &= Y S - \tau_{xy} S_x - \sigma_y S_y - \tau_{zy} S_z; \\ \Sigma Z &= Z S - \tau_{xz} S_x - \tau_{yz} S_y - \sigma_z S_z; \end{aligned}$$

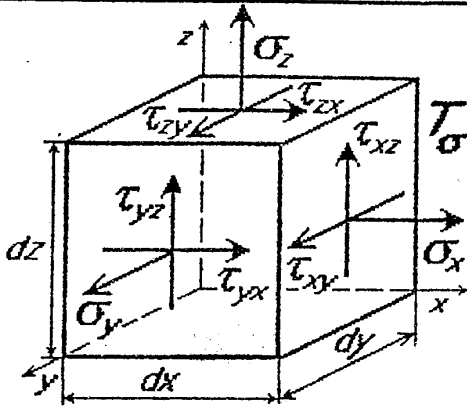
$$\begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n; \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, зная напряжения в трех взаимно перпендикулярных площадках, можно найти напряжения в любой площадке, т.е. напряженное состояние полностью характеризуют девять величин, совокупность которых называют **ТЕНЗОРОМ НАПРЯЖЕНИЙ**:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

направление напряжений  
→ x  
→ y  
→ z

↓ ↓ ↓  
x y z  
Площадки    нормаль к площадке



$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Из девяти компонент тензора напряжений независимы только шесть. Докажем это, приравняв к нулю сумму моментов сил, действующих на элемент:

$$\sum M_y = \tau_{zx} dx dy dz - \tau_{xz} dx dy dz = 0;$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned}$$

Эти равенства называют законом парности касательных напряжений: касательные напряжения во взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и направлены к общему ребру этих площадок, либо от него.

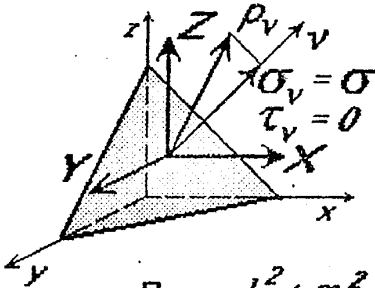
**ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ**

Найдем секущую площадку, в которой касательные напряжения равны нулю.

$$X = \sigma l, Y = \sigma m, Z = \sigma n,$$

Подставляя в уравнения (1), получим:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0; \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0; \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0; \end{aligned}$$



При:  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Отсюда:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0;$$

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0;$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

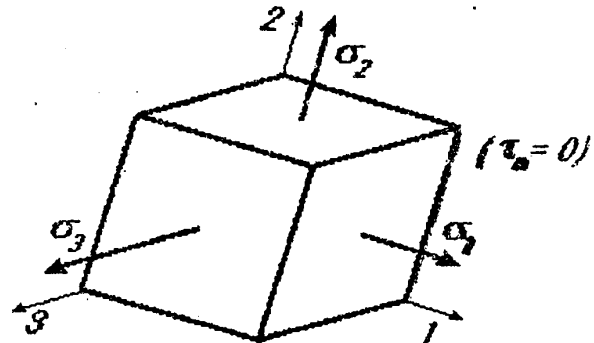
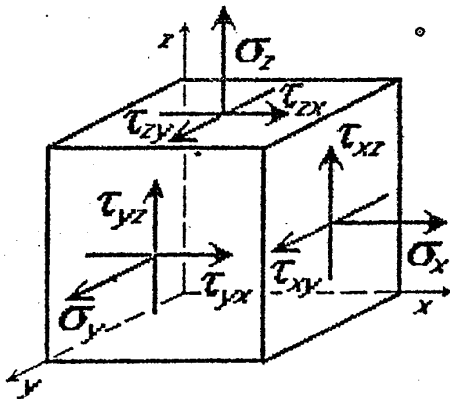
$I_1, I_2, I_3$  - инварианты напряженного состояния.

Площадки, в которых касательные напряжения равны нулю, называются **ГЛАВНЫМИ**.

Нормальные напряжения в главных площадках называются **ГЛАВНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ**, а соответствующие им координатные оси - **главными осями напряжений**.

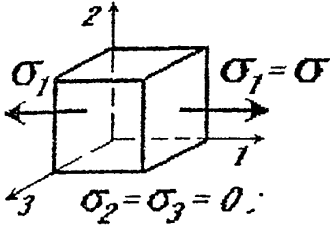
В каждой точке тела имеются хотя бы три взаимно перпендикулярные главные площадки. Обозначения: **ГЛАВНЫЕ ОСИ - 1, 2, 3**.

**ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .**

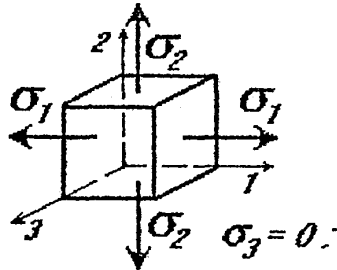


ВИДЫ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

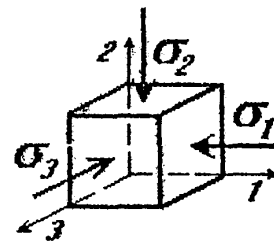
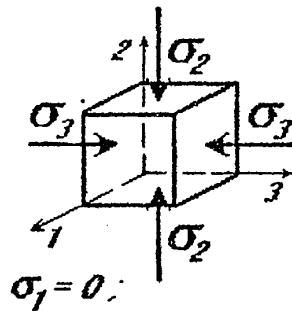
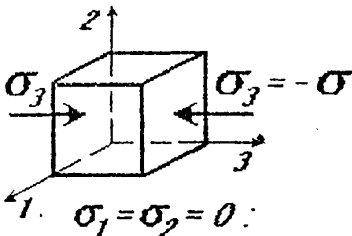
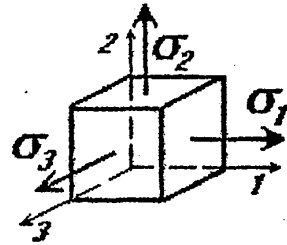
1. Линейное напряженное состояние.  
Одно из ГЛАВНЫХ напряжений отлично от 0.



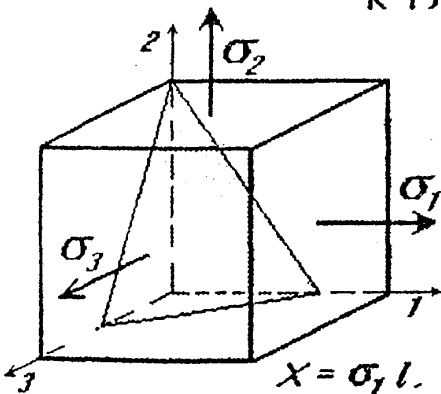
2. Плоское напряженное состояние.  
Одно из ГЛАВНЫХ напряжений равно 0.



3. Объемное напряженное состояние.  
Все ГЛАВНЫЕ напряжения отличны от 0.



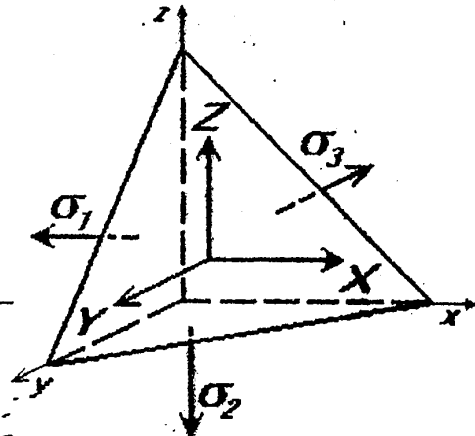
НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОЩАДКАХ, ПРОИЗВОЛЬНО НАКЛОНЕННЫХ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ



$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$(v) = (l, m, n)$$

$$\sigma_v \cdot \tau_v \cdot \rho_v = ?$$



$$X = \sigma_1 l, Y = \sigma_2 m, Z = \sigma_3 n$$

$$\rho_v^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2$$

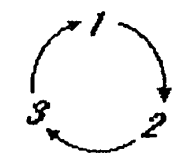
$$\sigma_v = Xl + Ym + Zn = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

$$\tau_v^2 = \rho_v^2 - \sigma_v^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2$$

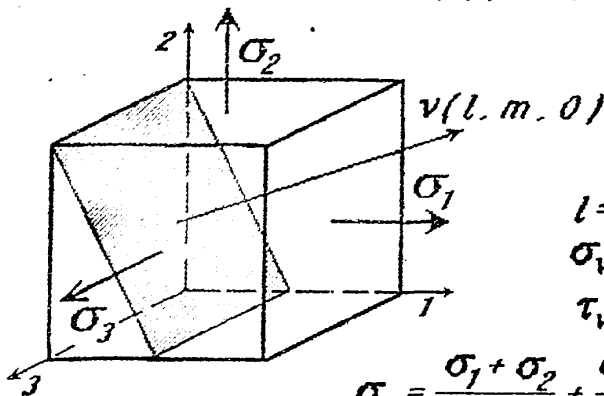
Напряжения в октаэдрических площадках. Октаэдрическая площадка - площадка равнонаклоненная к главным осям:  $l^2 + m^2 + n^2 = 1; l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{3}$

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$



НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОЩАДКАХ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ГЛАВНЫМ ОСЯМ



Дано:

$$T_{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\text{пл} \parallel \sigma_3, (v) \Rightarrow (l, m, 0)$$

$$\sigma_v, \tau_v = ?$$

$$l = \cos \alpha, m = \sin \alpha, n = 0;$$

$$\sigma_v = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_v = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad \tau_v = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha;$$

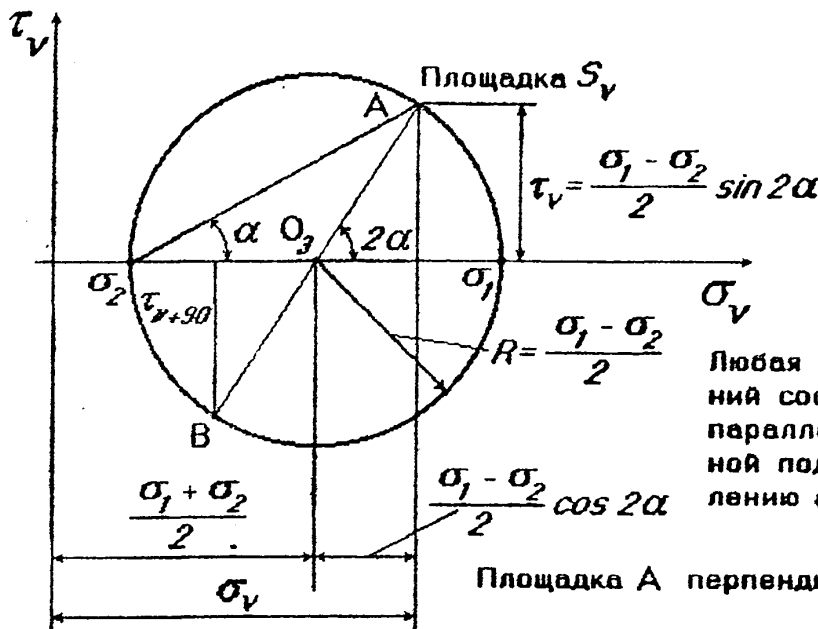
$$\left( \sigma_v - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_v^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (2) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

В системе координат  $(x = \sigma_v, y = \tau_v)$  уравнение (2) есть уравнение окружности, центр которой расположен на оси  $x$  ( $\sigma_v$ ) на расстоянии  $a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ ;  $b = 0$  от начала координат, а радиус  $R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ .

$\sigma_1$  и  $\sigma_2$  - заданы,  $\sigma_v$  и  $\tau_v$  - переменные.

КРУГ НАПРЯЖЕНИЙ О. МОРА

Круговая диаграмма напряженного состояния

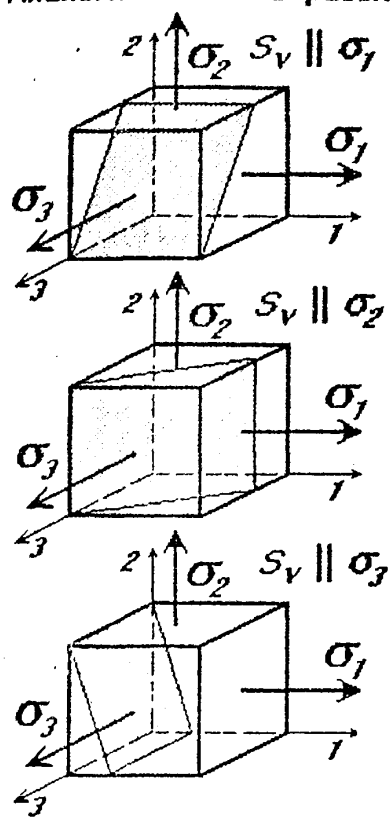


Любая точка круга напряжений соответствует площадке параллельной  $\sigma_3$  и наклоненной под углом  $\alpha$  к направлению  $\sigma_1$ .

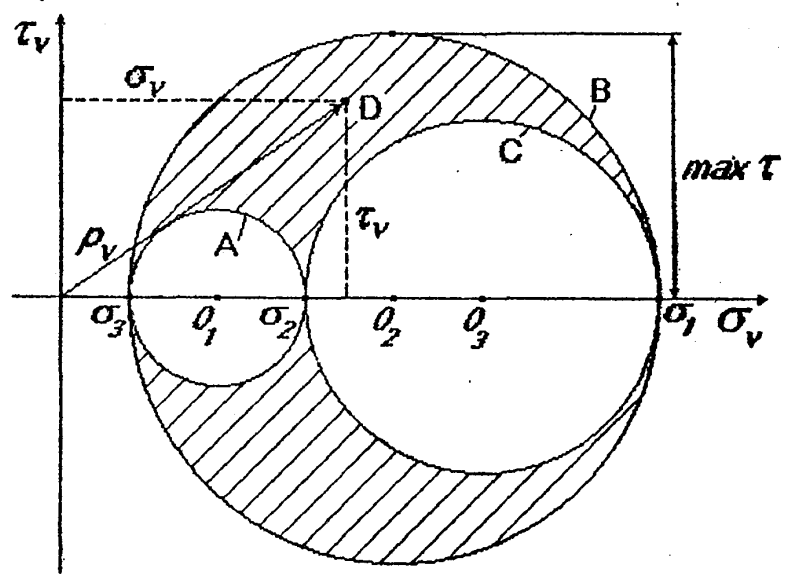
Площадка А перпендикулярна площадке В

**ПОЛНАЯ КРУГОВАЯ ДИАГРАММА НАПРЯЖЕНИЙ О. МОРА**

Аналогично можно рассмотреть площадки параллельные  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  :

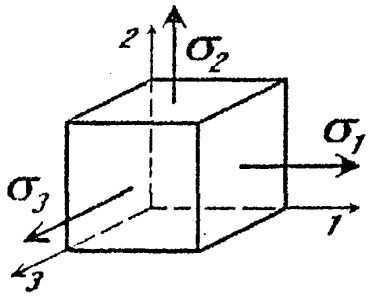


Каждой серии площадок соответствует свой круг напряжений :



$D \rightarrow S_v (l.m.n) \rightarrow \sigma_v, \tau_v, \rho_v$   
 Круг A  $\rightarrow S_v \parallel \sigma_1$     Круг B  $\rightarrow S_v \parallel \sigma_2$   
 Круг C  $\rightarrow S_v \parallel \sigma_3$

**СВОЙСТВА ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ  
НАИБОЛЬШИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ**



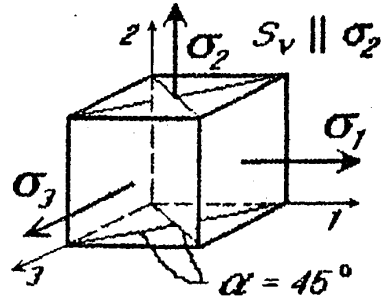
Главные площадки 1, 2, 3  $\rightarrow \tau_n = 0$  :

$$\sigma_1 = \max(\sigma_v, \tau_v, \rho_v) :$$

$$\sigma_3 = \min(\sigma_v, \tau_v, \rho_v) :$$

$$\max \tau = \max(\tau_v) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

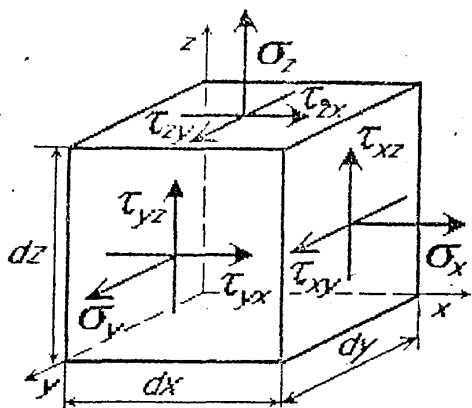
- действуют в площадках  $\parallel \sigma_2$  и  
равнонаклоненных к направлениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$



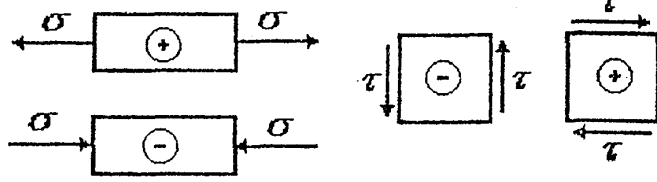
$$\sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$\downarrow$   
max  $\tau$

КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ



Правило знаков:



Закон парности τ:

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = -\tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = -\tau_{zy}.$$

Составим таблицу из σ и τ

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

← x  
 → y  
 → z

↓ x   ↓ y   ↓ z  
 Площадки   нормаль к площадке

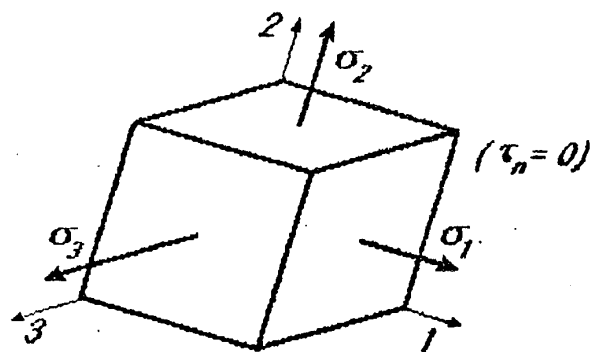
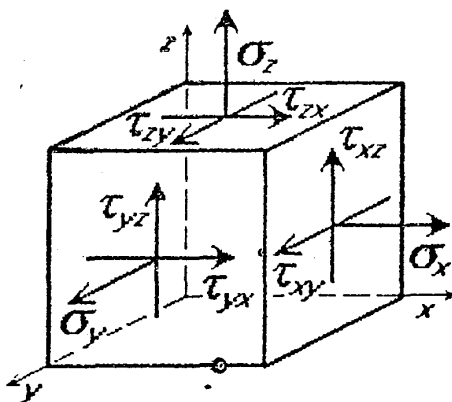
Напряженное состояние - совокупность напряжений в различных площадках, проведенных через точку тела.

Компоненты напряженного состояния - это напряжения в трех взаимноперпендикулярных площадках - элементы тензора напряжений.

ПОНЯТИЕ О ГЛАВНЫХ ОСЯХ И ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Компоненты напряженного состояния (элементы  $T_{\sigma}$ ) зависят от выбора осей координат. Они изменяются при повороте осей.

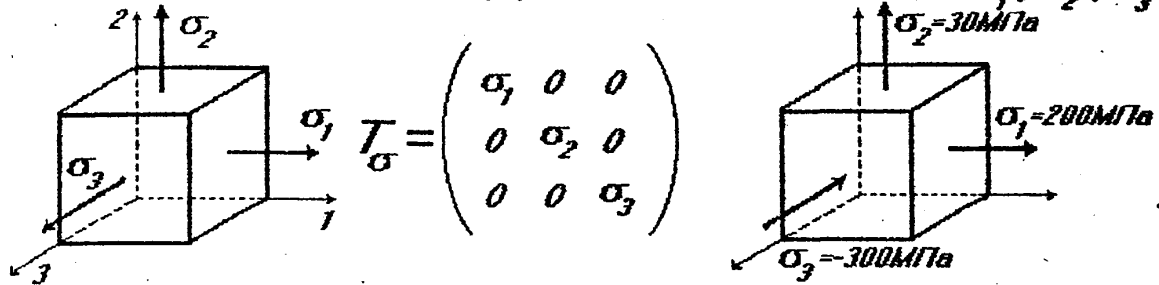
Можно найти такое положение взаимноперпендикулярных осей, при котором касательные напряжения в соответствующих площадках равны нулю.



Площадки, в которых  $\tau = 0$ , называются главными площадками. Соответствующие оси - главными осями напряжений. Нормальные напряжения в главных площадках ( $\sigma_n$ ) называются главными напряжениями ( $\tau_n = 0$ ).

ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Обозначения: ГЛАВНЫЕ ОСИ - 1, 2, 3. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

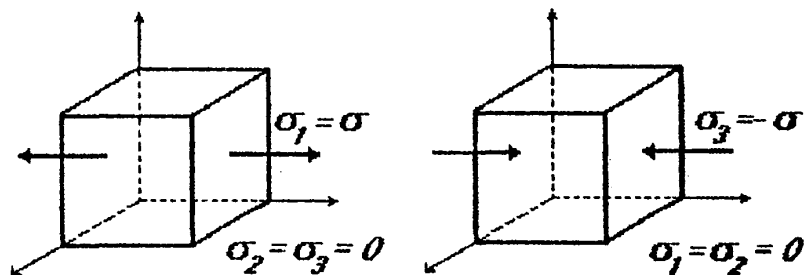


Вид напряженного состояния определяется главными напряжениями.

Виды напряженного состояния:

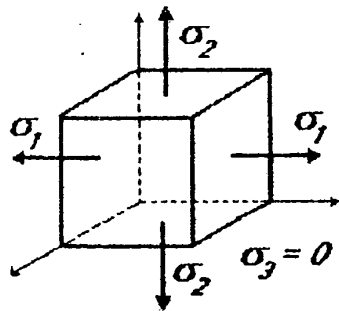
1. Линейное.
2. Плоское.
3. Объемное.

1. Линейное напряженное состояние:

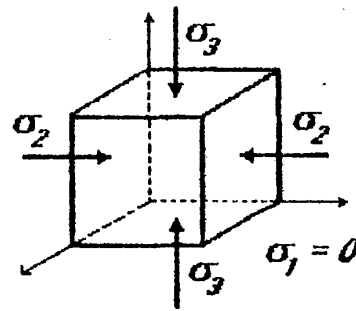


ВИДЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

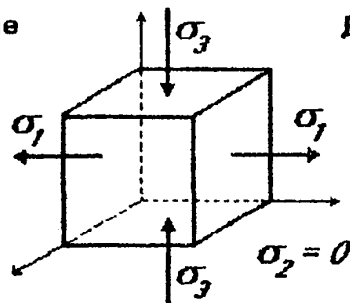
2. Плоские напряженные состояния:



Двухосное растяжение



Двухосное сжатие

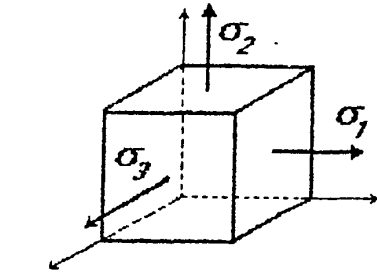


Смешанное напряженное состояние

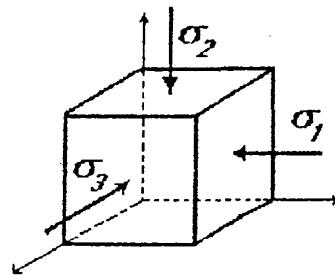


ВИДЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ (продолжение)

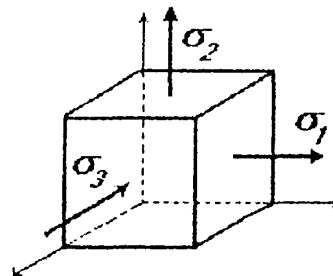
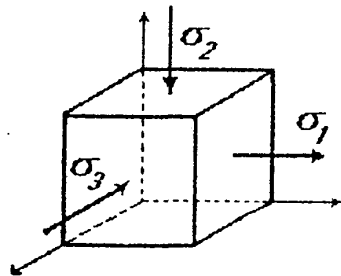
3. Объемные напряженные состояния:



Трёхосное растяжение  
 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

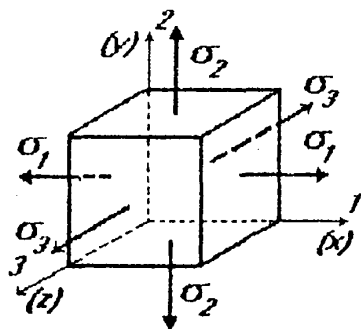


Трёхосное сжатие  
 $|\sigma_3| \geq |\sigma_2| \geq |\sigma_1|$



Смешанные напряженные состояния

НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОЩАДКЕ, ПРОИЗВОЛЬНО НАКЛОНЕННОЙ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ

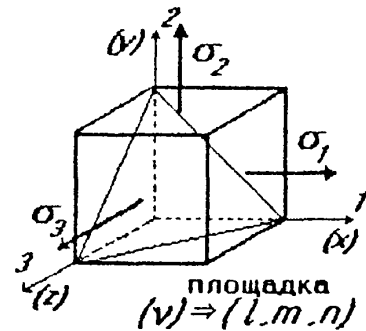


Дано:

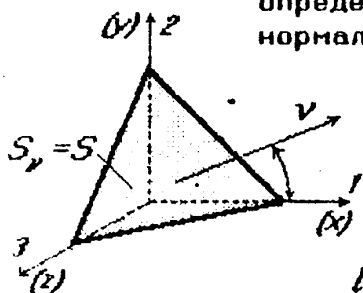
$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$v = (l, m, n)$$

$$\rho, \sigma_x, \tau_x = ?$$



Положение площадки определяется положением нормали  $v(l, m, n)$

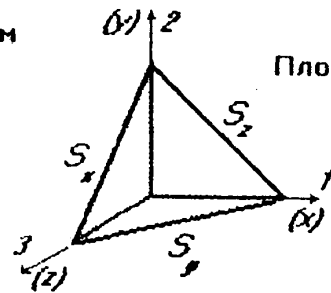


$$\cos(\hat{v}, \hat{x}) = l$$

$$\cos(\hat{v}, \hat{y}) = m$$

$$\cos(\hat{v}, \hat{z}) = n$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$



Площади граней:

$$S_p = S$$

$$S_x = S \cdot l$$

$$S_y = S \cdot m$$

$$S_z = S \cdot n$$

НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОЩАДКЕ, ПРОИЗВОЛЬНО НАКЛОНЕННОЙ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ (продолжение)

Вспользуемся методом сечений и рассмотрим равновесие трехгранной призмы:

$X, Y, Z$  - составляющие полного напряжения  $\rho_v$ :

$$\rho_v^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

Условия равновесия:

$$\Sigma X = -\sigma_1 \cdot S \cdot l + X \cdot S = 0;$$

$$\Sigma Y = -\sigma_2 \cdot S \cdot m + Y \cdot S = 0;$$

$$\Sigma Z = -\sigma_3 \cdot S \cdot n + Z \cdot S = 0;$$

Отсюда:

$$X = \sigma_1 \cdot l; \quad Y = \sigma_2 \cdot m; \quad Z = \sigma_3 \cdot n; \quad (1)$$

$$\rho_v^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2; \quad (2)$$

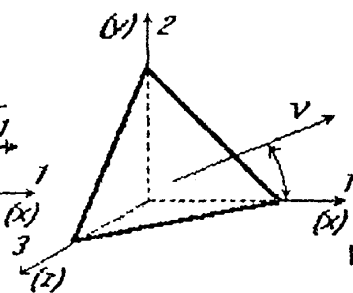
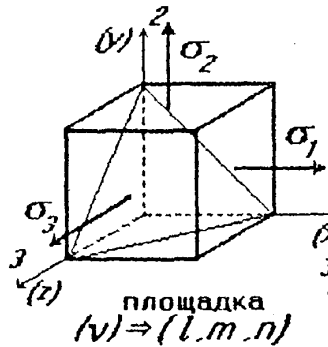
$\sigma_v = X \cdot l + Y \cdot m + Z \cdot n$  - проекция вектора равна проекции составляющих.

$$\sigma_v = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2; \quad (3)$$

$$\tau_v^2 = \rho_v^2 - \sigma_v^2$$

$$\tau_v^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2 - (\sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2)^2; \quad (4)$$

НАПРЯЖЕНИЯ В ОКТАЭДРИЧЕСКИХ ПЛОЩАДКАХ



Октаэдрическая площадка - площадка равнонаклоненная к главным осям:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1;$$

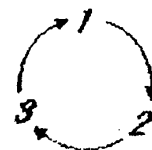
$$l_0 = m_0 = n_0 = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

Из выражения (3) следует:

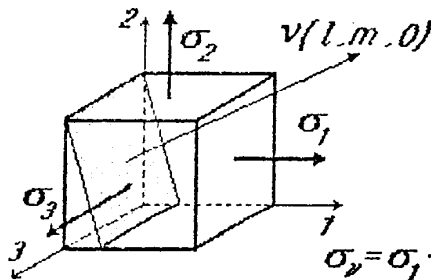
$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \rightarrow \sigma_{ср}; \quad (5)$$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (6)$$



НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОЩАДКАХ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ  
ГЛАВНЫМ ОСЯМ



Дано:

$$T_{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

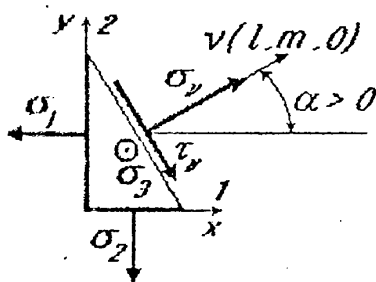
пл ||  $\sigma_3$

$$\sigma_y, \tau_y = ?$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2; \quad (3^*)$$

$$\tau_y^2 = \sigma_1^2 \cdot l^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 - (\sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2)^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2; \quad (4^*)$$

$\sigma_y$  и  $\tau_y$  - не зависят от  $\sigma_3$



$$l^2 + m^2 = 1; \quad l^2 = \cos^2 \alpha; \quad m^2 = \sin^2 \alpha;$$

$$l^2 m^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha;$$

$$\begin{cases} \sigma_y = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \tau_y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \end{cases} \quad (7)$$

НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОЩАДКАХ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ  
ГЛАВНЫМ ОСЯМ (продолжение)

$$\begin{cases} \sigma_y = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \tau_y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \end{cases} \quad (7)$$

Заменим:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha);$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha);$$

$$\begin{cases} \sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \\ \tau_y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_y - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \cos^2 2\alpha \\ & + \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \sin^2 2\alpha \end{aligned}$$

$$\left( \sigma_y - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_y^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (9)$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2;$$

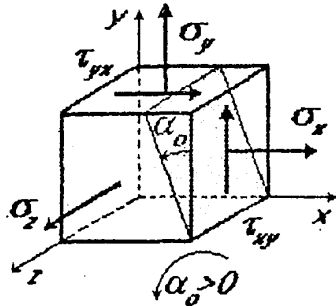
В системе координат ( $x = \sigma_y, y = \tau_y$ ) уравнение (9) есть уравнение окружности, центр которой расположен на оси  $x (\sigma_y)$  на расстоянии

$$a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \quad b = 0 \text{ от начала координат, а радиус } R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

$\sigma_1$  и  $\sigma_2$  - заданы.  $\sigma_y$  и  $\tau_y$  - переменные.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ

Элемент, у которого направление одной из главных осей и величина соответствующего главного напряжения известны:



$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$S_z$  - главная площадка

$$\sigma_z = \sigma_{гн}^I$$

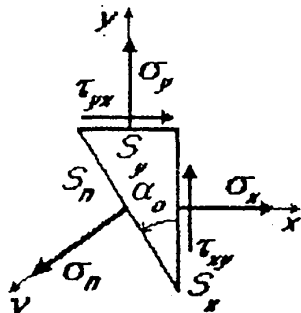
$S_x, S_y$  - не главные площадки

$$\sigma_{гн}^{II} \text{ и } \sigma_{гн}^{III} = ? \quad \alpha_0 = ?$$

Главные оси - взаимноперпендикулярные.

Ось Z - главная ось, поэтому две другие главные площадки параллельны оси Z ( $\parallel \sigma_z$ )

Рассечем элемент по одной из главных площадок и рассмотрим его равновесие



$S_y = S_n$  - главная площадка:

$\sigma_n$  - главное напряжение,  $\tau_n = 0$ :

$$S_x = S_n \cdot \cos \alpha_0; \quad S_y = S_n \cdot \sin \alpha_0;$$

Уравнения равновесия:

$$\Sigma X = \sigma_n S_n \cdot \cos \alpha_0 - \sigma_x S_n \cdot \cos \alpha_0 - \tau_{yx} S_n \cdot \sin \alpha_0 = 0;$$

$$\Sigma Y = \sigma_n S_n \cdot \sin \alpha_0 - \sigma_y S_n \cdot \sin \alpha_0 - \tau_{xy} S_n \cdot \cos \alpha_0 = 0;$$

$$(\sigma_n - \sigma_x) \cos \alpha_0 + \tau_{yx} \sin \alpha_0 = 0;$$

$$\tau_{xy} \cos \alpha_0 + (\sigma_n - \sigma_y) \sin \alpha_0 = 0; \quad (*)$$

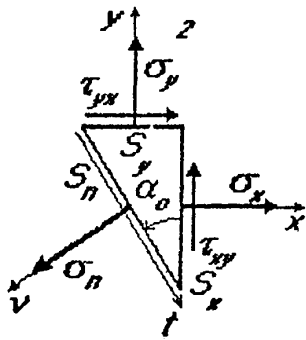
Система линейных однородных уравнений относительно  $\cos \alpha_0$  и  $\sin \alpha_0$  должна иметь не нулевое решение, т.к.  $\cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0 = 1$ .

Отсюда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\sigma_n - \sigma_x) & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_n - \sigma_y) \end{vmatrix} = 0;$$

$$(\sigma_n - \sigma_x)(\sigma_n - \sigma_y) - \tau_{xy}^2 = 0;$$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ (продолжение)



$$\sigma_n^2 - \sigma_n(\sigma_x + \sigma_y) + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0;$$

$$\sigma_n = \sigma_{\text{гл}}^{\text{II, III}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

После определения  $\sigma_{\text{гл}}^{\text{II}}$  и  $\sigma_{\text{гл}}^{\text{III}}$  с учетом  $\sigma_z = \sigma_{\text{гл}}^{\text{I}}$  обозначаем:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Из системы уравнений (\*) имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_n}{\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_n - \sigma_y}$$

Уравнение равновесия:

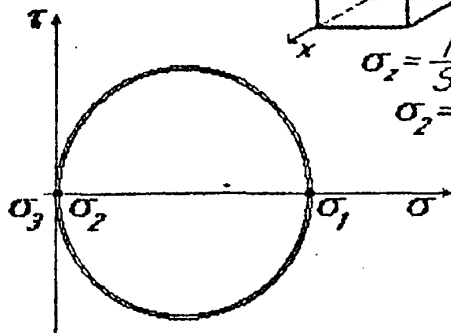
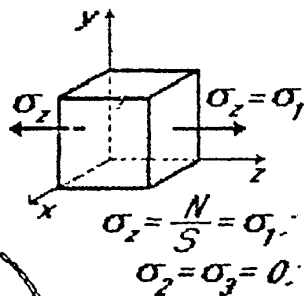
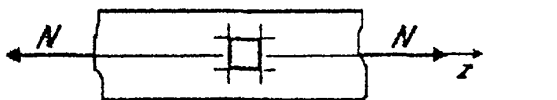
$$\Sigma P_i = \sigma_x S_n \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 - \tau_{xy} S_n \cos \alpha_0 \cos \alpha_0 - \sigma_y S_n \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \tau_{yx} S_n \sin \alpha_0 \sin \alpha_0 = 0;$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0;$$

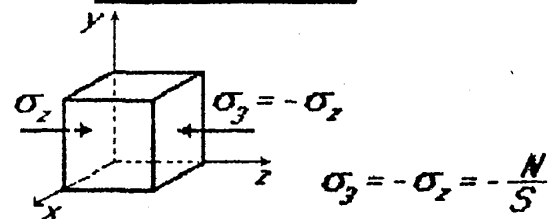
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \alpha_0 \text{ и } \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ НАГРУЖЕНИИ СТЕРЖНЯ

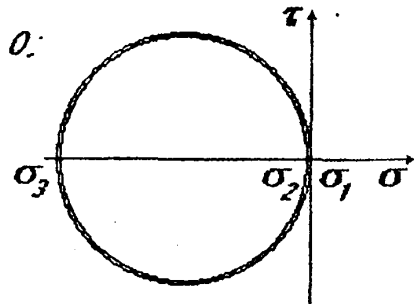
#### 1. Растяжение.



#### 2. Сжатие.



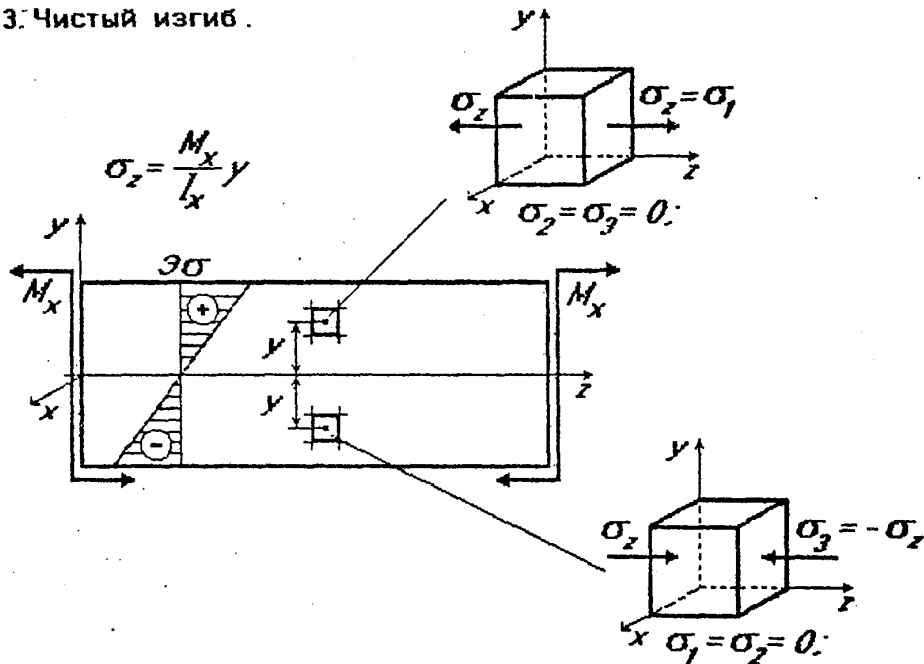
$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0;$$



Линейное однородное напряженное состояние

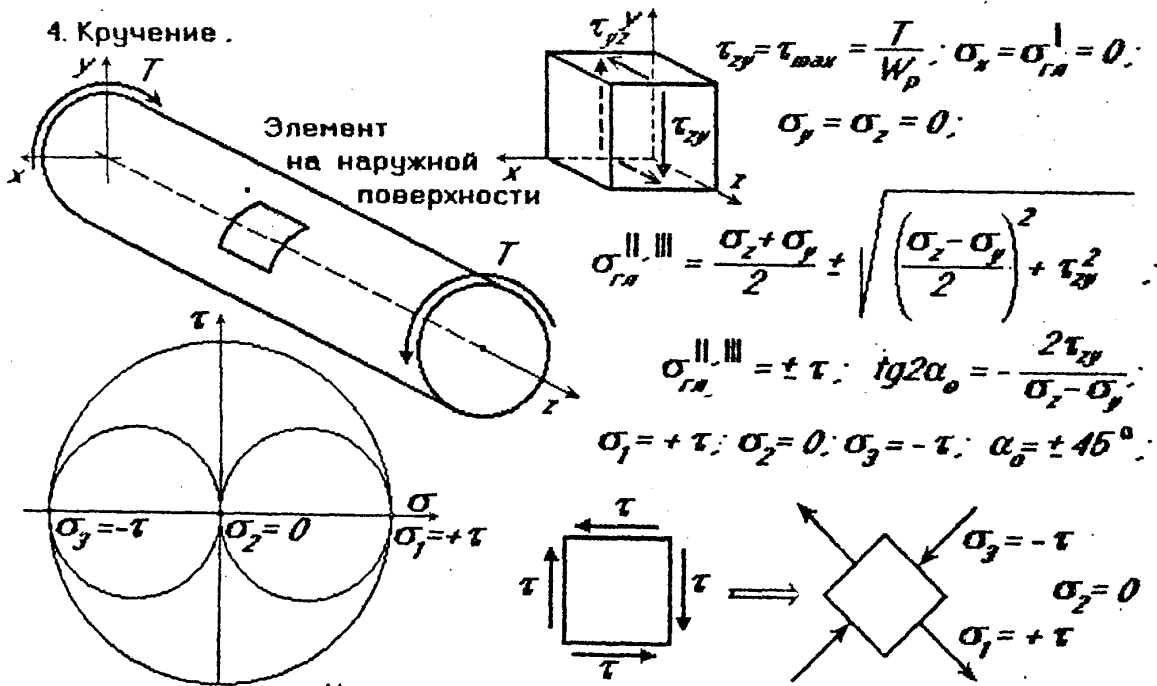
НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ НАГРУЖЕНИИ СТЕРЖНЯ (продолжение)

3. Чистый изгиб.



Линейное неоднородное напряженное состояние

4. Кручение.



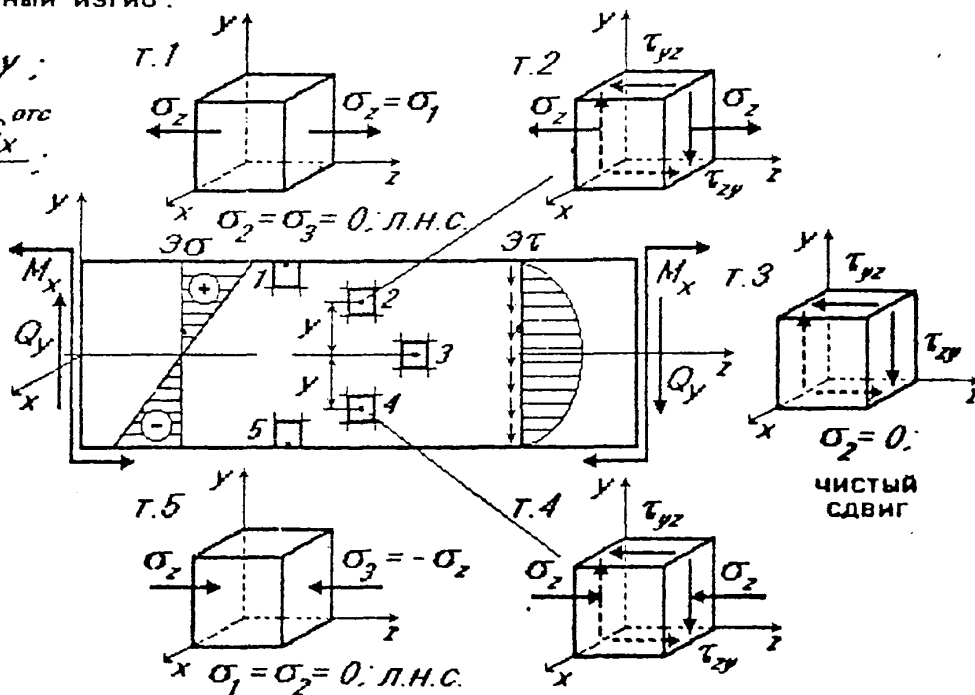
Чистый сдвиг - плоское напряженное состояние.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ СТЕРЖНЯ

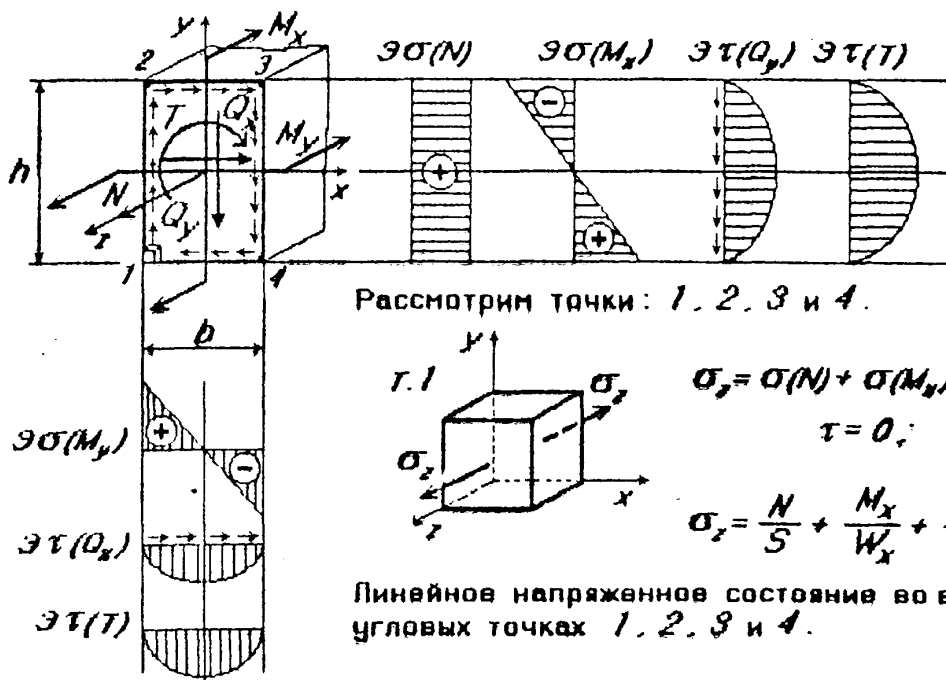
5. Поперечный изгиб.

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x}$$

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^{огс}}{I_x b}$$

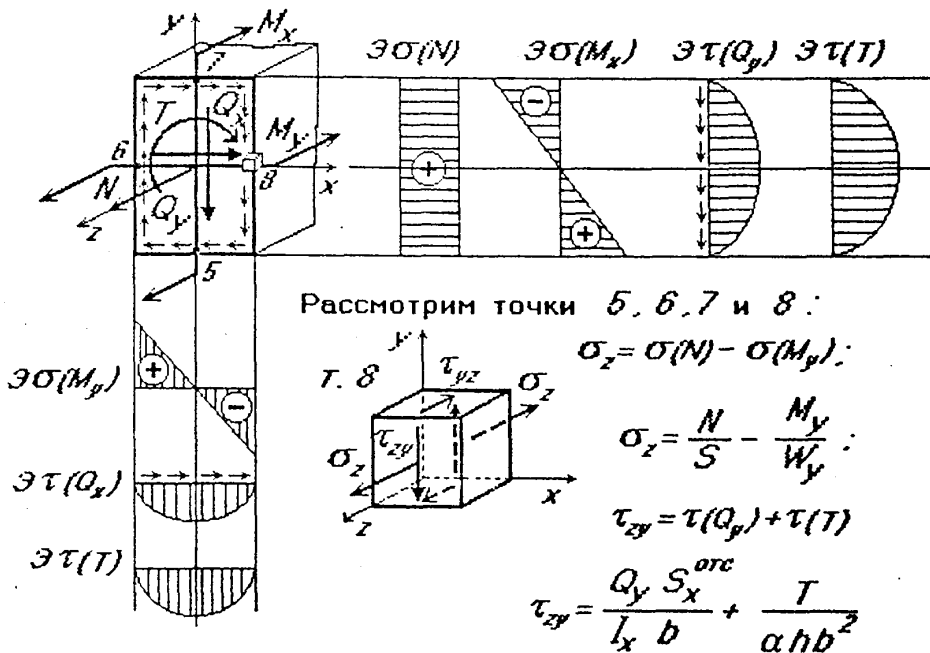


6. Сложное сопротивление.

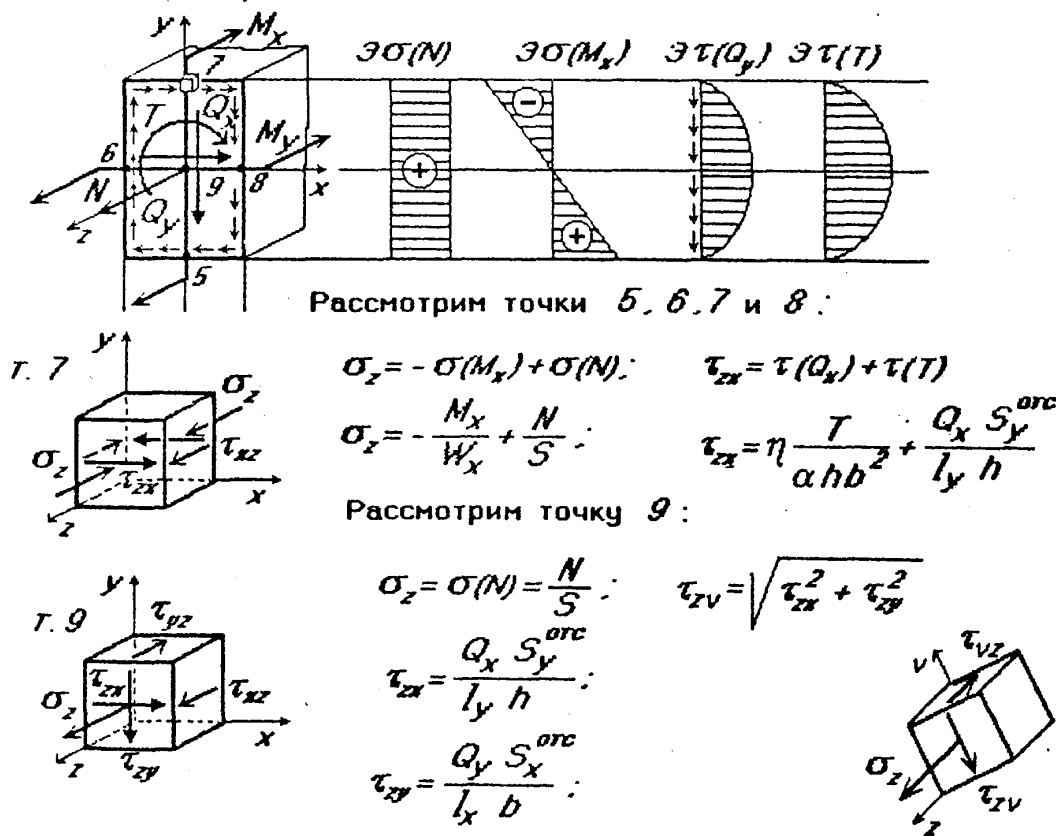


НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ СТЕРЖНЯ ( продолжение )

6. Сложное сопротивление .



6. Сложное сопротивление .



©Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

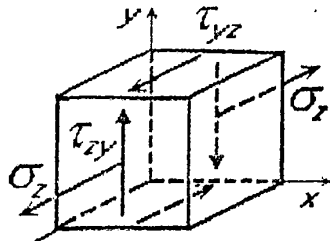


НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ, ХАРАКТЕРНОЕ ДЛЯ ТОЧЕК СТЕРЖНЯ

Упрощенное плоское напряженное состояние

Для точек стержня исходными площадками являются:

Вид слева:



$$S_x \quad \sigma_x = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0;$$

$$S_y \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{yx} = 0; \quad \tau_{yz};$$

$$S_z \quad \sigma_z; \quad \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy};$$

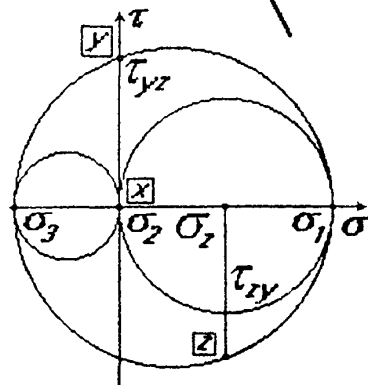
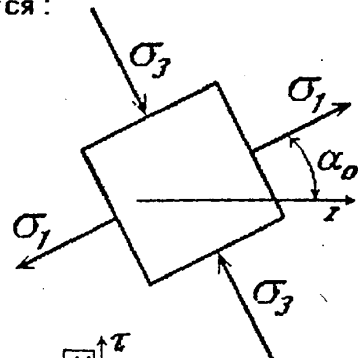
или

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z};$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2};$$

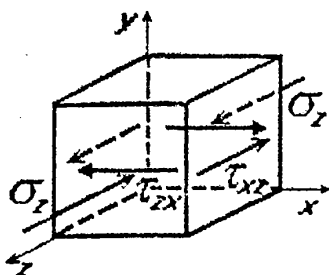
$$\sigma_2 = 0;$$



Упрощенное плоское напряженное состояние

Для точек стержня исходными площадками являются:

Вид сверху:



$$S_x \quad \sigma_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{xz};$$

$$S_y \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0;$$

$$S_z \quad \sigma_z; \quad \tau_{zx}; \quad \tau_{zy} = 0;$$

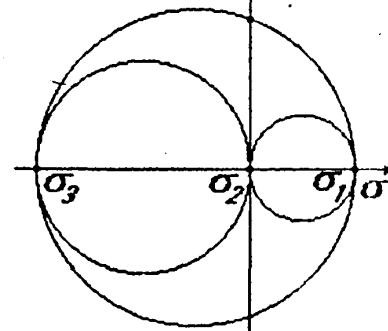
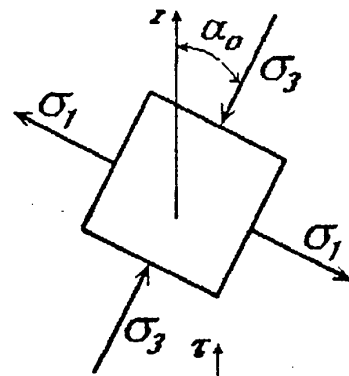
или

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zx}}{\sigma_z};$$

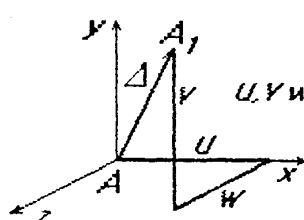
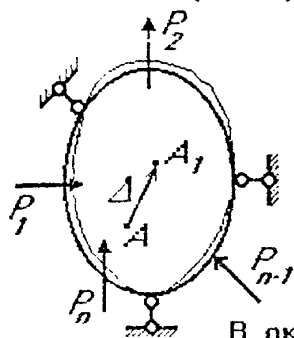
$$\sigma_{1,3} = -\frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2};$$

$$\sigma_2 = 0;$$



### ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

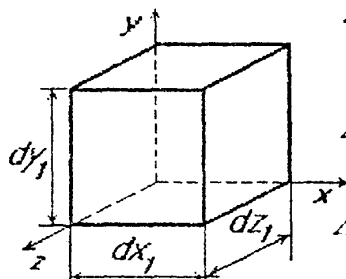
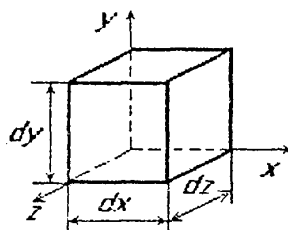
Все твердые тела способны деформироваться, т.е. изменять свои размеры и форму в результате внешних воздействий. Изменение размеров и формы тела связано с перемещениями его точек.



$\Delta$  - полное перемещение т. А

$U, V, W$  - компоненты перемещения т. А по осям  $x, y$  и  $z$

В окрестности т. А выделим б/м кубик до деформации и после нагружения:



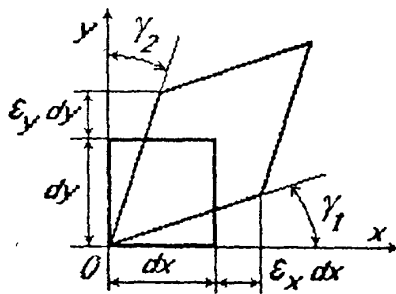
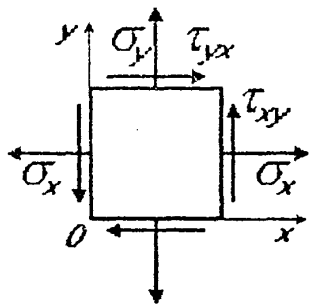
$$\Delta(dx) = dx_1 - dx; \quad \epsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}$$

$$\Delta(dy) = dy_1 - dy; \quad \epsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy}$$

$$\Delta(dz) = dz_1 - dz; \quad \epsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

### КОМПОНЕНТЫ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Рассмотрим плоскость  $xOy$ :



Соответствие:

$$\sigma_x \rightarrow \epsilon_x; \quad \sigma_y \rightarrow \epsilon_y;$$

$$\tau_{xy} \rightarrow \gamma_1 = \frac{1}{2} \gamma_{xy};$$

$$\tau_{yx} \rightarrow \gamma_2 = \frac{1}{2} \gamma_{yx};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2;$$

Аналогично две другие плоскости:

$xOz$  и  $yOz$

$$\sigma_z \rightarrow \epsilon_z; \quad \tau_{xz} \rightarrow \frac{1}{2} \gamma_{xz}; \quad \tau_{zx} \rightarrow \frac{1}{2} \gamma_{zx};$$

$$\tau_{yz} \rightarrow \frac{1}{2} \gamma_{yz}; \quad \tau_{zy} \rightarrow \frac{1}{2} \gamma_{zy};$$

Составим таблицу из  $\epsilon$  и  $\gamma$ :

$$T_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

тензор деформаций в точке тела

Элементы  $T_\epsilon$  - компоненты деформированного состояния.

С математической точки зрения  $T_\epsilon$  аналогичен  $T_\sigma$ . Формулы, полученные для напряжений можно переписать и для деформаций.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

СООТВЕТСТВИЕ

$$\sigma_x \rightarrow \varepsilon_x; \sigma_y \rightarrow \varepsilon_y; \sigma_z \rightarrow \varepsilon_z; \tau_{xy} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xy}; \tau_{yx} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{yx};$$

$$\tau_{xz} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xz}; \tau_{zx} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{zx}; \tau_{yz} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{yz}; \tau_{zy} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{zy};$$

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

ГЛАВНЫЕ ОСИ - 1, 2, 3.  
ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_n = \sigma_{\text{гл}}^{\text{II, III}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\text{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

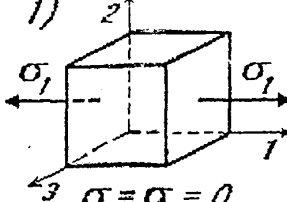
тензор деформаций в точке тела

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{\text{гл}}^{\text{II, III}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$$

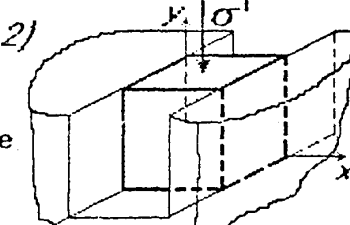
$$\text{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot \frac{1}{2}\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

### ВИДЫ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

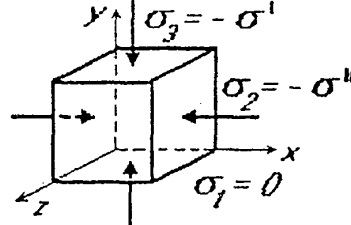
$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$  - главные деформации (в соответствующих площадках  $\gamma = 0$ ).  
Для изотропного тела направление главных осей деформаций и напряжений - СОВПАДАЮТ.

1) 

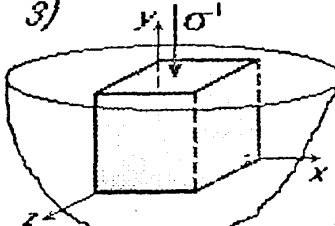
Линейное напряженное состояние.

2) 

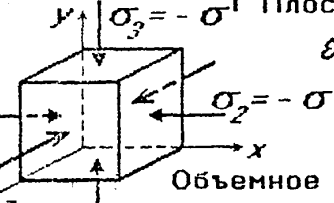
Абсолютно жесткая матрица

3) 

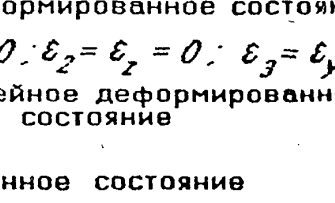
Плоское напряженное состояние

4) 

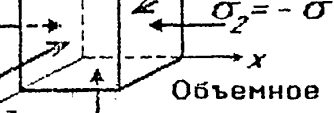
Абсолютно жесткая матрица

5) 

Объемное напряженное состояние

6) 

Плоское деформированное состояние

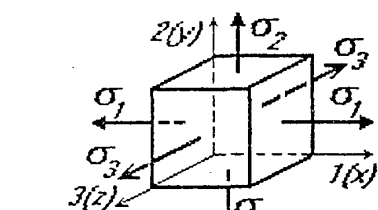
7) 

Линейное деформированное состояние

Виды НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ и виды ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ не совпадают.

© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

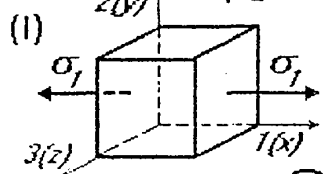


Дано:  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$   
 $E, G, \mu$   
 $\varepsilon_1 = ? \quad \varepsilon_2 = ? \quad \varepsilon_3 = ?$

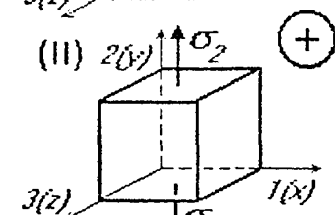
Рассмотрим упругое состояние материала.

$E, G$  и  $\mu$  - физические константы материала.

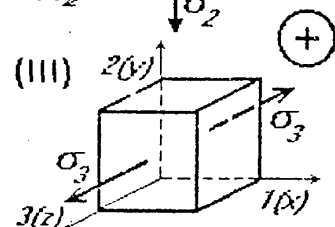
Принцип независимости действия сил:



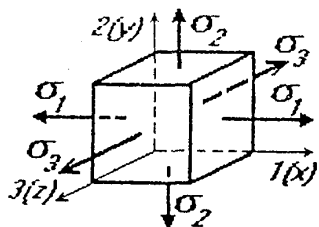
$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_2' = -\mu \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_3' = -\mu \frac{\sigma_1}{E}$$



$$\varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_2'' = \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_3'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}$$



$$\varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_2''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_3''' = \frac{\sigma_3}{E}$$



$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1'''$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_2'''$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3' + \varepsilon_3'' + \varepsilon_3'''$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Обобщенный закон Гука для главных осей.

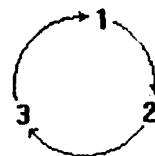
Обратные зависимости между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2} [(1-\mu)\varepsilon_1 + \mu(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2} [(1-\mu)\varepsilon_2 + \mu(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)]$$

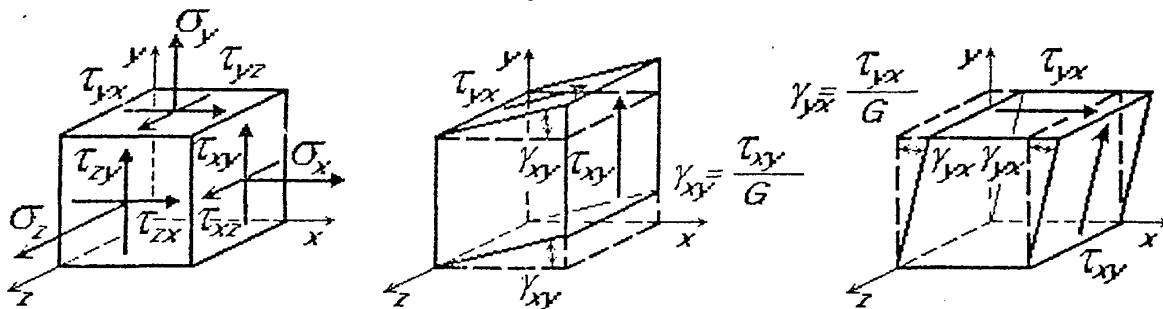
$$\sigma_3 = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2} [(1-\mu)\varepsilon_3 + \mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]$$

Круговая перестановка индексов



### ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Закон Гука для произвольных (не главных) осей:



Закон Гука для произвольных осей:

Обратные зависимости между напряжениями и деформациями:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} [(1 - \mu)\epsilon_x + \mu(\epsilon_y + \epsilon_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} [(1 - \mu)\epsilon_y + \mu(\epsilon_z + \epsilon_x)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

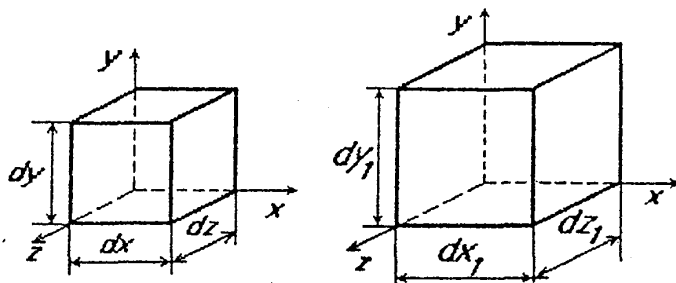
$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} [(1 - \mu)\epsilon_z + \mu(\epsilon_x + \epsilon_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} ; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} ; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} ; \tau_{xz} = G\gamma_{xz} ; \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

### ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Объемная деформация - относительное изменение объема в точке тела:



$$dx_1 = dx(1 + \epsilon_x)$$

$$dy_1 = dy(1 + \epsilon_y)$$

$$dz_1 = dz(1 + \epsilon_z)$$

Абсолютное приращение объема:  $\Delta V = V_1 - V_0 = dx_1 dy_1 dz_1 - dx dy dz$

$$\Delta V = dx(1 + \epsilon_x) dy(1 + \epsilon_y) dz(1 + \epsilon_z) - dx dy dz$$

Пренебрегаем произведениями линейных деформаций по сравнению с их первыми степенями.

$$\Delta V = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) dx dy dz$$

Относительное изменение объема:

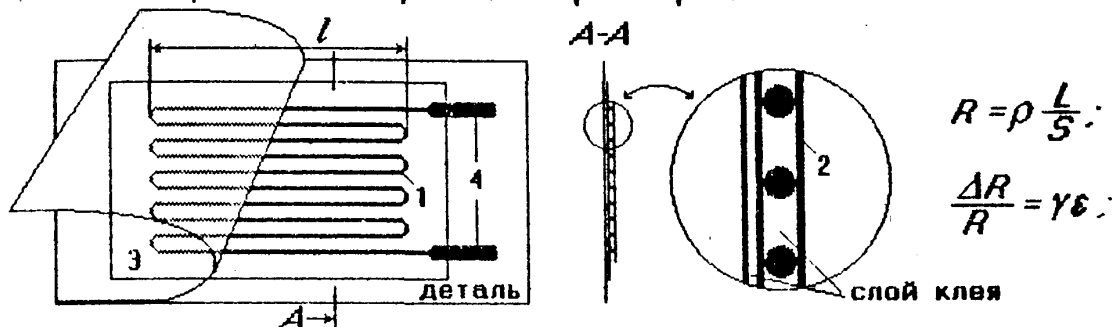
$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = const. \text{ т. е. с поворотом осей величина } \theta \text{ в точке тела не меняется.}$$

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕНЗОМЕТРИИ

Тензометрия - замер деформаций с помощью специальных приборов - тензометров. Тензометры: - механические (рычажные) или электрические.

В электрических тензометрах различают две основные части: датчик (преобразователь) и измерительное устройство.

Принцип работы датчика (тензорезистора) основан на изменении омического сопротивления проволоки при ее растяжении или сжатии.



$$R = \rho \frac{L}{S} :$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \gamma \epsilon :$$

1. Проволочная решетка (константановая или нихромовая)  $d = 0.02 \dots 0.03 \text{ мм}$ .

2 и 3 - тонкая бумага.

4 - толстые провода.

$l$  - база тензорезистора ( $l = 1.5 \dots 20 \text{ мм}$ ).

$\epsilon$  - деформация тензорезистора в направлении его продольной оси.

$R$  - сопротивление тензорезистора.

С помощью датчиков сопротивления замеряют линейные деформации по направлению базы.

Датчики наклеиваются по направлению главных осей деформаций (напряжений).

По известным  $\epsilon_{ГН}^I$  и  $\epsilon_{ГН}^{II}$  вычисляют  $\sigma_{ГН}^I$  и  $\sigma_{ГН}^{II}$  (обобщенный закон Гука - обратные зависимости).  $\sigma_{ГН}^{III} = 0$  на поверхности тела.

$$\sigma_{ГН}^I = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{ГН}^I + \mu \epsilon_{ГН}^{II}) :$$

$$\sigma_{ГН}^{II} = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{ГН}^{II} + \mu \epsilon_{ГН}^I) :$$

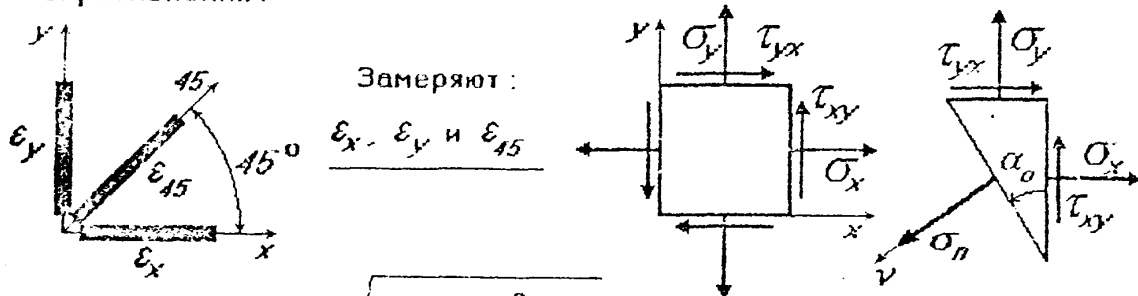
$$\epsilon_{ГН}^{III} = -\frac{\mu}{E} (\sigma_{ГН}^I + \sigma_{ГН}^{II}) :$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 :$$

$$\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3 :$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ И ПОЛОЖЕНИЕ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ

Если направления главных осей неизвестно, измеряют деформации по трем направлениям с помощью прямоугольной розетки датчиков сопротивления.



Замеряют:

$\epsilon_x, \epsilon_y$  и  $\epsilon_{45}$

$$\sigma_n = \sigma_{гр}^{III} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \quad \sigma_{гр}^{III} = 0; \quad \text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\epsilon_n = \epsilon_{гр}^{III} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}; \quad \text{tg}2\alpha_0 = -\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

Замер деформации по третьему направлению (под углом  $45^\circ$  к осям  $x$  и  $y$ ) позволяет исключить угловую деформацию

$$\sigma_y = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad \epsilon_y = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\epsilon_{45} = \frac{1}{2}\epsilon_x + \frac{1}{2}\epsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy};$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{45} - \epsilon_x - \epsilon_y;$$

$$\epsilon_n = \epsilon_{гр}^{III} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_{45})^2 + (\epsilon_y - \epsilon_{45})^2}; \quad \text{tg}2\alpha_0 = -\frac{\epsilon_x - 2\epsilon_{45} - \epsilon_y}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$\sigma_{гр}^I = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{гр}^I + \mu \epsilon_{гр}^{II});$$

$$\sigma_{гр}^{II} = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{гр}^{II} + \mu \epsilon_{гр}^I);$$

$$\epsilon_{гр}^{III} = -\frac{\mu}{E} (\sigma_{гр}^I + \sigma_{гр}^{II});$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3;$$

$$\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3;$$

КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ

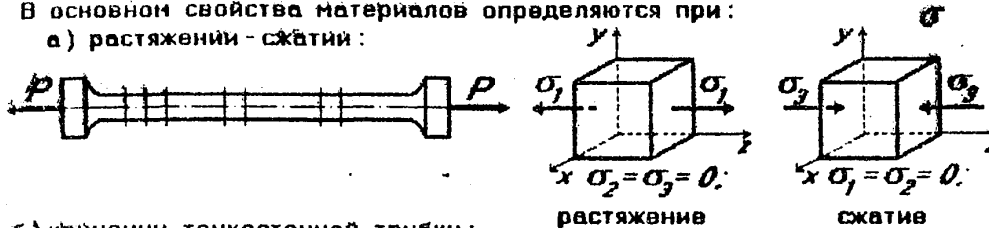
ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ ПРИ СЛОЖНОМ  
НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

1. Зависимость свойств материалов от вида напряженного состояния

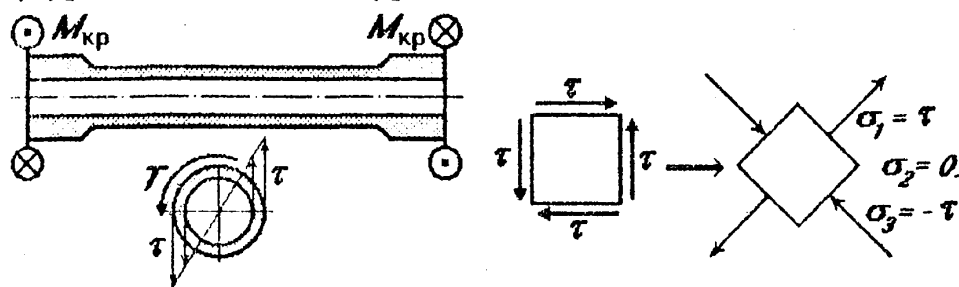
Свойства материалов изучаются при ОДНОРОДНОМ напряженном состоянии.

В основном свойства материалов определяются при:

а) растяжении - сжатии:



б) кручении тонкостенной трубки:

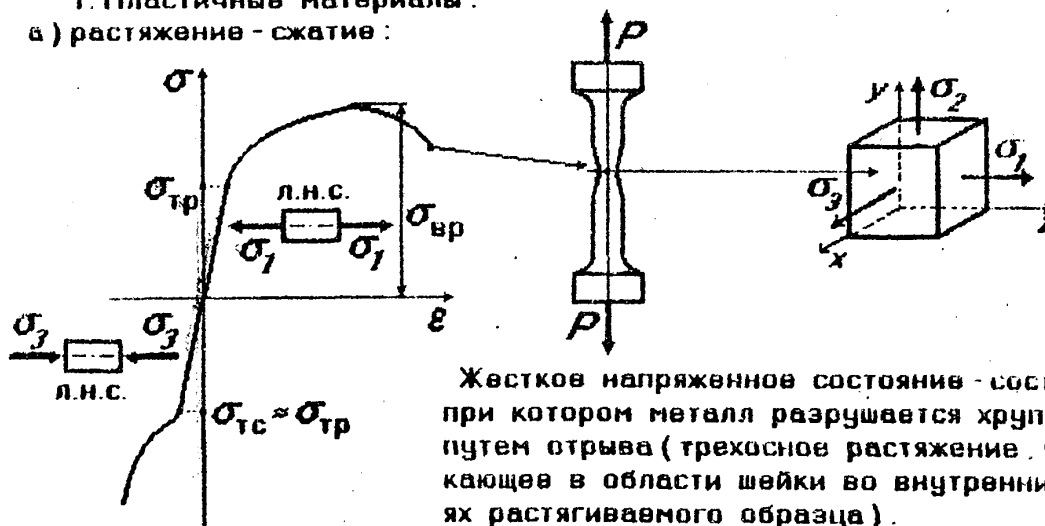


ЗАВИСИМОСТЬ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ОТ ВИДА  
НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

ПЛАСТИЧНЫЕ И ХРУПКИЕ МАТЕРИАЛЫ:

1. Пластичные материалы:

а) растяжение - сжатие:



Жесткое напряженное состояние - состояние, при котором металл разрушается хрупко, путем отрыва (трехосное растяжение, возникающее в области шейки во внутренних слоях растягиваемого образца).

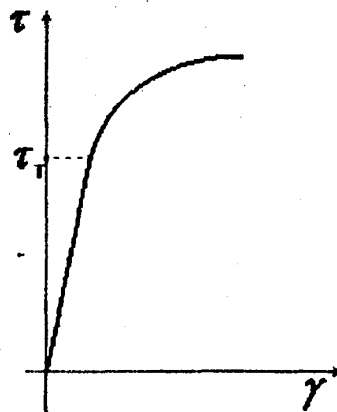
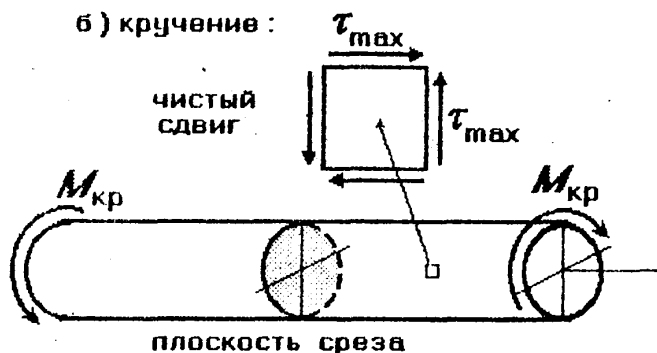
При линейном напряженном состоянии  
НЕТ РАЗРУШЕНИЯ.



**ЗАВИСИМОСТЬ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ОТ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ( продолжение )**

1. Пластичные материалы :

б) кручение :

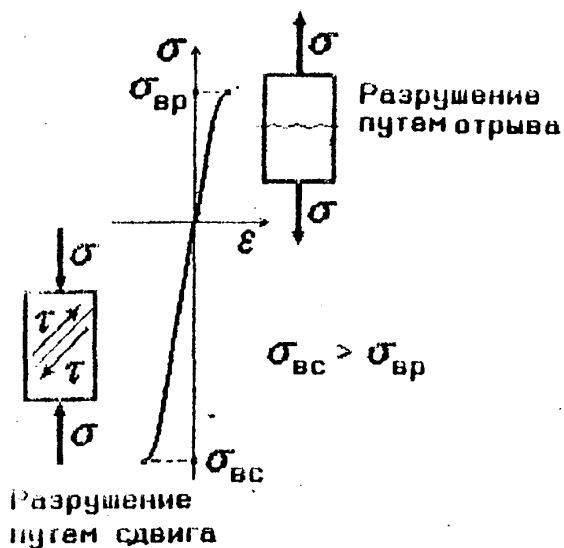


Разрушение - путем среза.

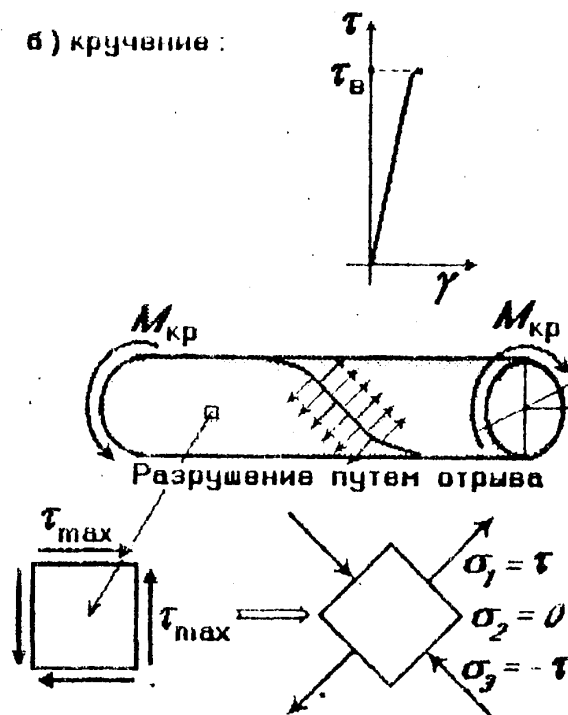
Мягкое напряженное состояние - напряженное состояние, вызывающее разрушение металла путем среза, с предшествующей разрушению пластической деформацией, под действием наибольших касательных напряжений.

2. Хрупкие материалы :

а) растяжение - сжатие :

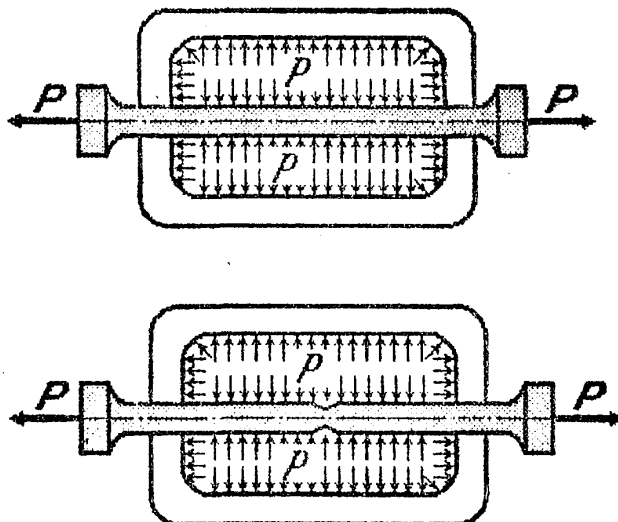


б) кручение :

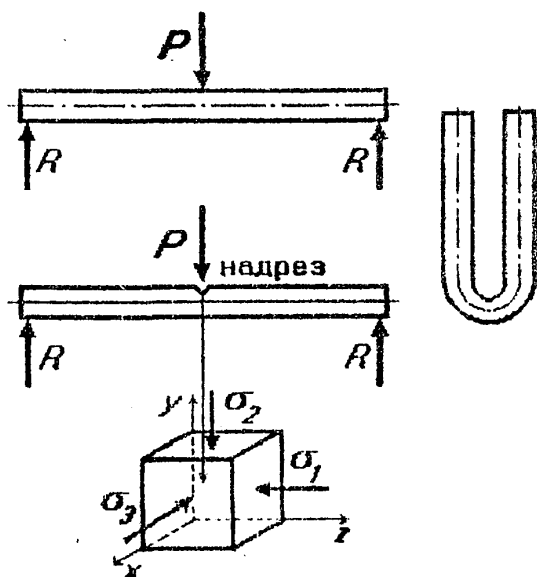


**ПЛАСТИЧНЫЕ И ХРУПКИЕ МАТЕРИАЛЫ**

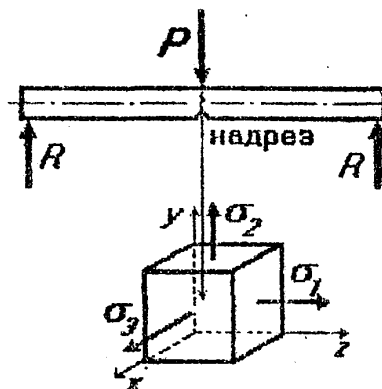
Деление материалов на пластичные и хрупкие условно. В определенных условиях хрупкие материалы могут получать пластические деформации, а пластичные разрушаться хрупко. Например: чугун - типичный хрупкий материал - под действием большого всестороннего давления приобретает свойства пластичности и разрыв образца происходит с образованием шейки.



**Испытание на изгиб пластичного материала:**



Нет разрушения - пластическое состояние материала.



- Хрупкое разрушение - путем отрыва.



## ПРЕДЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Пластичность и хрупкость - разные механические состояния материала.

Механическое состояние материала в точке тела зависит в первую очередь от напряженного состояния в этой точке, хотя и не определяется им полностью.

На механическое состояние материала влияют:

1. Вид напряженного состояния.
2. Температура.
3. Скорость нагружения.
4. Наличие концентраторов напряжений - неоднородность напряженного состояния - градиент напряжений.
5. Размеры образца (изделия).
6. Условия обработки и структурное состояние металла.
7. Радиационное облучение и т. д.

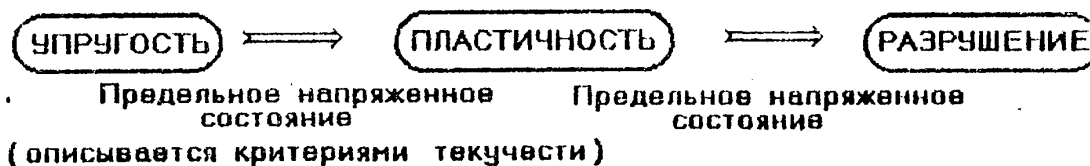
В зависимости от степени деформирования (нагруженности) материал может находиться в следующих механических состояниях:

- а) Состояние упругости. Пластические деформации очень малы  $\varepsilon_p \approx 0$ .  
Материал подчиняется закону Гука ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$  - при растяжении - сжатии,  
 $\max \sigma < \sigma_{\text{пл}}$  или  $\max \sigma < \sigma_T = \sigma_{0.2}$ )
- б) Упруго - пластическое состояние (появились  $\varepsilon_p$ )  
 $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \sigma/E + \varepsilon_p$  - при растяжении - сжатии.
- в) Состояние разрушения - нарушение сплошности - появление микротрещин, пор и т. д.

**ПРЕДЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ** (предельное состояние) состояние, при котором начинается текучесть или разрушение материала.

**ПРЕДЕЛЬНЫМ НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ** называется такое, при котором происходит качественное изменение свойств материалов - переход из одного механического состояния в другое.

Пластическое поведение:



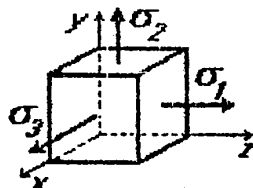
Хрупкое поведение:



### КОЭФФИЦИЕНТ ЗАПАСА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

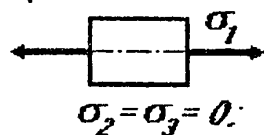
При пропорциональных, монотонных нагружениях механическое состояние материала полностью определяется величинами действующих напряжений, т. е. его напряженным состоянием, определяемым  $T_\sigma$ .

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

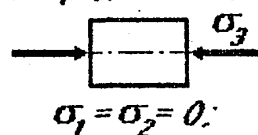
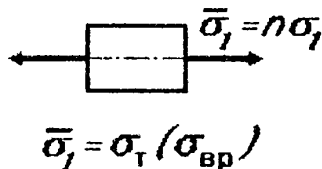


$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

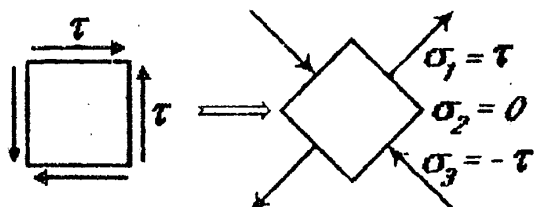
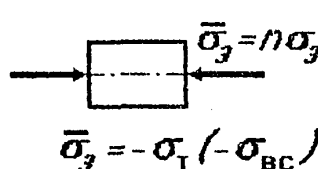
Коэффициент запаса напряженного состояния ( $n$ ) это число, показывающее во сколько раз следует увеличить ОДНОВРЕМЕННО все компоненты напряженного состояния, чтобы оно стало предельным.



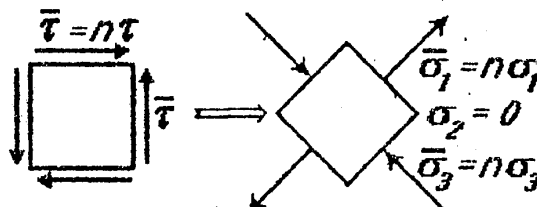
Предельное напряженное состояние



Предельное напряженное состояние



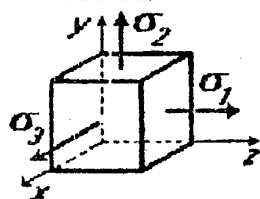
Заданное напряженное состояние



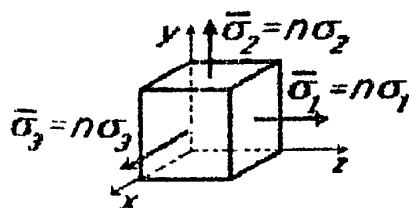
$$\bar{\tau} = n\tau; \bar{\sigma}_1 = +\tau_T (+\tau_B); \bar{\sigma}_3 = -\tau_T (-\tau_B)$$

Разные напряженные состояния можно сравнивать по коэффициенту запаса:

$$n = \frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma_1} = \frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma_2} = \frac{\bar{\sigma}_3}{\sigma_3}$$

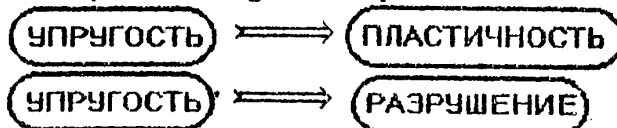


Предельное напряженное состояние подобное заданному



Два напряженных состояния равноопасны, если они имеют одинаковые коэффициенты запаса ( $n$ )

При таком сравнении в разных напряженных состояниях механические состояния материала могут быть различными.



### ЭКВИВАЛЕНТНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Сравнение напряженных состояний удобно проводить, если одно наиболее типичное и легко осуществимое в экспериментальных установках. Это основное напряженное состояние называется ЭКВИВАЛЕНТНЫМ.

В качестве эквивалентного напряженного состояния обычно выбирают одноосное РАСТЯЖЕНИЕ.

Для одного материала, находящегося в одном механическом состоянии (пластичность или разрушение) можно ввести эталон  $\sigma_{\text{ЭКВ}}$  - числовую характеристику напряженного состояния, которое реализуется наиболее просто - РАСТЯЖЕНИЕ.

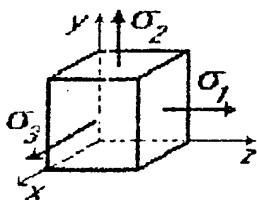
В качестве эквивалентного напряженного состояния может быть принято, вообще говоря, любое напряженное состояние.

При этом эквивалентное напряженное состояние должно удовлетворять следующим требованиям:

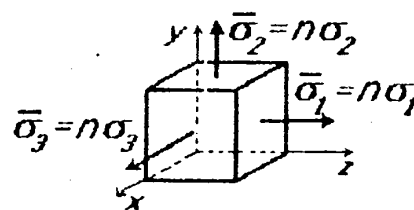
- а) нагрузки, вызывающие в образце напряженное состояние должны быть легко осуществимы;
- б) образцы для испытаний должны иметь простую форму и легко изготавливаться;
- в) напряженное состояние расчетной части образцов должно быть однородным и соосным;
- г) местные напряжения, возникающие в местах приложения внешних усилий не должны влиять на величину предельных нагрузок.

Всем перечисленным условиям удовлетворяет одноосное напряженное состояние - РАСТЯЖЕНИЕ.

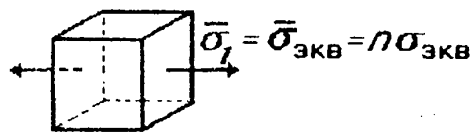
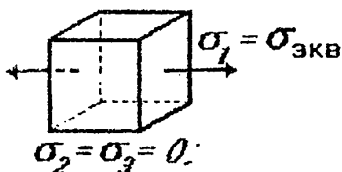
Заданное напряженное состояние



Предельное напряженное состояние подобное заданному



Эквивалентное напряженное состояние



$$n = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}} \left( \frac{\sigma_{\text{ВР}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}} \right)$$

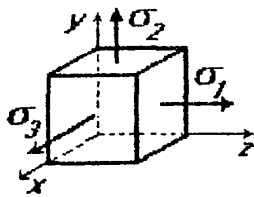
$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_{\text{ТР}}$  - пластические материалы

$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_{\text{ВР}}$  - хрупкие материалы

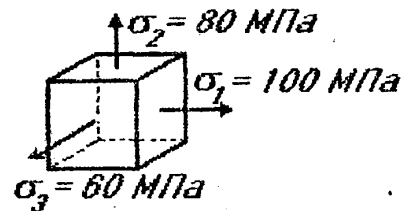
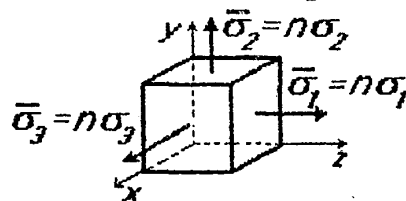
Таким образом:  $\sigma_{\text{ЭКВ}}$  - это такое напряжение, которое надо создать в РАСТЯНУТОМ ОБРАЗЦЕ, чтобы его напряженное состояние было бы равноопасно заданному напряженному состоянию, при этом должны быть одинаковые механические состояния.

## ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПРОЧНОСТИ

Заданное напряженное состояние



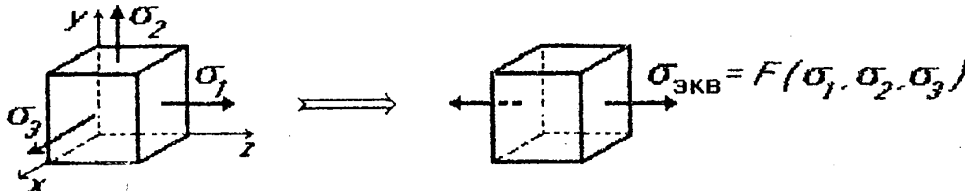
Предельное напряженное состояние подобное заданному



Трудности, возникающие при переходе от заданного к предельному напряженному состоянию:

- трудно создать сложное (объемное) напряженное состояние;
- невозможно исследовать свойства материала при неисчерпаемости возможных типов напряженных состояний.

Необходимо ТЕОРЕТИЧЕСКИ предсказать свойства материала, зная результаты испытаний при простых напряженных состояниях: растяжение, сжатие и чистый сдвиг.



Возможны два механических состояния:

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = F_1(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3) = \sigma_{\text{тр}} - \text{условие пластичности.}$$

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = F_2(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3) = \sigma_{\text{вр}} - \text{условие прочности (разрушения).}$$

Вид функции  $\bar{\sigma}_{\text{экв}} = F(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$  - называют критерием пластичности ( $F_1$ ) или прочности (разрушения) ( $F_2$ ).

Два подхода:

- Принятие правдоподобных гипотез, не доказуемых, но обоснованных последующими экспериментами (гипотезы пластичности Треска - Сен-Венана и Губера - Мизиса).
- Простое и полное описание совокупности экспериментальных данных при минимальных упрощающих предположениях - феноменологический подход (обобщенная гипотеза О. Мора).

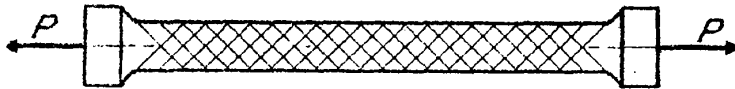
ГИПОТЕЗЫ ПЛАСТИЧНОСТИ

ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ -

гипотеза Треска - Сен - Венана

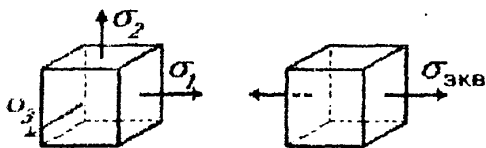
Впервые предложена Кулоном (1776 г.), позднее - Треска (1869 г.) и Сен - Венан (середина XIX века).

Образование пластических деформаций связано со сдвигами в определенных площадках, т.е. с наличием в этих площадках касательных напряжений.

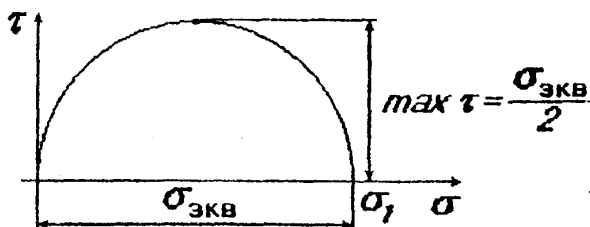
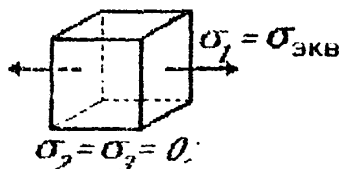
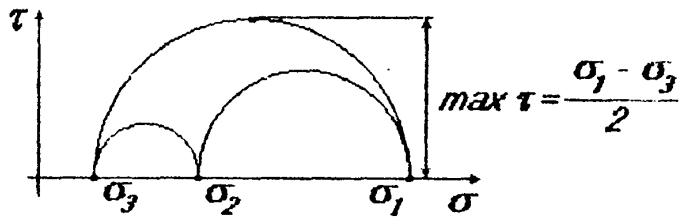
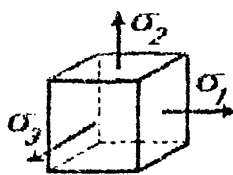


При растяжении на поверхности полированного образца заметны полосы (линии) скольжения, ориентированные под углом 45° к оси образца.

По гипотезе Треска - Сен - Венана предполагается, что сдвиги происходят в площадках с  $\max \tau$ , т.е.  $\max \tau$  - критерий пластичности.



Два элемента из одного и того же материала независимо от вида напряженного состояния являются равноопасными, если у них одинаковые  $\max \tau$ .

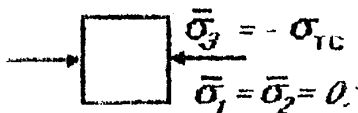


Приравнявая  $\max \tau$  имеем:  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3$

Рассмотрим примеры напряженного состояния.

Условие пластичности:  $\bar{\sigma}_{\text{экв}} = \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3 = \sigma_{\text{тр}}$

Сжатие:



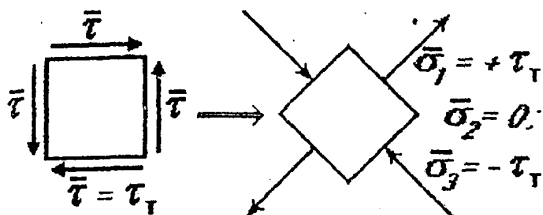
$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = 0 - (-\sigma_{\text{ТС}}) = \sigma_{\text{тр}}$

$\sigma_{\text{ТС}} = \sigma_{\text{тр}}$

Подтверждается опытом.

## ГИПОТЕЗА МАКСИМАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Чистый сдвиг:

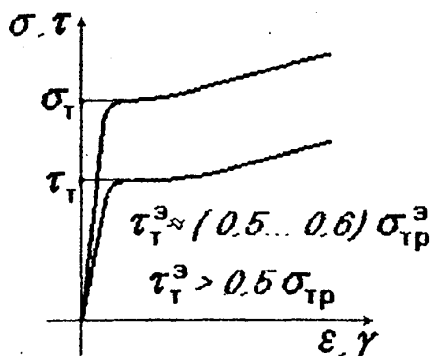


Условие пластичности:

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3 = \sigma_{\text{Тр}}$$

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = \tau_{\text{T}} - (-\tau_{\text{T}}) = \sigma_{\text{Тр}}$$

$$\tau_{\text{T}} = 0.5 \sigma_{\text{Тр}}$$



Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, гипотеза хорошо подтверждается опытом. Для пластичных материалов эта гипотеза приводит к удовлетворительным результатам.

Недостатки:

а) при напряженных состояниях близких к всестороннему растяжению или сжатию - не отражает возможность разрушения материала путем отрыва:

$$\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_3 : \sigma_{\text{экв}} \approx 0 - ?$$

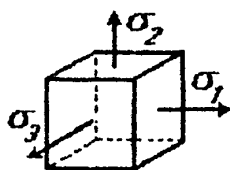
б) различносопротивляющиеся материалы растяжению и сжатию дают плохие результаты.

## ГИПОТЕЗА ОКТАЭДРИЧЕСКИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Гипотеза Мизеса - Генки - гипотеза октаэдрических касательных напряжений или гипотеза энергии формоизменения.

Впервые предложена Губером (1904г.), затем Мизес (1913г. - энергия формоизменения) и Генки (1925г. - октаэдрические касательные напряжения).

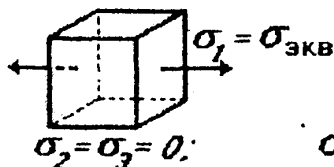
Образование пластических деформаций связано со сдвигами в октаэдрических площадках, т.е.  $\tau_{\text{окт}}$  (октаэдрические напряжения) - критерий пластичности.



$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_{\text{экв}}^2 + \sigma_{\text{экв}}^2} = \frac{1}{3} \sqrt{2} \sigma_{\text{экв}}$$

Отсюда:



$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

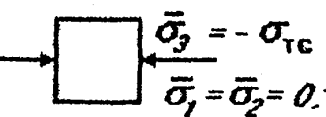
Такой же результат будем иметь, если в качестве критерия пластичности взять удельную потенциальную энергию деформации, затраченную на изменение формы элемента - энергию формоизменения.



### ГИПОТЕЗА ОКТАЭДРИЧЕСКИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассмотрим примеры напряженного состояния.

Условие пластичности:  $\bar{\sigma}_{\text{экв}}^2 = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)^2 = \sigma_{\text{ТР}}^2$

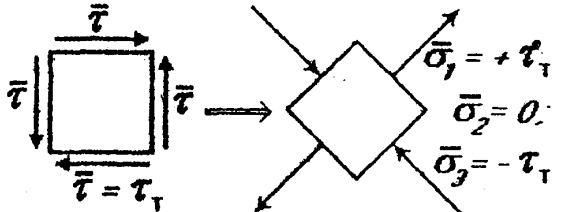


$$\bar{\sigma}_{\text{экв}}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{\text{ТС}}^2 + \sigma_{\text{ТС}}^2) = \sigma_{\text{ТР}}^2$$

$$\sigma_{\text{ТС}} = \sigma_{\text{ТР}}$$

Подтверждается опытом.

Чистый сдвиг:



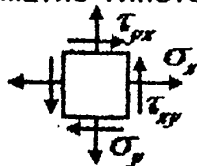
Условие пластичности:

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}}^2 = \frac{1}{2}[\tau_T^2 + \tau_T^2 + (-\tau_T - \tau_T)^2] = \sigma_{\text{ТР}}^2$$

$$\tau_T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{\text{ТР}} = 0.577 \sigma_{\text{ТР}}$$

Хорошо согласуется с опытом.

Для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие гипотеза показывает хорошие результаты.



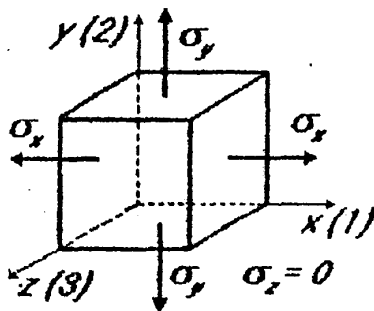
Особенно удобна для следующего плоского напряженного состояния.

Недостатки: плохие результаты дают материалы, не одинаково работающие на растяжение и сжатие.

### ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГИПОТЕЗ ПЛАСТИЧНОСТИ

Условие пластичности  $\bar{\sigma}_{\text{экв}} = F_1(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3) = \sigma_{\text{ТР}}$  представляет собой уравнение предельной поверхности в координатах  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$ . Если заданное напряженное состояние находится внутри этой поверхности - нет пластических деформаций, если на поверхности - имеют место пластические деформации.

Рассмотрим плоское напряженное состояние:



$\sigma_x$  и  $\sigma_y$  - главные напряжения.

$$-\sigma_T \leq \sigma_x \leq \sigma_T$$

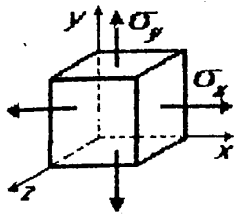
$$-\sigma_T \leq \sigma_y \leq \sigma_T$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

### ГИПОТЕЗА МАКСИМАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (гипотеза Треска - Сен - Венана)

Условие пластичности:  $\bar{\sigma}_{\text{экв}} = \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3 = \sigma_T$

## ГИПОТЕЗА МАКСИМАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ



$$-\sigma_T \leq \sigma_x \leq \sigma_T$$

$$-\sigma_T \leq \sigma_y \leq \sigma_T$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

1) Пусть  $\sigma_x > \sigma_y > 0; \sigma_1 = \sigma_x; \sigma_2 = \sigma_y; \sigma_3 = 0;$

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = \bar{\sigma}_x = \sigma_T \quad (1)$$

2) Пусть  $\sigma_y > \sigma_x > 0; \sigma_1 = \sigma_y; \sigma_2 = \sigma_x; \sigma_3 = 0;$

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = \bar{\sigma}_y = \sigma_T \quad (2)$$

3) Пусть  $\sigma_x > 0; \sigma_y < 0; \sigma_1 = \sigma_x; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \sigma_y;$

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = \bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y = \sigma_T \quad (3)$$

4) Пусть  $\sigma_y > 0; \sigma_x < 0; \sigma_1 = \sigma_y; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \sigma_x;$

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = \bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_x = \sigma_T \quad (4)$$

5) Пусть  $\sigma_x < \sigma_y < 0; \sigma_1 = 0; \sigma_2 = \sigma_y; \sigma_3 = \sigma_x;$

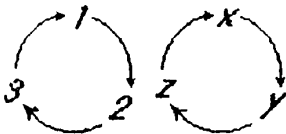
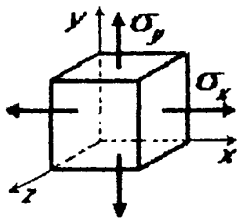
$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = -\bar{\sigma}_x = \sigma_T \quad (5)$$

6) Пусть  $\sigma_y < \sigma_x < 0; \sigma_1 = 0; \sigma_2 = \sigma_x; \sigma_3 = \sigma_y;$

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = -\bar{\sigma}_y = \sigma_T \quad (6)$$

Выражения (1) ... (6) - уравнения прямых линий на плоскости  $x = \sigma_x$  и  $y = \sigma_y$ .

## ГИПОТЕЗА ОКТАЭДРИЧЕСКИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ



$\sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_z$  - главные напряжения.

$\sigma_z = 0$  (одно из главных напряжений)

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2}$$

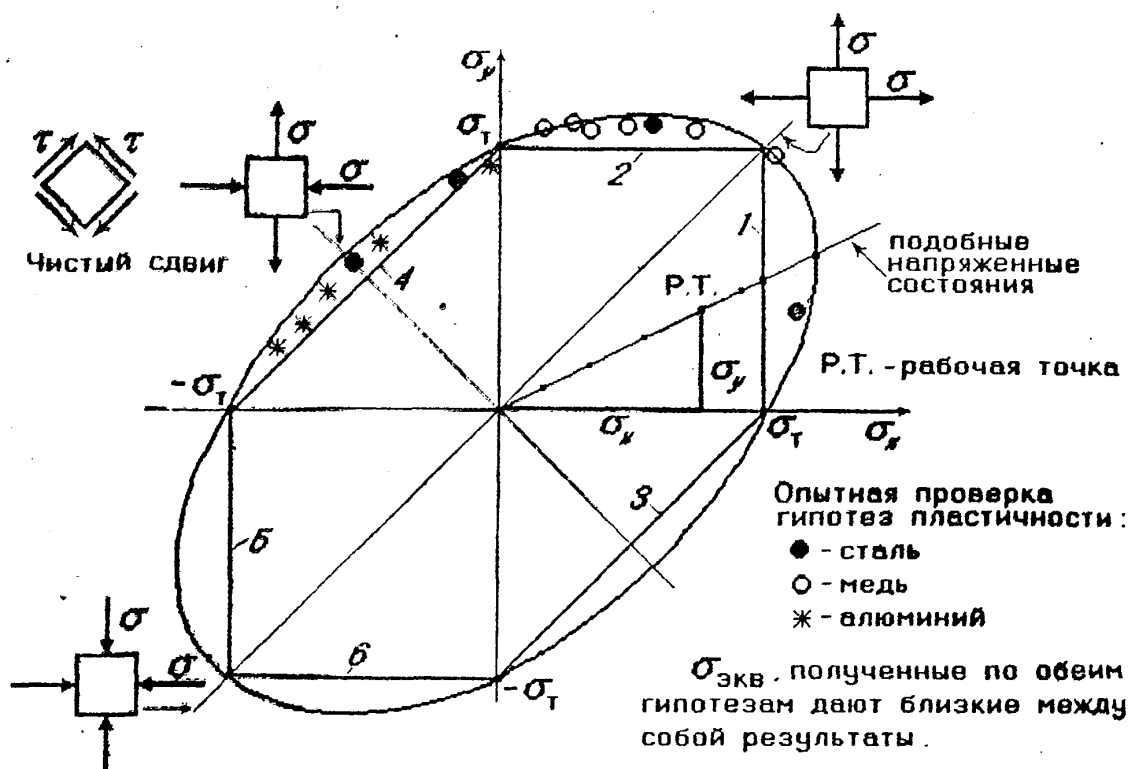
$$\sigma_{\text{экв}}^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2$$

Условие пластичности:

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}}^2 = \bar{\sigma}_x^2 - \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_y^2 = \sigma_T^2$$

Уравнение эллипса, оси которого повернуты на  $45^\circ$  к осям  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ .

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ОПЫТНАЯ ПРОВЕРКА



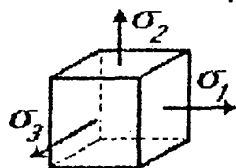
ГИПОТЕЗЫ РАЗРУШЕНИЯ (ПРОЧНОСТИ)

1. Гипотеза наибольших нормальных напряжений. Идея заложена Галилеем (в XVII в), развита Лейбницем.

МАКСИМАЛЬНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ - критерий разрушения.

2. Гипотеза наибольших относительных удлинений (предложена Мариоттом в 1682 г.).

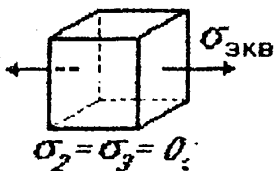
МАКСИМАЛЬНОЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЕ УДЛИНЕНИЕ - критерий разрушения.



$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_{max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$



$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{Экв} = \sigma_1$$

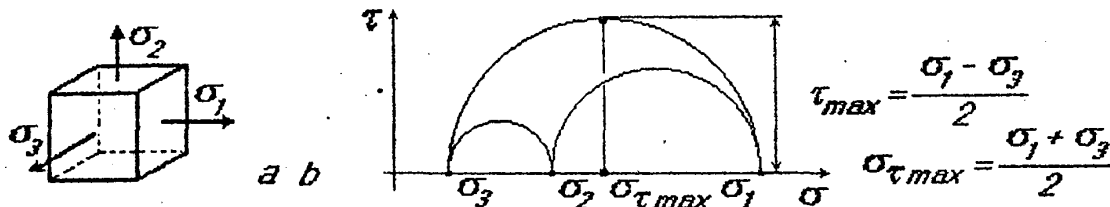
$$\sigma_{Экв} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

Обе гипотезы (критерии) не применимы к пластичным материалам. Их можно применять при расчете весьма хрупких материалов. Разрушение - путем отрыва.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ О. МОРА  
(ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД)

Перечисленные ранее гипотезы предельных состояний послужили основой для создания современной, общепринятой теории предельных состояний Мора.

Нарушение прочности происходит по некоторой площадке при наиболее неблагоприятном сочетании нормальных и касательных напряжений.

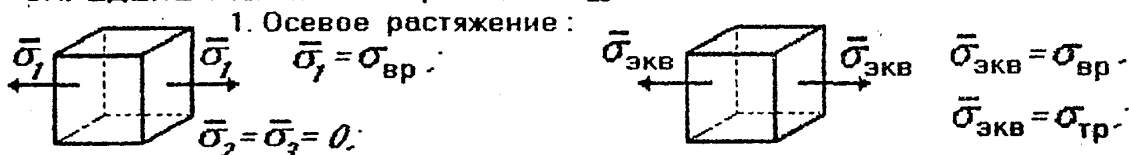


В первоначальной формулировке теории Мора вопрос о характере разрушения остается открытым: наступление текучести или разрушения.

За основу  $\sigma_{\text{экв}}$  примем функцию  $\tau_{\text{max}}$  и  $\sigma_{\tau \text{max}}$  (максимальное касательное напряжение и нормальное напряжение, действующее в этой же площадке):

$$\sigma_{\text{экв}} = a \cdot \tau_{\text{max}} + b \cdot \sigma_{\tau \text{max}} \quad \sigma_{\text{экв}} = a \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + b \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ  $a$  и  $b$

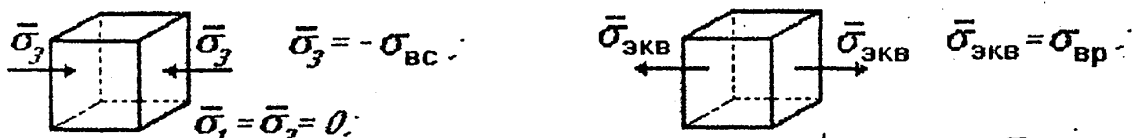


1. Осевое растяжение:

$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = a \cdot \frac{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3}{2} + b \cdot \frac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3}{2} = a \cdot \frac{\bar{\sigma}_1}{2} + b \cdot \frac{\bar{\sigma}_1}{2} = a \cdot \frac{\sigma_{\text{вр}}}{2} + b \cdot \frac{\sigma_{\text{вр}}}{2} = \sigma_{\text{вр}}$$

$$\sigma_{\text{вр}} \cdot \frac{a+b}{2} = \sigma_{\text{вр}} \quad \boxed{\frac{a+b}{2} = 1}$$

2. Осевое сжатие:



$$\bar{\sigma}_{\text{экв}} = -a \cdot \frac{\bar{\sigma}_3}{2} + b \cdot \frac{\bar{\sigma}_3}{2} = \frac{a-b}{2} \sigma_{\text{вс}} = \sigma_{\text{вр}} \quad \boxed{\frac{a-b}{2} = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}} = k}$$

$$\sigma_{\text{экв}} = a \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + b \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{a+b}{2} \sigma_1 - \frac{a-b}{2} \sigma_3 \quad \boxed{\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k \sigma_3}$$

Для хрупких материалов:  $k = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}}$ ; для пластичных материалов:  $k = \frac{\sigma_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{ТС}}}$

Теория Мора дает наилучшие результаты для напряженных состояний, возникающих в стержнях, пластинках и оболочках.

Для большинства хрупких материалов применяют теорию Мора.

Для большинства пластичных материалов  $\sigma_{\text{ТС}} \approx \sigma_{\text{тр}}$ ,  $k = 1$ .

$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3$  - переходит в теорию максимальных касательных напряжений.

## ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

### ВЯЗКОЕ и ХРУПКОЕ разрушения конструкций

**ВЯЗКОЕ РАЗРУШЕНИЕ** - заметны следы пластической деформации, разрушение происходит после определенной наработки, в процессе эксплуатации развиваются трещины, для роста которых необходимо подводить дополнительную энергию.

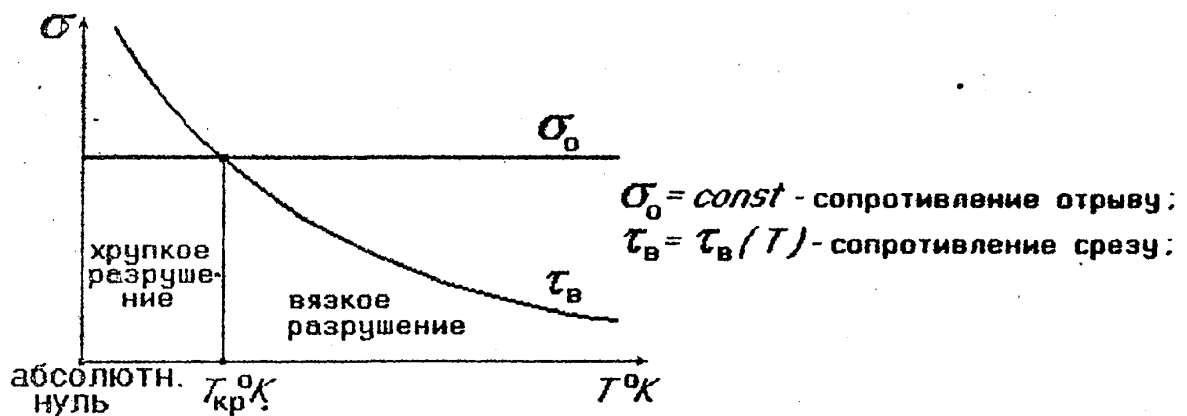
**ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ** - практически нет следов пластической деформации, трещина распространяется очень быстро, не надо подводить дополнительную энергию - процесс поддерживается за счет освобождающейся потенциальной энергии деформации.

Хрупкому разрушению подвержены массивные конструкции, выполненные из малоуглеродистых и низколегированных сталей; разрушения имеют место, как правило, при низких температурах.

### ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ХАРАКТЕР РАЗРУШЕНИЯ ОБРАЗЦОВ

В настоящее время детали машин работают в условиях при температурах от  $T = 0^{\circ}\text{K}$  и до  $T = 10000^{\circ}\text{C}$ :

- 1) Окружающая среда от  $-40^{\circ}\text{C}$  до  $+40^{\circ}\text{C}$ ;
- 2) Температура криогенной техники меньше  $-40^{\circ}\text{C}$ ;
- 3) Повышенная температура от  $+100^{\circ}\text{C}$  и выше до  $1000...4500^{\circ}\text{C}$ .



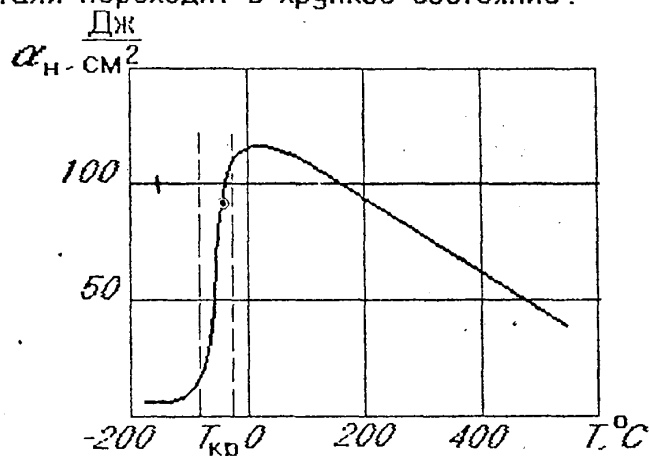
Температура, соответствующая переходу металла из вязкого в хрупкое состояние называется критической температурой или порогом хладноломкости ( $T_{кр}^{\circ}\text{K}$ ).

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

$T_{кр}^{0K}$  - определяется путем специальных испытаний, например, на ударную вязкость при различных температурах: при  $T = T_{кр}^{0K}$   $\alpha_H \rightarrow 0$ .

$\alpha_H$  - ударная вязкость материала (Джоуль/м<sup>2</sup>).

При критической температуре ударная вязкость становится весьма низкой - металл переходит в хрупкое состояние.



Температурная кривая ударной вязкости углеродистой стали состава:

$$C = 0,33\%; \quad Si = 0,16\%; \quad Mn = 0,61\%.$$

Конструкция отличается от образца:

- 1) Неоднородным напряженным состоянием:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\sigma &= \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}} \\ \alpha_\epsilon &= \frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_{ном}} \end{aligned} \right\} \text{коэффициенты концентрации напряжений и деформаций.}$$

- 2) Большими размерами:  $\epsilon_M$  - масштабный фактор.

- 3) Временем действия нагрузок  $t$ .

- 4) Скоростью нагружения  $V$  и т.п.

Все эти факторы повышают критическую температуру детали ( $T_{кр}^{дет}$ ).

$$T_{кр}^{дет} = T_{кр} + \Delta T(\alpha_\sigma \cdot \alpha_\epsilon \cdot \epsilon_M \cdot t \cdot V \dots)$$

Всегда  $T_{кр}^{дет} > T_{кр}$  - и при определенных условиях хрупкое разрушение может произойти и при нормальной температуре.

Если  $T_{раб} < T_{кр}^{дет}$  - конструкция разрушится хрупко. Необходим расчет по методам механики разрушения. Гипотезы прочности и пластичности НЕ ПРИМЕНИМЫ.

Если  $T_{раб} > T_{кр}^{дет}$  - вязкое разрушение конструкции. Расчеты на прочность выполняются с применением гипотез пластичности и прочности.

## РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

Возможны два подхода:

1. Расчет по локальному разрушению (по разрушению в точке):

УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ:

$$\max \sigma_{\text{экв}} \leq \frac{\bar{\sigma}_p}{[n]} \quad \text{или} \quad n = \frac{\bar{\sigma}_p}{\max \sigma_{\text{экв}}} \geq [n]$$

Хрупкий материал:  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k \sigma_3$  (Обобщенная теория прочности Мора)

$\bar{\sigma}_p = \sigma_{\text{вр}}$  Расчет оправдан свойствами материала.

Пластичный материал:  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3$  (Гипотеза  $\max \tau$ )

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (\text{Гипотеза } \tau_{\text{окт}})$$

$\bar{\sigma}_p = \sigma_T$  Расчет не учитывает пластические свойства материала.

Применяется при знакопеременных нагрузках. Расчет по  $\max \sigma_{\text{экв}}$  наиболее распространен в общем машиностроении.

2. Расчет по предельному состоянию (общее разрушение конструкции)

Условия прочности:

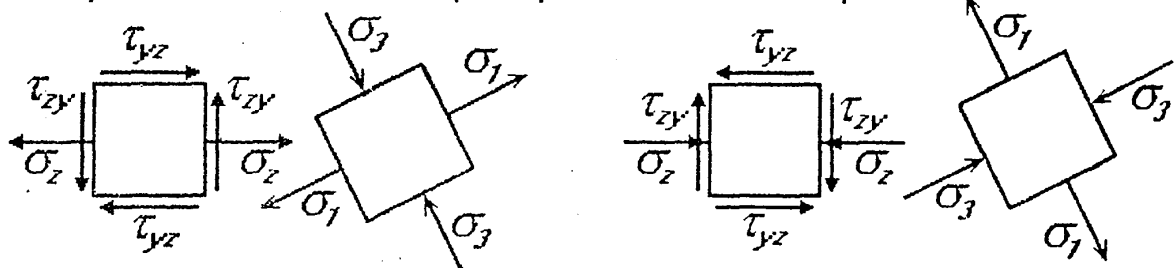
$$P \leq \frac{P_0}{[n]} \quad \text{или} \quad n = \frac{P_0}{P} \geq [n]$$

$P_0$  - предельная (разрушающая) нагрузка, при которой исчерпывается несущая способность конструкции.

$P$  - рабочая нагрузка.

### ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПРОЧНОСТИ К РАСЧЕТУ СТЕРЖНЯ

Напряженное состояние, характерное для точек стержня:



$$\sigma_{1,3} = \pm \frac{\sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}; \quad \sigma_2 = 0;$$

ГИПОТЕЗЫ ПЛАСТИЧНОСТИ:

- 1) Гипотеза максимальных касательных напряжений:

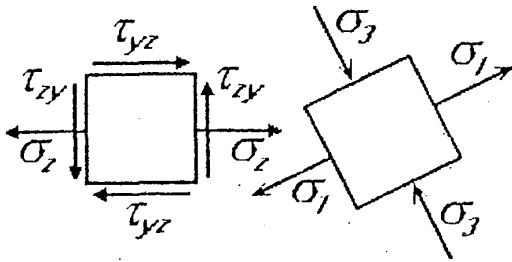
$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3; \quad \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_{zy}^2};$$

- 2) Гипотеза октаэдрических касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}; \quad \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3\tau_{zy}^2};$$

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПРОЧНОСТИ К РАСЧЕТУ СТЕРЖНЯ (продолжение)

Напряженное состояние, характерное для точек стержня:



$$\sigma_{1,3} = \pm \frac{\sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2};$$

$$\sigma_2 = 0;$$

Гипотеза прочности О. Мора:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ (1-k)\sigma_2 + (1+k) \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_{zy}^2} \right]; k = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}};$$

Проще вычислять по первоначальной формуле:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - k\sigma_3.$$

### РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ СТЕРЖНЯ

#### 1. Проектировочный расчет:

Условия прочности:

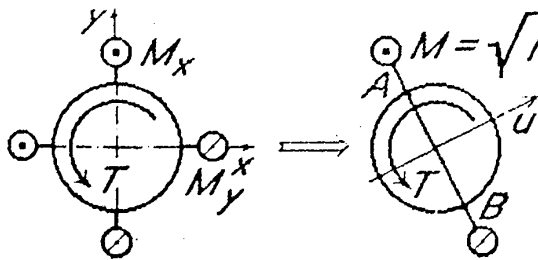
$$\max \sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma]; [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{тр}}}{[n]}; \left( \frac{\sigma_{\text{вр}}}{[n]} \right);$$

Определяются размеры поперечного сечения.

Учитываются только:

$M_x, M_y$  и  $T$ .

Например: Расчет стержня круглого поперечного сечения (материал пластичный)



Опасные точки A и B:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W_U}; \tau_{\text{max}} = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2W_U};$$

$$W_p = 2W_U = 2W_x = 2W_y;$$

$$W_U = W_x = \frac{\pi d^3}{32} \text{ - для сплошного сечения;}$$

$$W_U = W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c^4); c = \frac{d}{D} \text{ - для кольцевого сечения.}$$



## РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Гипотезы пластичности:

1. Гипотеза максимальных касательных напряжений:

$$\max \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 4\tau_{\text{max}}^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_U}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2};$$

$$\max \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{M_x^2 + M_y^2}{W_U^2} + 4\frac{T^2}{4W_U^2}} = \frac{1}{W_U} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_U};$$

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2};$$

2. Гипотеза октаэдрических касательных напряжений:

$$\max \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 3\tau_{\text{max}}^2}; \quad M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75T^2}$$

Условие прочности:

$$\max \sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_U} \leq [\sigma]$$

Отсюда находят размер  $d$ .

## РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ СТЕРЖНЯ (продолжение)

2. Определение допустимой нагрузки:

Условия прочности:

$$\max \sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{тр}}}{[n]} \cdot \left(\frac{\sigma_{\text{вр}}}{[n]}\right);$$

Отсюда находят  $P$ .

Учитываются только:

 $M_x, M_y, T$  и  $N$ .

3. Проверка прочности (проверочный расчет):

$$n = \frac{\bar{\sigma}_p}{\max \sigma_{\text{экв}}} \geq [n]$$

$$\bar{\sigma}_p \begin{cases} \sigma_{\text{т}} - \text{пластичные материалы;} \\ \sigma_{\text{вр}} - \text{хрупкие материалы;} \end{cases}$$

 $n$  - фактический запас прочности.

Учитываются все внутренние силовые факторы:

$$N, Q_x \text{ и } Q_y, T, M_x \text{ и } M_y.$$

можно пренебречь.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ СТЕРЖНЯ

1. Выбор опасного сечения : эпюры внутренних силовых факторов .
2. Выбор опасной точки :  $\partial\sigma$  и  $\partial\tau$  .
3. Вид напряженного состояния , характерного для стержня :
  - а) линейное напряженное состояние ;
  - б) плоское напряженное состояние :  $\sigma_1 > 0 ; \sigma_2 = 0 ; \sigma_3 < 0 ;$
4. Материал :
  - а) пластичный – ГИПОТЕЗЫ ПЛАСТИЧНОСТИ :

1) гипотеза максимальных касательных напряжений :

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} ;$$

2) гипотеза октаэдрических касательных напряжений :

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zy}^2} ;$$

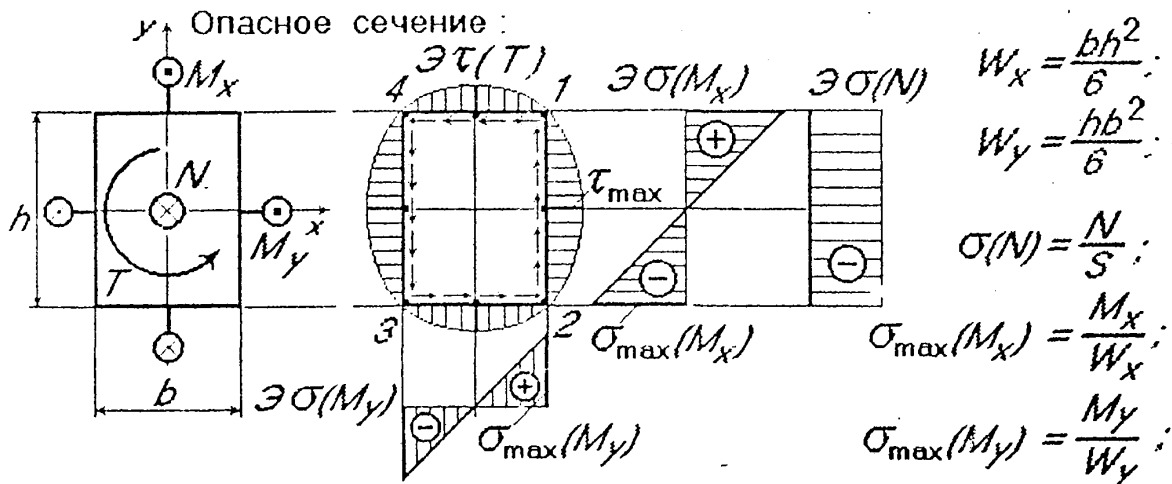
б) хрупкий – теория прочности О. Мора :

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - k\sigma_3 .$$

5. Условия прочности :

$$\max \sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma]_p ; \quad [\sigma]_p = \frac{\bar{\sigma}_p}{[n]} .$$

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

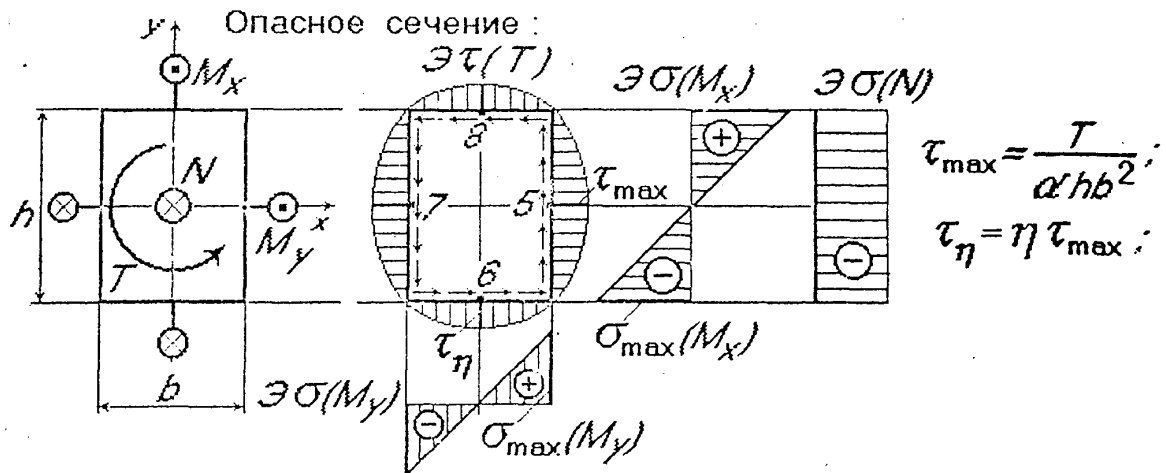


1. Угловые точки : 1, 2, 3, 4 - линейное напряженное состояние :  
 Опасные точки : а) материал пластичный :  $\sigma_{\text{Тр}} = \sigma_{\text{Тс}} = \sigma_{\text{Тр}} .$   
 Опасная точка 3 :  $\sigma_{\text{Т.3}}^{\text{Т.3}} = \left| -\sigma(N) - \sigma_{\max}(M_x) - \sigma_{\max}(M_y) \right| ;$

б) хрупкий материал :  $\sigma_{\text{Вр}} < \sigma_{\text{Вс}} .$  Опасные точки 1 и 3 :

$$\sigma_{\text{Т.1}}^{\text{Т.1}} = -\sigma(N) + \sigma_{\max}(M_x) + \sigma_{\max}(M_y) ;$$

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ



2. Точки 5,6,7,8: а) материал пластичный:

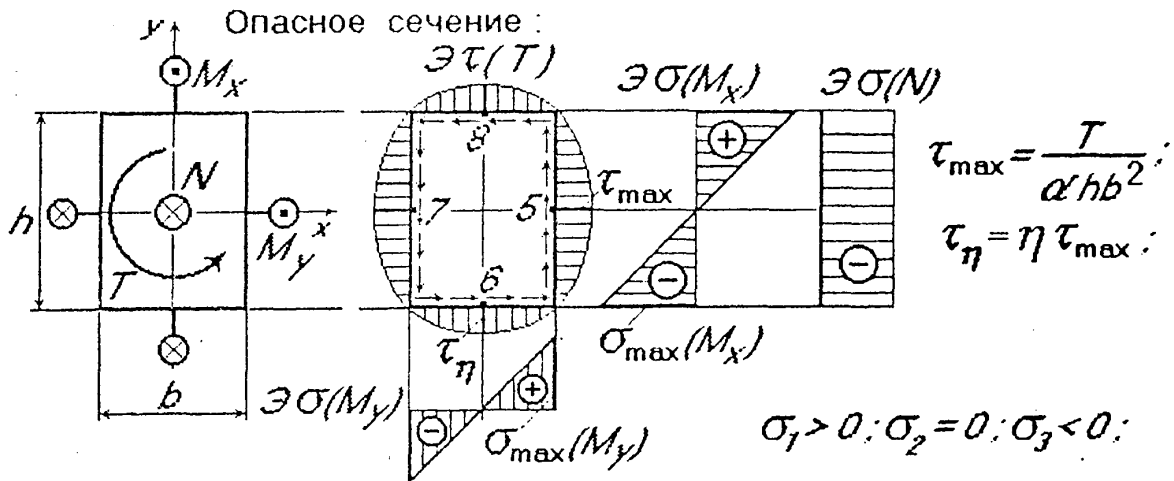
Опасные точки т.6 и т.7:

$$\sigma_{т.6} = |-\sigma(N) - \sigma_{\max}(M_x)|; \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{т.6} = \sqrt{\sigma_{т.6}^2 + 4\tau_{т.6}^2} \quad \text{или}$$

$$\tau_{т.6} = \tau_{\eta} = \eta \tau_{\max};$$

$$\sigma_{т.7} = |-\sigma(N) - \sigma_{\max}(M_y)|; \quad \tau_{т.7} = \tau_{\max}; \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{т.7} = \sqrt{\sigma_{т.7}^2 + 3\tau_{т.7}^2}$$

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ



2. Точки 5,6,7,8: б) материал хрупкий:  $\sigma_{\text{вр}} < \sigma_{\text{вс}}$ :

Опасные точки т.5 и т.8:

$$\sigma_{1,3}^{т.5} = \pm \frac{\sigma_{т.5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{т.5}}{2}\right)^2 + \tau_{т.5}^2}; \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{т.5} = \sigma_1^{т.5} - k\sigma_3^{т.5};$$

$$\sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{т.8} = \sigma_1^{т.8} - k\sigma_3^{т.8};$$

Условия прочности:

$$\max \sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma]_p;$$

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (метод О. МОРА)

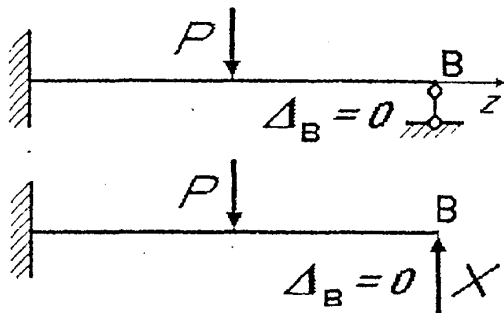
### ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ТОЧКИ КОНСТРУКЦИИ ПО ЗАДАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ

При расчете на жесткость, для раскрытия статически неопределимых систем и в других задачах необходимо уметь определять перемещения отдельных точек конструкций по заданному направлению.

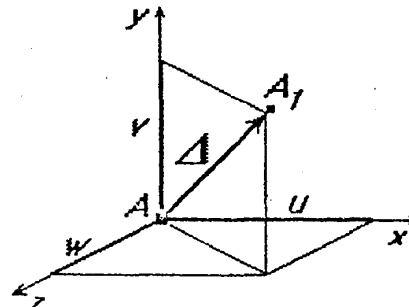
УСЛОВИЯ ЖЕСТКОСТИ:

$$\Delta \leq [\Delta] \quad \text{или} \quad \max f \leq [f]$$

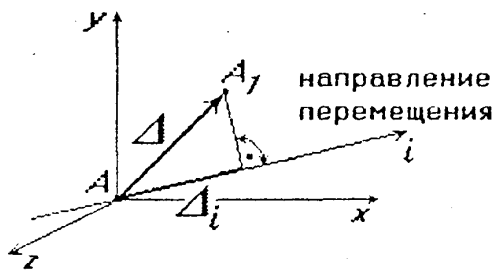
Статически неопределимая система:



Рассмотрим т. А деформируемой системы

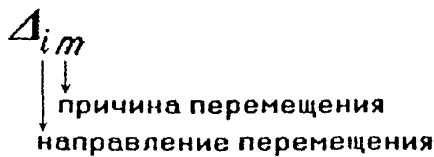


$\Delta$  - полное перемещение т. А.  
 $u, v, w$  - компоненты перемещения т. А по осям  $x, y$  и  $z$ .



$\Delta_i$  - перемещение т. А по направлению  $i$  - проекция  $\Delta$  на ось  $i$ .

Кроме направления перемещения необходимо указывать причину:



ПРИЧИНЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ:

$\Delta_{iP}$  - внешние силы ( $P_e$ ):

$\Delta_{iT}$  - температура ( $T$ ):

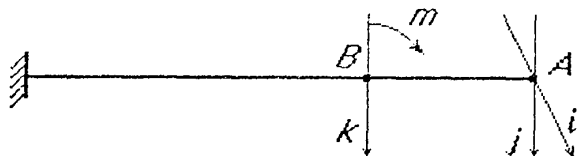
$\Delta_{i\delta}$  - заданные смещения ( $\delta$ ):

$\Delta_{i\Delta}$  - осадка опор ( $\Delta$ ).

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ТОЧКИ КОНСТРУКЦИИ  
ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ СИЛ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ:

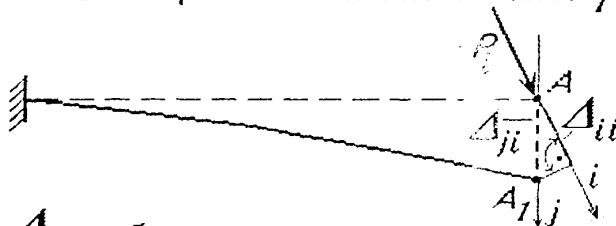
Консольная балка (конструкция)



$i, j, k, m$  - направления перемещений точек  $A$  и  $B$ .

Нагрузим балку силой  $P_i$  (вдоль оси  $i$ ).

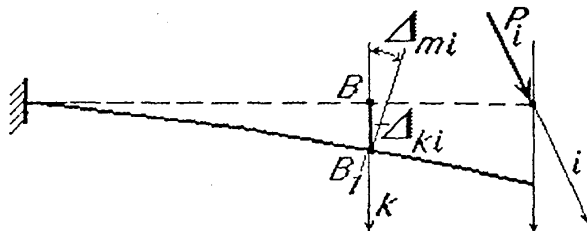
Точка  $A$  переместилась в положение  $A_1$ .



$\Delta_{ii}$  - собственное перемещение силы (перемещение силы по своему направлению);

$\Delta_{ji}$  - перемещение т.  $A$  по направлению  $j$ .

Точка  $B$  переместилась в положение  $B_1$



$\Delta_{mi}$  - угловое перемещение (угол поворота сечения  $B$ )

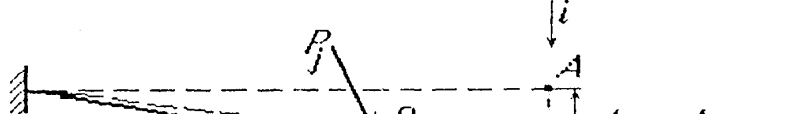
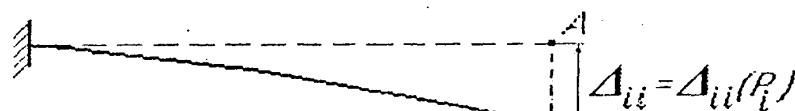
$\Delta_{ji}, \Delta_{ki}, \Delta_{mi}$  - побочные перемещения

$\Delta_{ii}, \Delta_{ji}, \Delta_{ki}, \Delta_{mi}$  - результат действия силы  $P_i$  - действительные перемещения (зависят от величины силы  $P_i$ ).

Действительные перемещения упругих систем - это малые перемещения, удовлетворяющие связям системы (внешним и внутренним) - условиям совместности перемещений и деформаций.

ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Нагрузим балку силой  $P_i$  (вдоль оси  $i$ ), а затем к деформированной системе приложим силу  $P_j$  (вдоль оси  $j$ )



$\Delta_{ij}$  - возможное перемещение силы  $P_i$

Возможным перемещением силы  $P_i$  может быть любое перемещение если оно:

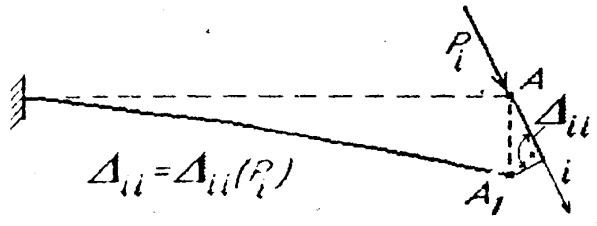
- не зависит от величины силы  $P_i$
- малое (не изменяет направление силы).
- допустимое связями системы (внешними и внутренними) - удовлетворяет неразрывности перемещений и деформаций.

### ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ

Внешние силы, приложенные к упругому телу совершают определенную работу  $A$ . Эта работа переходит частично в потенциальную энергию деформации тела  $U$ , а частично в кинетическую энергию  $K$ .

$$A = U + K$$

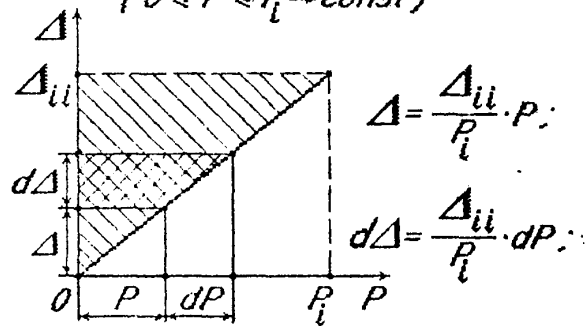
При статическом нагружении  $K = 0$  и тогда  $A = U$ , т.е. вся работа внешних сил переходит в потенциальную энергию.



Внешние силы на собственных перемещениях совершают работу  
 $A_{ii}$  - действительная работа силы  $P_i$

Линейно - деформируемая система при статическом нагружении:

$$(0 \leq P \leq P_i \rightarrow const)$$



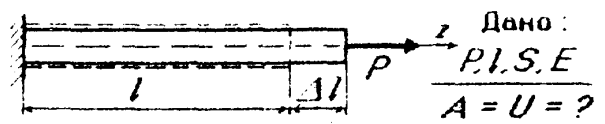
$$A_{ii} = \int_0^{P_i} P d\Delta = \int_0^{P_i} P \frac{\Delta_{ii}}{P_i} dP = \frac{1}{2} P_i^2 \frac{\Delta_{ii}}{P_i}$$

$$A_{ii} = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} \text{ - теорема Клапейрона.}$$

Множитель  $\frac{1}{2}$  - учитывает, что система подчиняется закону Гука, а сила  $P_i$  приложена статически.

### ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНУТРЕННИХ СИЛ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

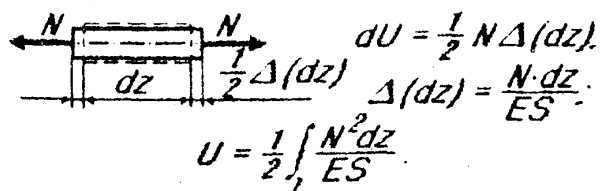
РАСТЯЖЕНИЕ - СЖАТИЕ:



$$A = \frac{1}{2} P \Delta l = \frac{1}{2} P \frac{P l}{E S} = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{E S}$$

$ES$  - жесткость сечения при растяжении - сжатии.

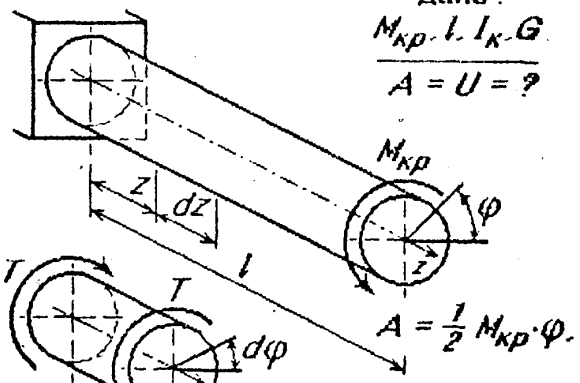
Потенциальная энергия деформации или работа внешних сил может быть выражена через внутренние продольные силы:



Удельная потенциальная энергия, т.е. энергия отнесенная к единице объема:

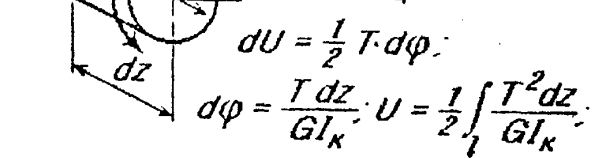
$$u_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \frac{N \Delta(dz)}{S dz} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$$

КРУЧЕНИЕ:



Дано:  
 $M_{крп}, l, I_k, G$   
 $A = U = ?$

$$A = \frac{1}{2} M_{крп} \cdot \varphi$$



$GI_k$  - жесткость сечения при кручении.

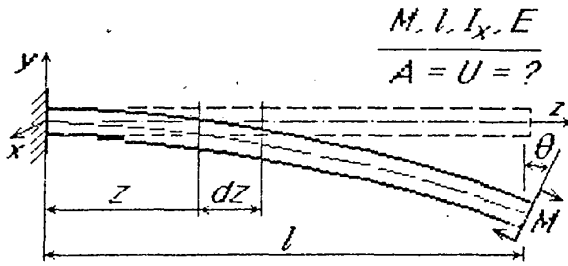
Для круглого поперечного сечения:

$$I_k = I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

©Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

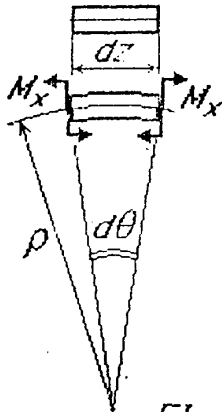
ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНУТРЕННИХ СИЛ И  
ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ( продолжение )

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ :



Дано :

$$\frac{M, l, I_x, E}{A = U = ?}$$



$$A = \frac{1}{2} M \cdot \theta;$$

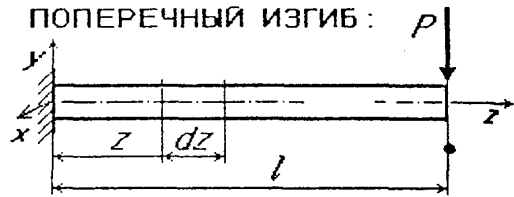
$$dU = \frac{1}{2} M_x d\theta;$$

$$d\theta = \frac{dz}{\rho} = \frac{M_x dz}{EI_x};$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2 dz}{EI_x};$$

$EI_x$  - жесткость сечения при изгибе относительно оси  $x$ .

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ :



$$dU = dU(M_x) + dU(Q_y);$$

$$U = U(M_x) + U(Q_y);$$

$$U(M_x) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2 dz}{EI_x};$$

$$U(Q_y) = \frac{1}{2} \int_0^l k_y \frac{Q_y^2 dz}{GS};$$

$GS$  - жесткость сечения при сдвиге ;  
 $k_y$  - коэффициент формы поперечного сечения , учитывающий неравномерность распределения  $\tau$



$$k = k = \frac{6}{5};$$

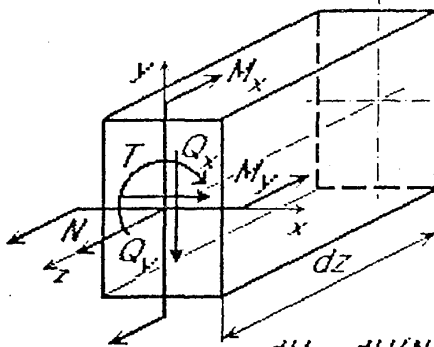


$$k = \frac{10}{9};$$

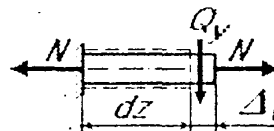


$$k = 2;$$

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ  
В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ НАГРУЖЕНИЯ



Каждому из шести внутренних силовых факторов соответствует такое перемещение , на котором ни один из остальных пяти работ не совершает :



$$Q_x \cdot \Delta(dz) = 0;$$

$$Q_y \cdot \Delta(dz) = 0;$$

$$dU = dU(N) + dU(Q_x) + dU(Q_y) + dU(T) + dU(M_x) + dU(M_y);$$

$$dU = \frac{N^2 dz}{2ES} + k_x \frac{Q_x^2 dz}{2GS} + k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GS} + \frac{T^2 dz}{2GI_k} + \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \frac{M_y^2 dz}{2EI_y};$$

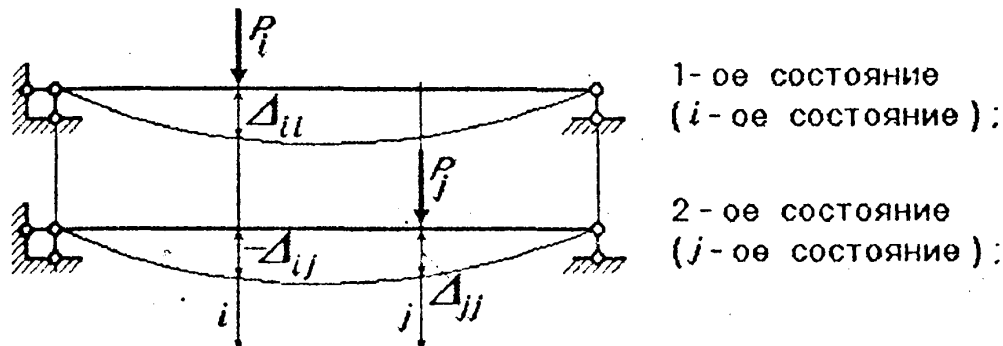
$$U = \int_0^l \frac{N^2 dz}{2ES} + \int_0^l k_x \frac{Q_x^2 dz}{2GS} + \int_0^l k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GS} + \int_0^l \frac{T^2 dz}{2GI_k} + \int_0^l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_0^l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y};$$

Для подавляющего большинства встречающихся на практике систем , в которых элементы работают на изгиб и кручение , первые три слагаемых существенно меньше трех последних .

**ВОЗМОЖНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ**

Внешние и внутренние силы могут совершать работу и на возможных перемещениях и деформациях.

Рассмотрим два состояния упругой системы, находящейся в равновесии.



$\Delta_{ij}$  - перемещение точки системы в результате ее деформации.

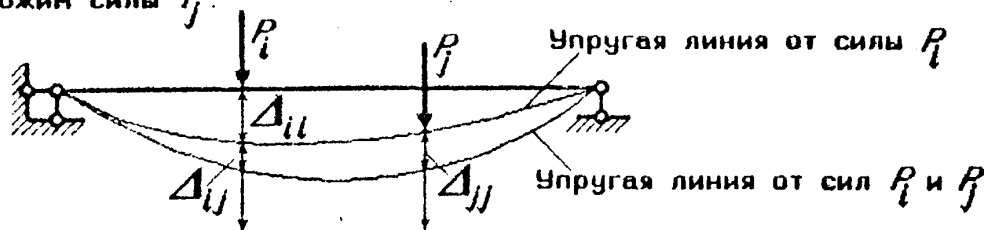
Первый индекс - направление перемещений.

Второй индекс - причина перемещений.

Под i-ой нагрузкой понимается любая система нагрузок, состоящая из нескольких сосредоточенных сил и моментов и какой угодно распределенной нагрузки.

Для доказательства теоремы нагрузим систему силами  $P_i$  и  $P_j$ , прикладывая их в разной последовательности:

1) Сначала приложим нагрузку  $P_i$ , а затем к деформированной системе приложим силы  $P_j$ .



а)  $A_{ii} = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii}$

б)  $A_{jj} = \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj}$

в) В процессе нарастания силы  $P_j$  от 0 до конечного значения сила  $P_i$  оставалась постоянной и переместилась на величину дополнительного прогиба  $\Delta_{ij}$  и совершила дополнительную (виртуальную) работу:

$A_{ij} = P_i \Delta_{ij}$  (множитель  $\frac{1}{2}$  - отсутствует).

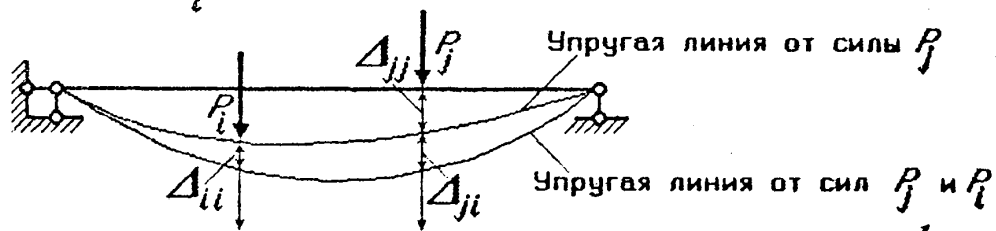
Полная работа, совершенная внешними силами при первом способе нагружения, равна:

$A_T = A_{ii} + A_{jj} + A_{ij}$



ВОЗМОЖНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ

2) Вначале приложим нагрузку  $P_j$ , а затем к деформированной системе приложим силы  $P_i$



а)  $A_{jj} = \frac{1}{2} P_j \Delta_{jj}$  б)  $A_{ii} = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii}$  в)  $A_{ji} = P_j \Delta_{ji}$  (множитель  $\frac{1}{2}$  - отсутствует).

Полная работа, совершенная внешними силами при втором способе нагружения, равна:

$$A_2 = A_{jj} + A_{ii} + A_{ji}$$

Работа внешних сил не зависит от порядка их приложения:

$$A_1 = A_2, \text{ откуда } A_{ij} = A_{ji}$$

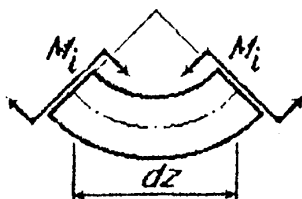
Работа внешних или внутренних сил  $i$ -го состояния на перемещениях по их направлению, вызванных силами  $j$ -го состояния, равна работе сил  $j$ -го состояния на перемещениях по их направлению, вызванных силами  $i$ -го состояния.

$$P_i \Delta_{ij} = P_j \Delta_{ji} \quad (\text{теорема Бетти})$$

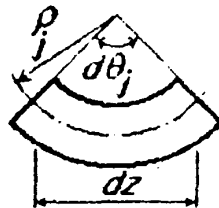
Аналогичным образом может быть доказана также взаимность виртуальных работ внутренних сил:  $U_{ij} = U_{ji}$

Виртуальная работа, например,  $dU_{ij}$  для элемента стержня длиной  $dz$  будет равна:

1-ое состояние ( $i$ -ое состояние):



2-ое состояние ( $j$ -ое состояние):



$$dU_{ij} = M_i d\theta_j$$

$$d\theta_j = \frac{dz}{\rho_j} = \frac{M_j dz}{EI_x}$$

$$dU_{ij} = M_i M_j \frac{dz}{EI_x}$$

Здесь -  $M_i$  и  $M_j$  - текущие значения изгибающих моментов в  $i$ -ом и  $j$ -ом состояниях

Виртуальная работа всего стержня длиной  $l$ :

$$U_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI_x} dz$$

Аналогично можно доказать, что

$$U_{ji} = \int_0^l \frac{M_j M_i}{EI_x} dz$$

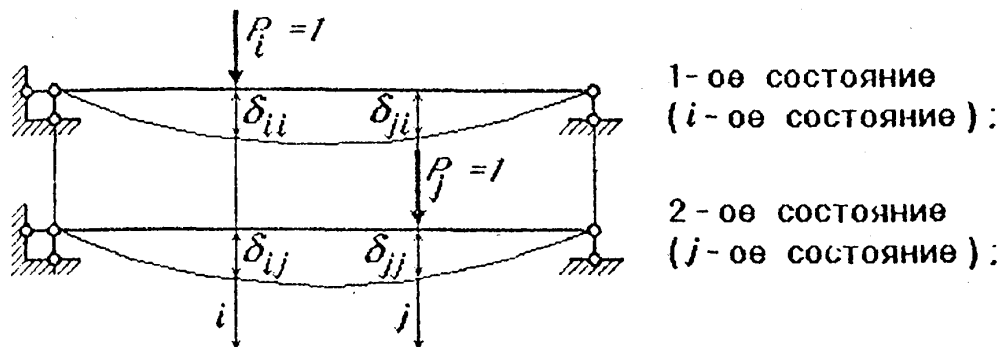
Отсюда следует, что  $U_{ij} = U_{ji}$  в виду того, что:

$$\int_0^l \frac{M_i M_j}{EI_x} dz = \int_0^l \frac{M_j M_i}{EI_x} dz$$

$$A_{ij} = A_{ji} = U_{ij} = U_{ji}$$

ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим следующие два состояния системы :



$\delta$  - перемещение, вызванное единичными силами  $P = 1$  или моментами  $M = 1$ , в отличии от перемещений  $\Delta$ , вызванных нагрузками не равными 1.

$$P_i \delta_{ij} = P_j \delta_{ji} \text{ , но так как } P_i = P_j = 1 \text{ .}$$

$$\text{то } \delta_{ij} = \delta_{ji}$$

Полученное равенство называется теоремой о взаимности перемещений (теорема или принцип Максвелла).

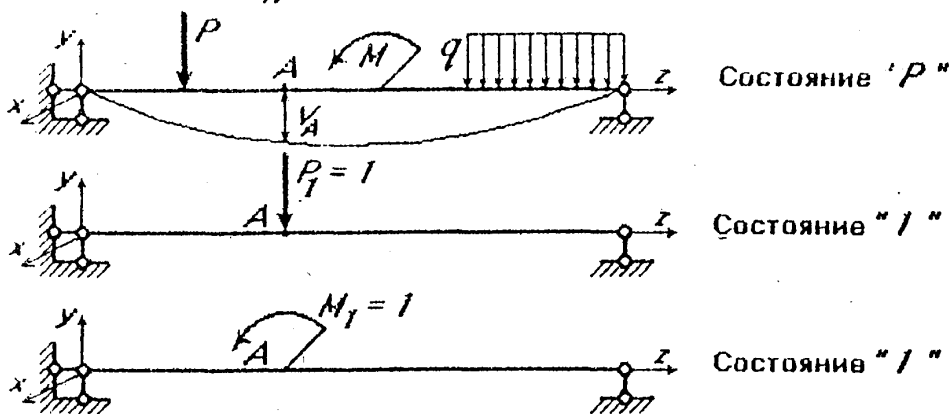
Указанное равенство перемещений остается в силе, если  $P_i = P_j \neq 1$  :

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$$

МЕТОД МОРА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  
(ИНТЕГРАЛ О. МОРА)

Рассмотрим общий метод определения перемещений пригодный для любой линейно-деформируемой системы при любой внешней нагрузке.

Дано : грузовое состояние конструкции (балки, рамы, фермы или вала), нагруженной внешними силами. Требуется определить вертикальное перемещение точки A ( $V_A$  - перемещение вдоль оси).



Выберем вспомогательное (или фиктивное) состояние той же системы, освобожденной от внешних воздействий и нагруженной в точке A по направлению искомого перемещения силой  $P_1 = 1$ .

Нагрузки  $P_1 = 1$  и  $M_1 = 1$  не имеет размерности.

**МЕТОД МОРА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (ИНТЕГРАЛ О. МОРА)**

Вычислим возможную (виртуальную) работу внешних и внутренних сил вспомогательного состояния (состояния "1") на перемещениях, вызванных действием сил грузового состояния:

а) работа внешних сил:  $A_{1P} = 1 \cdot V_A$

б) работа внутренних сил или потенциальная энергия деформации:

$$U_{1P} = \int_1 \frac{M_P(z) M_1(z)}{EI_x} dz$$

по так как  $A_{1P} = U_{1P}$  то имеем:  $V_A = \int_1 \frac{M_P(z) M_1(z)}{EI_x} dz$  - интеграл перемещений О. Мора

При определении углового перемещения в точку А в фиктивном состоянии "1" необходимо приложить единичный момент  $M_1 = 1$ .

Обозначим через  $\Delta$  любое (линейное или угловое) перемещение и интеграл Мора примет вид:

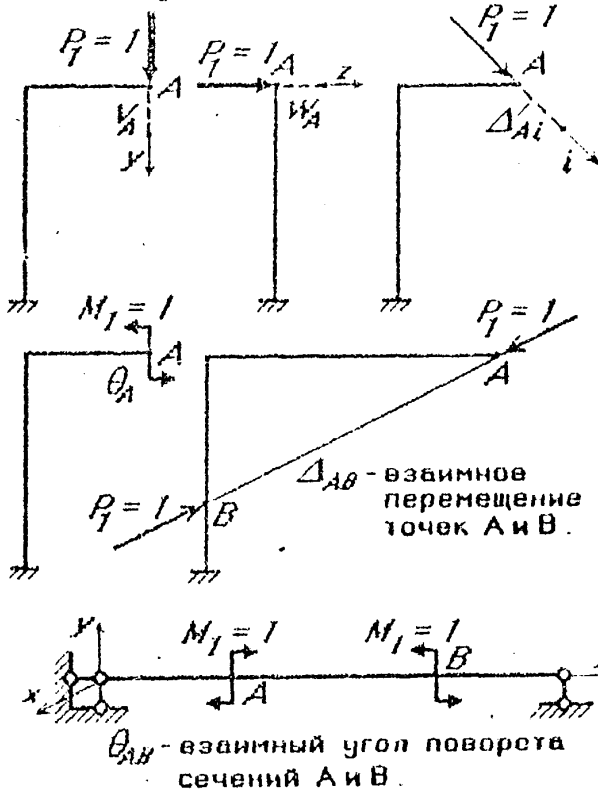
$$\Delta = \int_1 \frac{M_P(z) M_1(z)}{EI_x} dz$$

Если система или конструкция имеет несколько участков, то необходимо интегралы просуммировать

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int \frac{M_{Pi}(z) M_{1i}(z)}{EI_x} dz$$

Здесь:  $M_{Pi}(z)$  и  $M_{1i}(z)$  законы изменения изгибающих моментов от внешней и единичной нагрузок для  $i$ -го участка.

Единичную нагрузку можно рассматривать как обобщенную, тогда  $\Delta$  соответствующее перемещение:



Интеграл перемещений Мора получен для случая изгиба:

$$\Delta = \int_1 \frac{M_P(z) M_1(z)}{EI_x} dz$$

Совершенно аналогично получаются интегралы перемещений Мора для других случаев нагружения стержня:

а) растяжение - сжатие:

$$\Delta = \int_1 \frac{N_P(z) N_1(z)}{ES} dz$$

б) кручение:

$$\Delta = \varphi = \int_1 \frac{T_P(z) T_1(z)}{GI_x} dz$$

в) сдвиг:

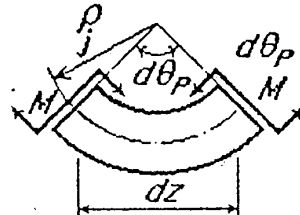
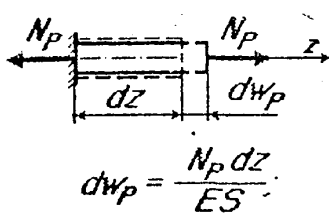
$$\Delta = \int_1 \frac{Q_P(z) Q_1(z)}{GS} dz$$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Интеграл перемещений О. Мора может быть переписан в следующем виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_P(z)N_1(z)}{ES} dz + \sum_{i=1}^n \int k \frac{Q_P(z)Q_1(z)}{GS} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{T_P(z)T_1(z)}{GI_K} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{M_P(z)M_1(z)}{EI} dz$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int N_1(z) d\omega_P + \sum_{i=1}^n \int Q_1(z) d\gamma_P + \sum_{i=1}^n \int T_1(z) d\varphi_P + \sum_{i=1}^n \int M_1(z) d\theta_P$$

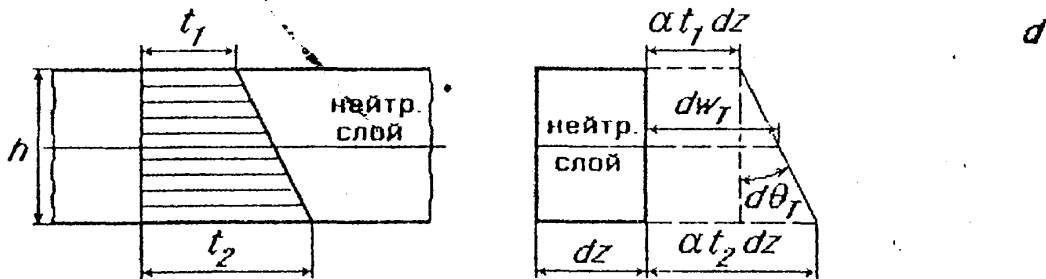


$$d\gamma_P = \frac{Q_P dz}{GS}$$

$$d\varphi_P = \frac{T_P dz}{GI_K}$$

- Здесь:
- $d\omega_P$  - взаимное смещение торцевых сечений элемента
  - $d\gamma_P$  - взаимный сдвиг торцевых сечений;
  - $d\varphi_P$  - взаимный угол закручивания торцевых сечений;
  - $d\theta_P$  - взаимный угол поворота торцевых сечений.

В таком виде формула О. Мора может быть использована и для определения перемещений, вызванных действием температуры.



Примем, что температура по высоте сечения изменяется по линейному закону и постоянная по длине. ( $\alpha$  - коэффициент температурного расширения).

$$d\omega_T = \alpha \frac{t_2 + t_1}{2} dz \quad d\theta_T = \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} dz$$

При изменении температуры стержни удлиняются или укорачиваются, но не растягиваются и не сжимаются; искривляются, но не изгибаются.

При удлинении волокон, вызванном температурой, никакого сдвига и взаимного закручивания сечений не происходит, поэтому перемещения

$$\Delta_T = \sum_{i=1}^n \int Q_1(z) d\gamma_T + \sum_{i=1}^n \int T_1(z) d\varphi_T = 0 \quad \text{и остается:}$$

$$\Delta_T = \sum_{i=1}^n \int N_1(z) d\omega_T + \sum_{i=1}^n \int M_1(z) d\theta_T = \sum_{i=1}^n \int N_1(z) \alpha \frac{t_2 + t_1}{2} dz + \sum_{i=1}^n \int M_1(z) \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} dz$$

При вычислении перемещений  $\Delta_T$  интегрирование распространяется только на те элементы сооружения, температура которых изменяется.

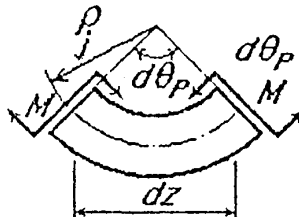
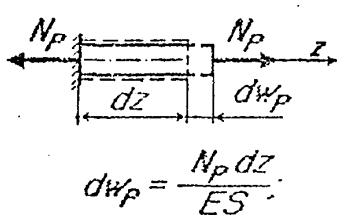
Если деформации элемента  $dz$  от температуры и от единичной нагрузки аналогичны друг другу, то знак соответствующего интеграла положителен.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Интеграл перемещений О. Мора может быть переписан в следующем виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_P(z) N_1(z)}{ES} dz + \sum_{i=1}^n \int k \frac{Q_P(z) Q_1(z)}{GS} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{T_P(z) T_1(z)}{GI_K} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{M_P(z) M_1(z)}{EI} dz.$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int N_1(z) d\omega_P + \sum_{i=1}^n \int Q_1(z) d\gamma_P + \sum_{i=1}^n \int T_1(z) d\varphi_P + \sum_{i=1}^n \int M_1(z) d\theta_P$$



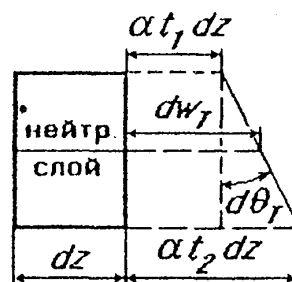
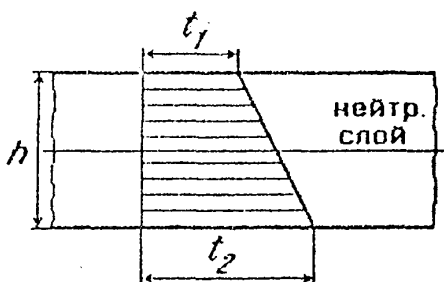
$$d\theta_P = \frac{M_P dz}{EI};$$

$$d\gamma_P = \frac{Q_P dz}{GS};$$

$$d\varphi_P = \frac{T_P dz}{GI_K};$$

Здесь:  $d\omega_P$  - взаимное смещение торцевых сечений элемента  
 $d\gamma_P$  - взаимный сдвиг торцевых сечений;  
 $d\varphi_P$  - взаимный угол закручивания торцевых сечений;  
 $d\theta_P$  - взаимный угол поворота торцевых сечений.

В таком виде формула О. Мора может быть использована и для определения перемещений, вызванных действием температуры.



Примем, что температура по высоте сечения изменяется по линейному закону и постоянная по длине. ( $\alpha$  - коэффициент температурного расширения).

$$d\omega_T = \alpha \frac{t_2 + t_1}{2} dz \quad d\theta_T = \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} dz$$

При изменении температуры стержни удлиняются или укорачиваются, но не растягиваются и не сжимаются; искривляются, но не изгибаются.

При удлинении волокон, вызванном температурой, никакого сдвига и взаимного закручивания сечений не происходит, поэтому перемещения

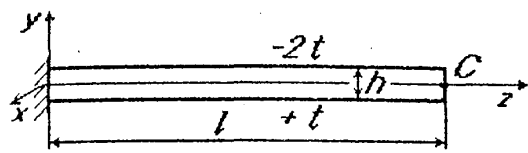
$$\Delta_T = \sum_{i=1}^n \int Q_1(z) d\gamma_T + \sum_{i=1}^n \int T_1(z) d\varphi_T = 0 \quad \text{и остается:}$$

$$\Delta_T = \sum_{i=1}^n \int N_1(z) d\omega_T + \sum_{i=1}^n \int M_1(z) d\theta_T = \sum_{i=1}^n \int N_1(z) \alpha \frac{t_2 + t_1}{2} dz + \sum_{i=1}^n \int M_1(z) \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} dz$$

При вычислении перемещений  $\Delta_T$  интегрирование распространяется только на те элементы сооружения, температура которых изменяется.

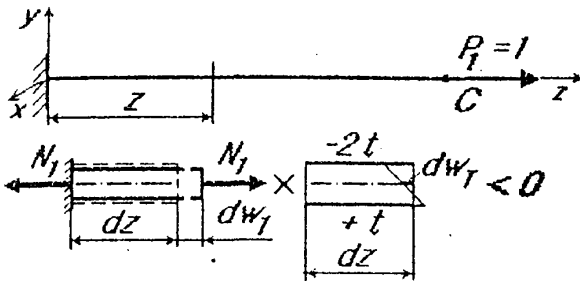
Если деформации элемента  $dz$  от температуры и от единичной нагрузки аналогичные друг другу, то знак соответствующего интеграла положителен.

ПРИМЕР :



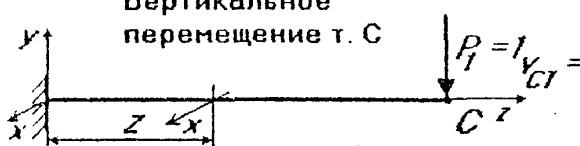
Дано:  
 $t, l, h, E, \alpha$   
 $v_{CT} = ? \quad w_{CT} = ? \quad \theta_{CT} = ?$

Горизонтальное (вдоль оси Z) перемещение т.С

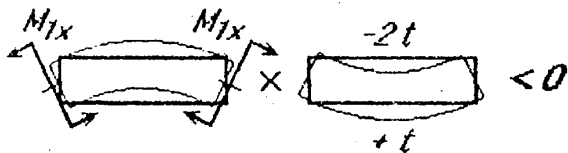


$N_1(z) = 1; \quad M_{1x}(z) = 0; \quad 0 < z < l;$   
 $w_{CT} = \int_0^l N_1(z) \alpha \frac{t_2 + t_1}{2} dz = \int_0^l 1 \cdot \alpha \frac{-2t + t}{2} dz;$   
 $w_{CT} = -\frac{1}{2} \alpha t l;$

Вертикальное перемещение т.С

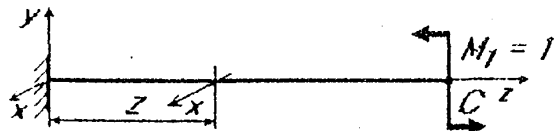


$N_1(z) = 0; \quad M_{1x}(z) = 1(l-z); \quad 0 < z < l;$   
 $v_{CT} = \int_0^l M_{1x}(z) \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} dz = \int_0^l 1 \cdot (l-z) \alpha \frac{t - (-2t)}{2} dz;$   
 $v_{CT} = -\frac{3}{2} \alpha t l^2 / h$



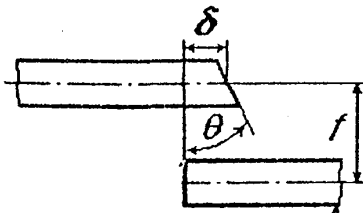
Знак минус в обоих случаях указывает, что перемещения не совпадают с направлениями  $P_1 = 1$ .

Угол поворота сечения С:



$N_1(z) = 0; \quad M_{1x}(z) = 1; \quad 0 < z < l;$   
 $\theta_{CT} = \int_0^l M_{1x}(z) \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} dz = \int_0^l 1 \cdot \alpha \frac{t - (-2t)}{2} dz;$   
 $\theta_{CT} = \frac{3 \alpha t l}{h}$

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ ЗАДАНЫХ СМЕЩЕНИЙ  $\Delta_{i\delta}$



$$\Delta_{i\delta} = \sum_{i=1}^n N_{1i} \delta_i + \sum_{i=1}^n Q_{1i} f_i + \sum_{i=1}^n M_{1i} \theta_i$$

где:  $\delta$  и  $f$  - неточность изготовления длин и сдвиг по высоте;  
 $\theta$  - неперпендикулярность торцов (рад).

Перемещения возникают при монтаже (при сборке) конструкции.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА О. МОРА

Для многоэлементных систем непосредственное интегрирование формулы Мора становится неудобным, т.к. для каждого участка необходимо составить аналитические выражения  $M_{pi}$  и  $M_{ji}$ , а затем интегрировать по участкам:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int \frac{M_{pi}(z) M_{ji}(z)}{EI_{xi}} dz$$

Гораздо удобнее в этих случаях определять интеграл Мора численно.

А. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ СИМПСОНА

Рассмотрим плоскую систему, имеющую  $n$ -участков с постоянной жесткостью сечения в пределах участка.

Если учитывать только деформацию изгиба, то интеграл перемещений примет вид:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{1}{EI_{xi}} \int_0^{l_i} M_{pi}(z) M_{ji}(z) dz$$

Здесь:  $EI_{xi}$  - жесткость сечения  $i$ -го участка, постоянная на длине  $l_i$ .

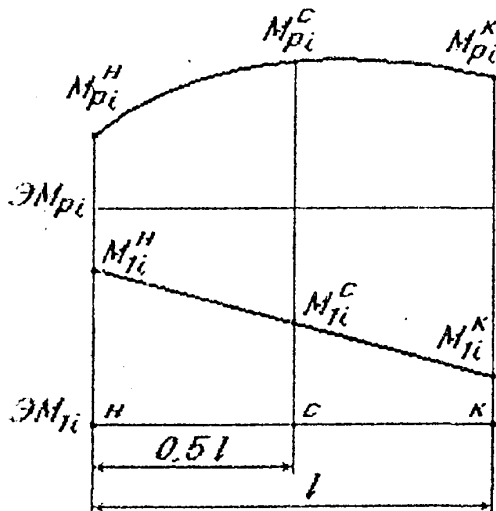
$M_{pi}(z), M_{ji}(z)$  - изгибающие моменты - функции координаты  $z$ .

Разобьем  $i$ -й участок на две части и вычислим интеграл Мора по формуле парабол (Симпсона):

$$\int_a^b y dx = \frac{t}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$t = \frac{b-a}{n} - \text{шаг}, \quad n - \text{четное}, \quad n = 2, \quad t = \frac{l_i}{2}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6EI_{xi}} (M_{pi}^H M_{ji}^H + 4M_{pi}^C M_{ji}^C + M_{pi}^K M_{ji}^K)$$



Исходными данными являются:  $\Delta M_{pi}$  и  $\Delta M_{ji}$

Вычисление перемещения  $\Delta$  сводится к многократному повторению операций умножения и сложения.

Аналогично можно вычислить любое слагаемое интеграла перемещений:  
а) растяжение - сжатие:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_{pi}(z) N_{ji}(z)}{ES} dz = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6ES_i} (N_{pi}^H N_{ji}^H + 4N_{pi}^C N_{ji}^C + N_{pi}^K N_{ji}^K)$$

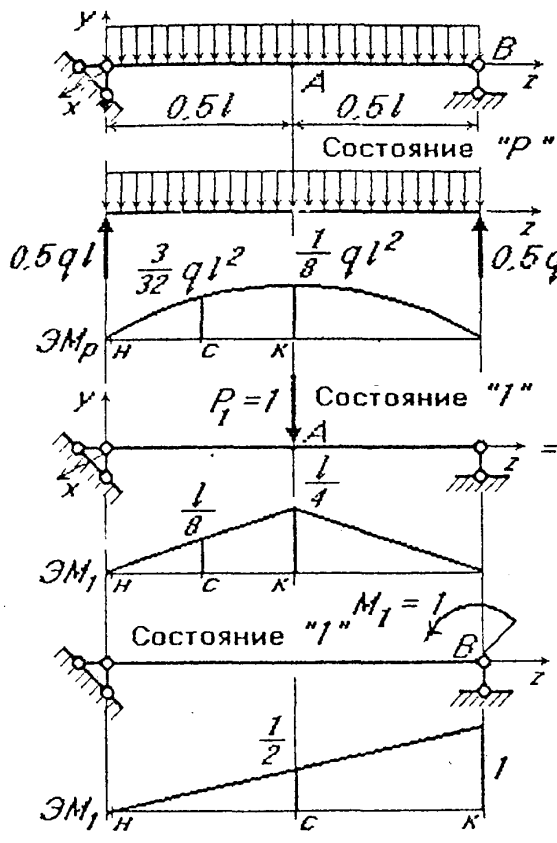
Если  $N_{pi}, N_{ji}$  и  $ES_i$  - постоянные в пределах участка:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{N_{pi} N_{ji}}{ES_i} l_i$$

б) кручение:

$$\Delta = \varphi = \sum_{i=1}^n \int \frac{T_{pi}(z) T_{ji}(z)}{GI_{ki}} dz = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6GI_{ki}} (T_{pi}^H T_{ji}^H + 4T_{pi}^C T_{ji}^C + T_{pi}^K T_{ji}^K) = \sum_{i=1}^n \frac{T_{pi} T_{ji}}{GI_{ki}} l_i$$

ПРИМЕР :



Дано :  
 $q \cdot l, EI_x = const$   
 $V_A = ? \theta_B = ?$

Для определения вертикального перемещения т. А прикладываем  $P_1 = 1$ .

$$V_A = \sum_{i=1}^n \frac{1}{EI_{xi}} \int_0^{l_i} M_{pi}(z) M_{1i}(z) dz =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6EI_{xi}} (M_{pi}^H M_{1i}^H + 4M_{pi}^C M_{1i}^C + M_{pi}^K M_{1i}^K) =$$

$$= 2 \frac{l}{2 \cdot 6EI_x} (0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{3}{32} q l^2 \cdot \frac{l}{8} + \frac{1}{8} q l^2 \cdot \frac{l}{4}) =$$

$$V_A = f = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI_x}$$

Определение угла поворота сечения В :

$$\theta_B = \frac{l}{6EI_x} (M_{pi}^H M_{1i}^H + 4M_{pi}^C M_{1i}^C + M_{pi}^K M_{1i}^K) =$$

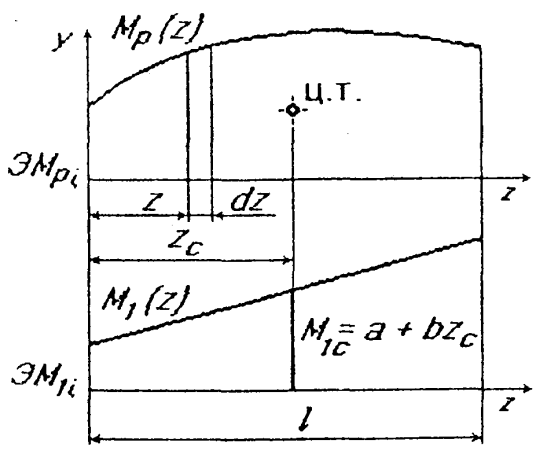
$$= \frac{l}{6EI_x} (0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{8} q l^2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0) =$$

$$\theta_B = \frac{1}{24} \frac{q l^3}{EI_x} \text{ (рад)}$$

Б. СПОСОБ ВЕРЕЩАГИНА

Если стержень состоит из прямых участков с постоянной жесткостью сечения в пределах каждого участка, то операция интегрирования упрощается, т.к. эпюры от единичных нагрузок оказываются линейными.

$$\Delta = \frac{1}{EI_x} \int_l M_p(z) M_1(z) dz; \quad M_1(z) = a + b \cdot z \text{ - линейная функция.}$$



$$EI_x \Delta = \int_l M_p(z) M_1(z) dz = \int_l M_p(z) (a + bz) dz =$$

$$= a \int_l M_p(z) dz + b \int_l M_p(z) z dz = a \cdot \Omega_p + b \cdot S_y$$

где первый интеграл представляет площадь эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки, а второй интеграл - статический момент этой площади относительно оси y ( $S_y = \Omega_p \cdot z_c$ )

$$EI_x \Delta = a \cdot \Omega_p + b \cdot \Omega_p \cdot z_c = \Omega_p (a + b z_c) = \Omega_p M_{1c} \text{ - правило Верещагина.}$$

Таким образом, по способу Верещагина, операция интегрирования заменяется перемножением площади эпюры  $M_p(z)$  от внешней нагрузки на ординату  $M_{1c}$  эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести первой.

Перемножение эпюр осуществляется по участкам и результаты суммируются:

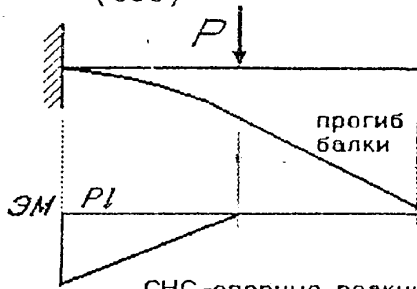
$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{1}{EI_x} \int_l M_p(z) M_1(z) dz$$

© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

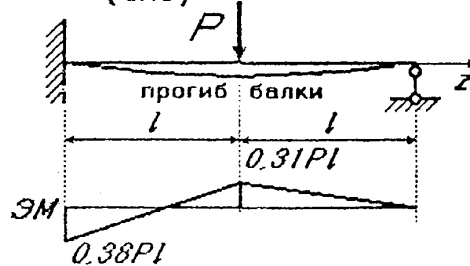


РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ (СНС)  
МЕТОДОМ СИЛ

Статически определимая система (СОС)



Статически неопределимая система (СНС)



СНС-опорные реакции или внутренние силовые факторы нельзя найти с помощью метода сечений и условий равновесия.

ОСОБЕННОСТИ СНС:

- 1) Усилия зависят от соотношения жесткостей сечения ( $ES, EI_x, EI_y, GI_k, \dots$ ) и длин элементов системы.
- 2) Элементы системы, как правило, НЕРАВНОПРОЧНЫ.
- 3) СНС имеют большую прочность и особенно жесткость по сравнению со СОС.
- 4) В элементах СНС возникают температурные и монтажные усилия (напряжения), которые самоуравновешенные.

ПЛАН РЕШЕНИЯ:

1. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ - при записи применяют принцип начальных размеров.
2. УСЛОВИЯ СОВМЕСТИМОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (деформаций) - система рассматривается в деформированном виде.
3. ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ между усилиями (1) и перемещениями (2) или между напряжениями и деформациями - в пределах упругости - закон Гука.

$$\sigma = \frac{N}{S}, \quad \sigma = \frac{M_x}{I_x} y, \quad \tau = \frac{T}{I_p} \rho, \dots$$

СТЕПЕНЬ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ

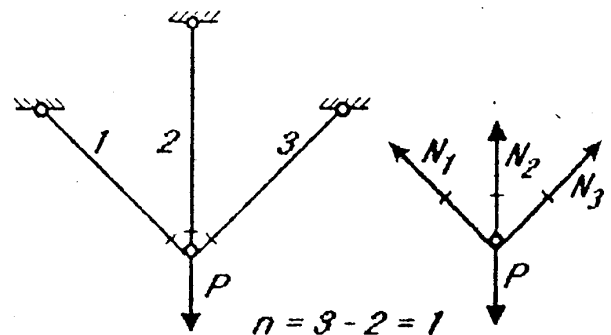
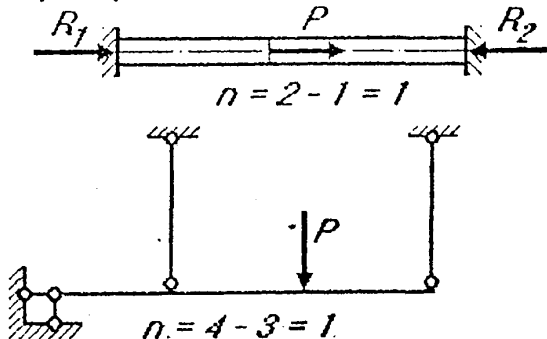
Разность между общим числом связей ( $W$ ) и числом НЕЗАВИСИМЫХ уравнений равновесия ( $u$ ) называется степенью статической неопределимости ( $n$ ):

$$n = W - u.$$

Статическая неопределимость обуславливается наличием в системе избыточных ("лишних") связей - конструктивных элементов, увеличивающих жесткость системы. (см. выше)

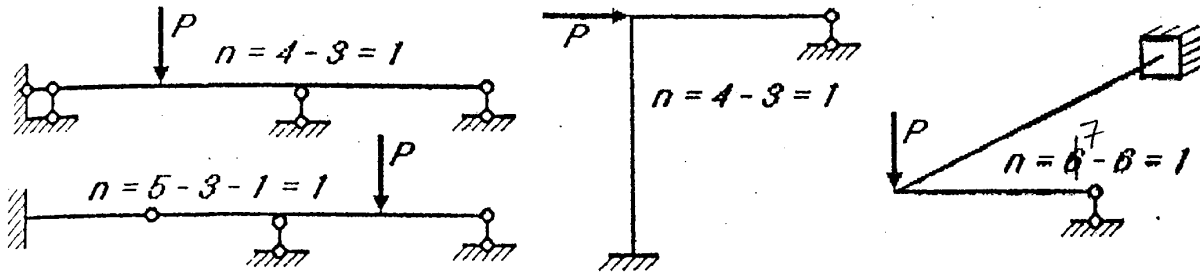
Статическая неопределимость равна ЧИСЛУ избыточных связей и числу недостающих для решения задачи уравнений, которые получают из условий совместности перемещений.

Примеры СНС:  $n = 1$  - однажды СНС:

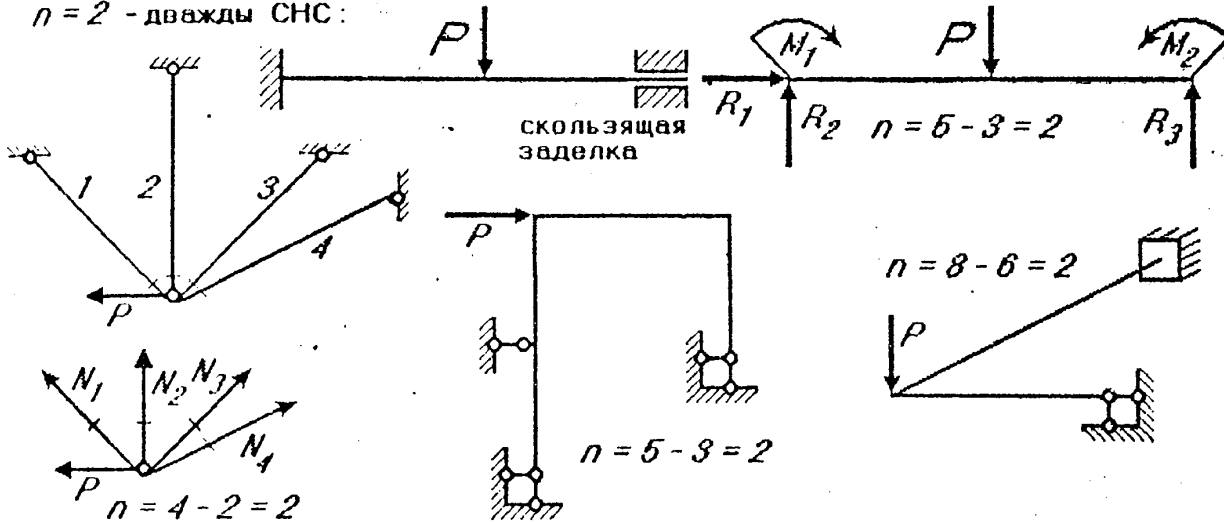


ПРИМЕРЫ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

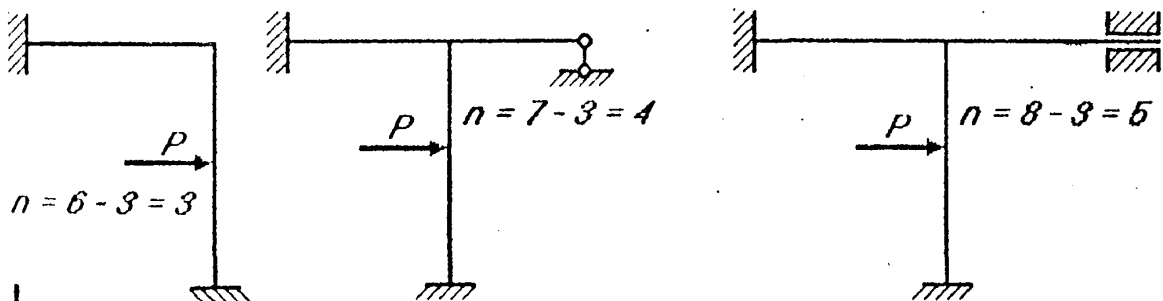
$n = 1$  - однажды СНС:



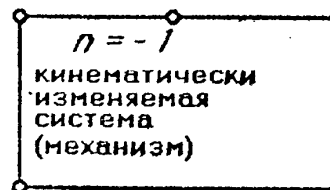
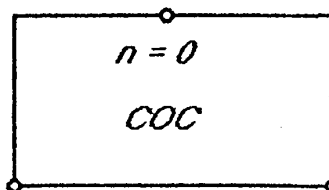
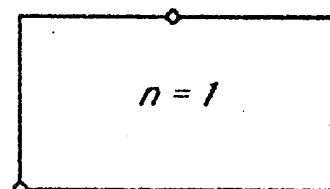
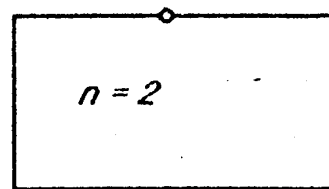
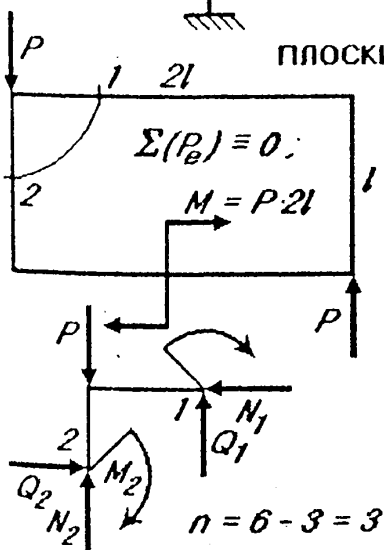
$n = 2$  - дважды СНС:



Примеры СНС: трижды и более число раз СНС:



ПЛОСКИЙ ЗАМКНУТЫЙ КОНТУР



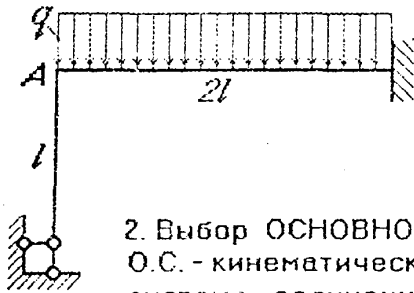
МЕТОД СИЛ

Условно связи подразделяются на две группы:

- 1) ВНЕШНИЕ СВЯЗИ - препятствуют смещениям опорных точек.
- 2) ВНУТРЕННИЕ СВЯЗИ - препятствуют ВЗАИМНЫМ перемещениям сечений.

УСИЛИЯ во внутренних связях - внутренние силовые факторы  
( $N, Q_x, Q_y, T, M_x, M_y$ ) (см. замкнутый контур)

Рассмотрим идею метода сил и канонический порядок расчета на примере плоской системы испытывающей изгиб:



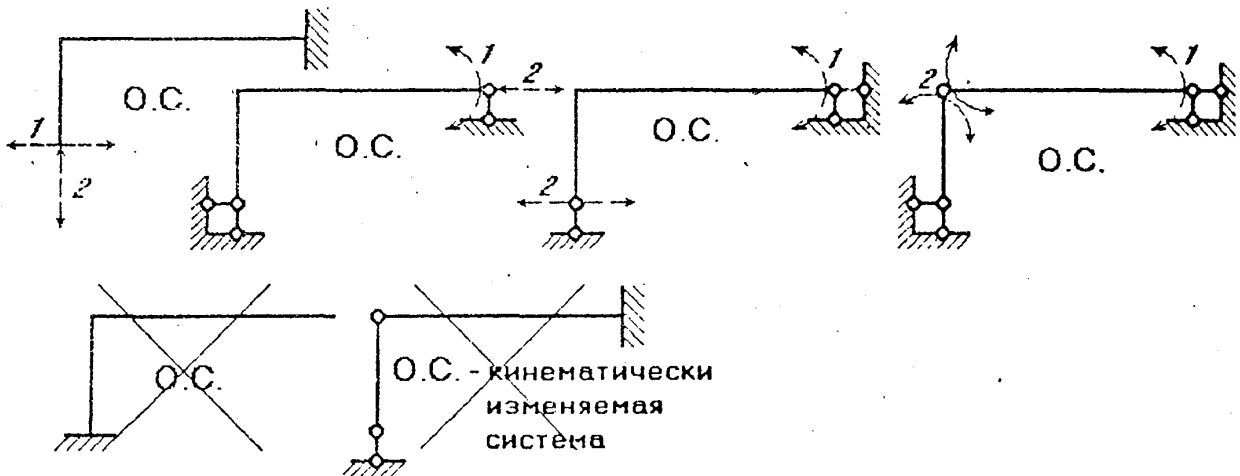
Дано:  
 $q \cdot l \cdot EI_x = const$   
 $\Delta M_{\Sigma} = ? \theta_A = ?$

ПОРЯДОК РАСЧЕТА:

1. Определение СТЕПЕНИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ:  
 $n = 5 - 3 = 2$  - две "лишних" связи.  
 Из условий совместности перемещений необходимо записать два условия.

2. Выбор ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ (О.С.)

О.С. - кинематически НЕИЗМЕНЯЕМАЯ статически определимая ( $n = 0$ ) система, полученная из заданной СНС, путем ОТБРАСЫВАНИЯ "лишних" связей.



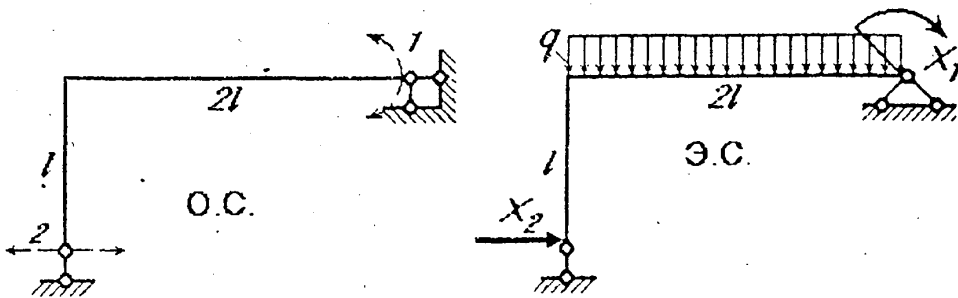
ОТБРОШЕННЫЕ СВЯЗИ (направления перемещений) обозначаются цифрами  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Нумерация произвольная, но в процессе расчета неизменная. Основных систем можно выбрать бесконечное множество.

3. Составление ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ (Э.С.)

Усилия в отброшенных ("лишних") связях обозначают  $X_i$ , соответствующие перемещения -  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Направление усилий  $X_i$  произвольное, но в ходе решения неизменное.

Э.С. - основная система, нагруженная внешними силами ( $P_B$ ) и неизвестными усилиями в отброшенных связях ( $X_i$ ):



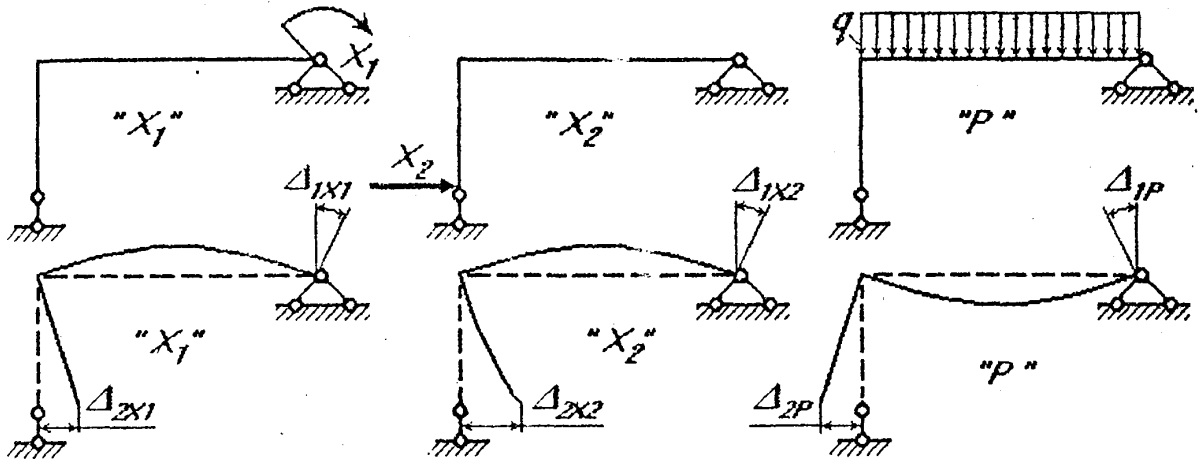
**4. УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ - СИСТЕМА КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.**

Для ЛИНЕЙНО - ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ, подчиняющихся закону Гука и принципу независимости действия сил, существует единственная связь между силами и соответствующими перемещениями.

Запишем условия, при которых Э.С. будет деформироваться так же, как и заданная СНС:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (X_1, X_2, P_B) = 0 \\ (X_1, X_2, P_B) = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{Остальные граничные условия в Э.С. и в СНС одинаковые.}$$

Применим принцип независимости действия сил и отдельно изобразим основную систему в деформированном виде от  $X_1, X_2$  и  $P_B$ :



**УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ**

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{1X1} + \Delta_{1X2} + \Delta_{1P} = 0 \\ \Delta_2 = \Delta_{2X1} + \Delta_{2X2} + \Delta_{2P} = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{Здесь: } \Delta_{im} \begin{matrix} \nearrow \text{причина перемещения} \\ \downarrow \text{направление перемещения} \end{matrix}$$

Воспользуемся законом Гука и перемещения от неизвестных сил запишем в виде:

$$\Delta_{iXj} = \delta_{ij} X_j \quad (2) \text{ - перемещение пропорционально силе, где } i=1,2; j=1,2.$$

Здесь:  $\delta_{ij} = \frac{\Delta_{iXj}}{X_j}$  - удельное перемещение (податливость) - перемещение в О.С. от силы равной единице, приложенной по направлению силы  $X_j$  ( $X_j = 1$ ).

Вместо (1) с учетом (2) имеем:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases} \quad (3) \quad \text{- система канонических уравнений МЕТОДА СИЛ (n=2).}$$

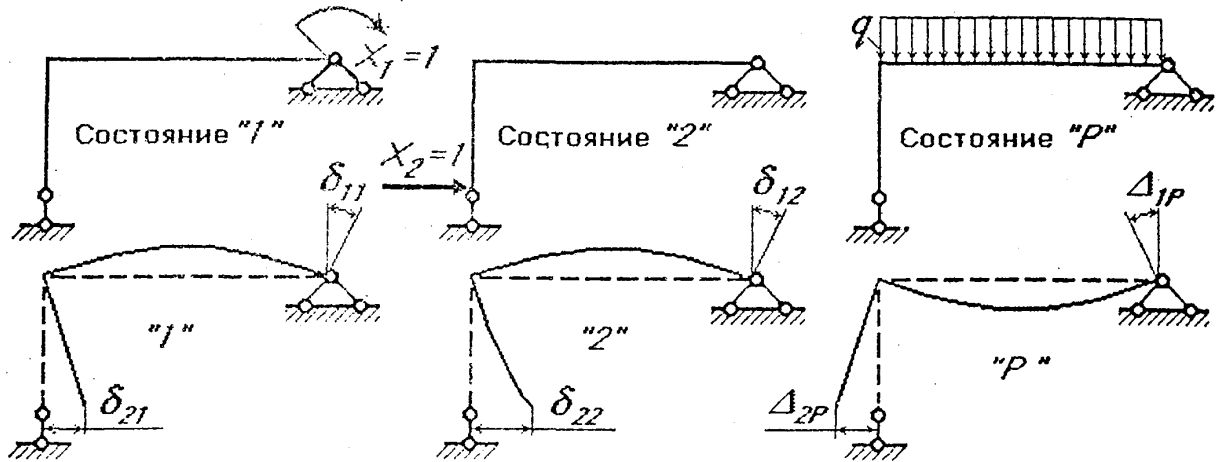
В общем виде для n раз статически неопределимой системы:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP} = 0, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \dots, n. \\ j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{matrix}$$

В системе канонических уравнений МЕТОДА СИЛ на основе принципа суперпозиции и закона Гука записано равенство нулю перемещений по направлению неизвестных усилий в отброшенных избыточных связях.

© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ( $\delta_{ij}$ ) И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ ( $\Delta_{iP}$ )



$\delta_{11}$  - угловое перемещение (угол поворота,  $X_1$  - пара сил).

$\delta_{21}$  - линейное перемещение ( $X_2$  - сосредоточенная сила).

$\delta_{ij}$  - перемещения по направлению отброшенных связей ( $i$ ) в ОСНОВНОЙ СИСТЕМЕ, нагруженной силами  $X_j = 1$  (податливость основной системы по направлению отброшенных связей).

$\Delta_{iP}$  - перемещения по направлению отброшенных связей ( $i$ ) в ОСНОВНОЙ СИСТЕМЕ, нагруженной заданными внешними силами (системой сил  $P$ ).

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ( $\delta_{ij}$ ) И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ ( $\Delta_{iP}$ )

Перемещения  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{iP}$  определим с помощью метода (интеграла) Мора. Интеграл перемещений для участков с постоянной жесткостью удобно вычислять по формуле Симпсона, разбивая участок на две равные части.

Учитывая работу только изгибающих моментов, для плоской системы имеем:

$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \int \frac{M_i(z) M_j(z)}{EI_{xi}} dz = (\mathcal{Z}M_i) \times (\mathcal{Z}M_j) = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6EI_{xi}} (M_i^H M_j^H + 4M_i^C M_j^C + M_i^K M_j^K)$$

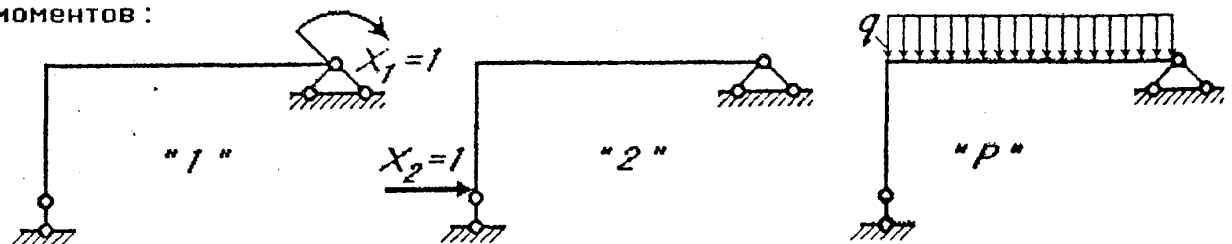
$$\Delta_{iP} = \sum_{i=1}^n \int \frac{M_i(z) M_P(z)}{EI_{xi}} dz = (\mathcal{Z}M_i) \times (\mathcal{Z}M_P) = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6EI_{xi}} (M_i^H M_P^H + 4M_i^C M_P^C + M_i^K M_P^K)$$

Здесь:  $M^H$ ,  $M^C$  и  $M^K$  - значения изгибающих моментов в начале, в середине и в конце участка (соответственно).

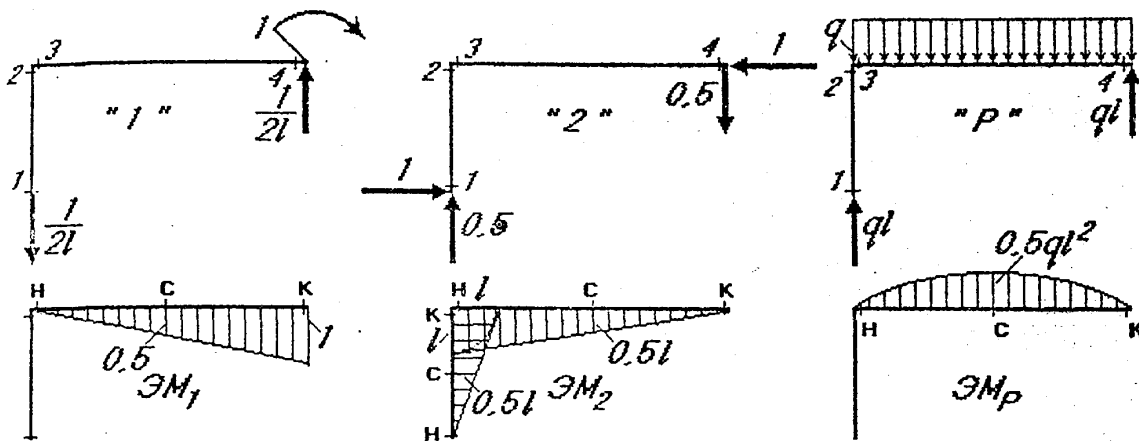
Численные методы вычисления интеграла Мора (по формуле Симпсона или по способу Верещагина) называются операцией перемножения эпюр:

$\mathcal{Z}M_i$ ,  $\mathcal{Z}M_j$  и  $\mathcal{Z}M_P$ .

Нагрузим О.С. последовательно силами  $X_j = 1$  ( $j = 1, 2$ ) и внешней нагрузкой (состояние  $P$ ) и для каждого вида нагружения построим эпюры изгибающих моментов:



ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ

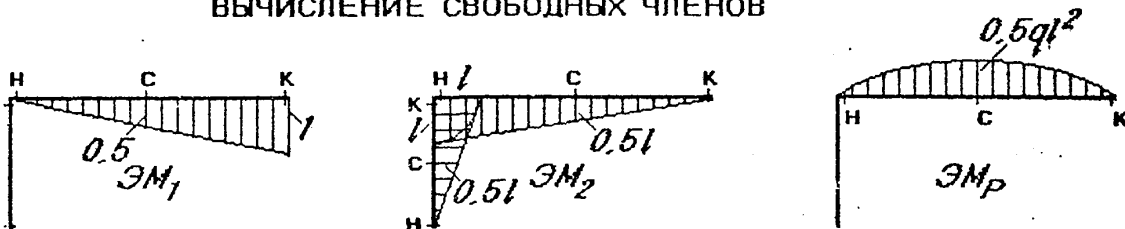


$$\delta_{11} = (\mathcal{M}_1) \times (\mathcal{M}_1) = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6EI_x} (M_1^H M_1^H + 4M_1^C M_1^C + M_1^K M_1^K) = \frac{2l}{6EI_x} (0 + 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 1 \cdot 1) = \frac{4l}{6EI_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\mathcal{M}_1) \times (\mathcal{M}_2) = \frac{2l}{6EI_x} (0 + 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5l + 0) = \frac{2l^2}{6EI_x}$$

$$\delta_{22} = (\mathcal{M}_2) \times (\mathcal{M}_2) = \frac{l}{6EI_x} (0 + 4 \cdot 0.5l \cdot 0.5l + 1 \cdot 1) + \frac{2l}{6EI_x} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 0.5l \cdot 0.5l + 0) = \frac{6l^3}{6EI_x}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ



$$\Delta_{1P} = (\mathcal{M}_1) \times (\mathcal{M}_P) = \frac{2l}{6EI_x} (0 - 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5ql^2 + 0) = -\frac{2ql^3}{6EI_x}$$

$$\Delta_{2P} = (\mathcal{M}_2) \times (\mathcal{M}_P) = -\frac{2l}{6EI_x} (0 + 4 \cdot 0.5l \cdot 0.5ql^2 + 0) = -\frac{2ql^4}{6EI_x}$$

6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4l}{6EI_x} X_1 + \frac{2l^2}{6EI_x} X_2 - \frac{2ql^3}{6EI_x} = 0 \\ \frac{2l^2}{6EI_x} X_1 + \frac{6l^3}{6EI_x} X_2 - \frac{2ql^4}{6EI_x} = 0 \end{cases}$$

Система линейных алгебраических уравнений:

$\delta_{ii} > 0$  - главные коэффициенты;

$\delta_{ij} = \delta_{ji} \geq 0$  - побочные коэффициенты.

$$Det \delta = |\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} > 0$$

главная диагональ

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ:

Система канонических уравнений всегда имеет единственное решение.

○ Коэффициенты  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  не зависят от внешней нагрузки ( $P_e$ ):

Свободные члены  $\Delta_{iP} \neq 0$  зависят от внешней нагрузки ( $P_e$ ).

Если  $\Delta_{iP} = 0$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) система превращается в однородную, которая имеет нулевое (тривиальное) решение:  $X_i = 0$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ )

Неизвестные  $X_i$  зависят от соотношения длин ( $l_i$ ) и жесткостей сечения и не зависят от их абсолютных значений:  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{iP}$  имеют общие множители,

которые можно сократить: (в нашем случае  $\frac{2l}{6EI_x}$ ):

$$\begin{cases} 3l \cdot X_1 + X_2 - ql^2 = 0 \\ l \cdot X_1 + 2X_2 - ql^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0.4ql^2 \\ X_2 = 0.2ql \end{cases} \quad \text{Проверка: подстановка } X_i \text{ в исходные уравнения.}$$

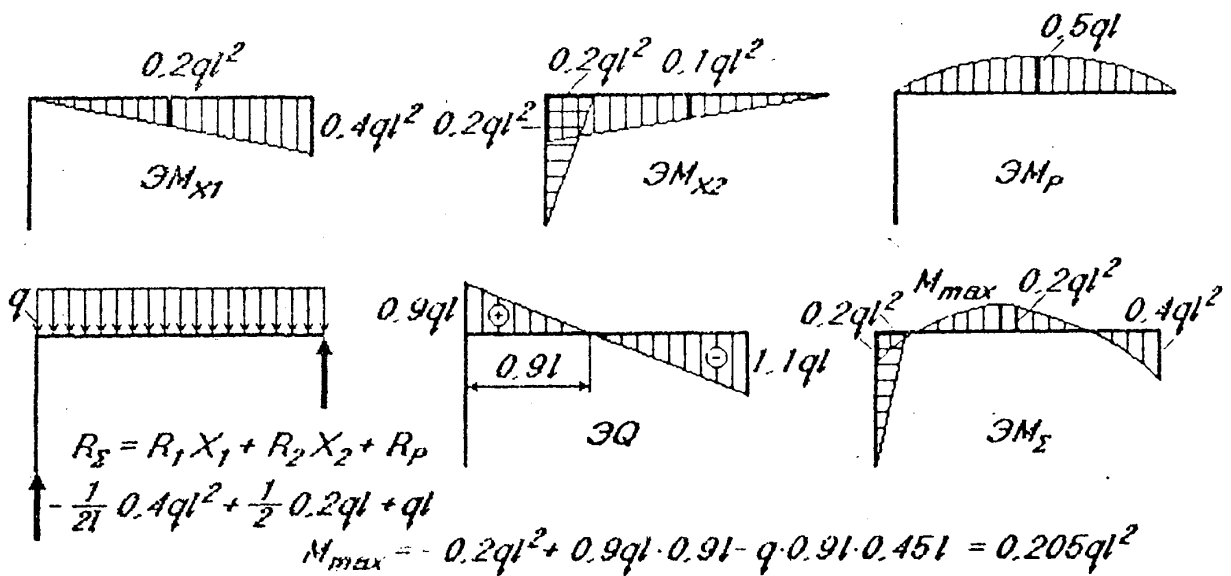
а)  $X_i > 0$  - угадали направление неизвестного усилия;

б)  $X_i < 0$  - не угадали направление усилия, необходимо сменить направление на противоположное.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЕ:

Усилия в Э.С. определяются на основании принципа независимости действия сил:

$$\begin{aligned} M_S &= M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_P & \text{или в общем виде:} \\ R_S &= R_1 X_1 + R_2 X_2 + R_P & M_S = \sum_{j=1}^n M_j X_j + M_P \quad \begin{matrix} i=1,2,3,\dots,n \\ j=1,2,3,\dots,n \end{matrix} \end{aligned}$$



Расчет на прочность СНС аналогичен расчету СОС:

$$\max \sigma \leq [\sigma]$$

$$\max \tau \leq [\tau]$$

$$\sigma = \sigma(M, N)$$

$$\tau = \tau(T, Q)$$

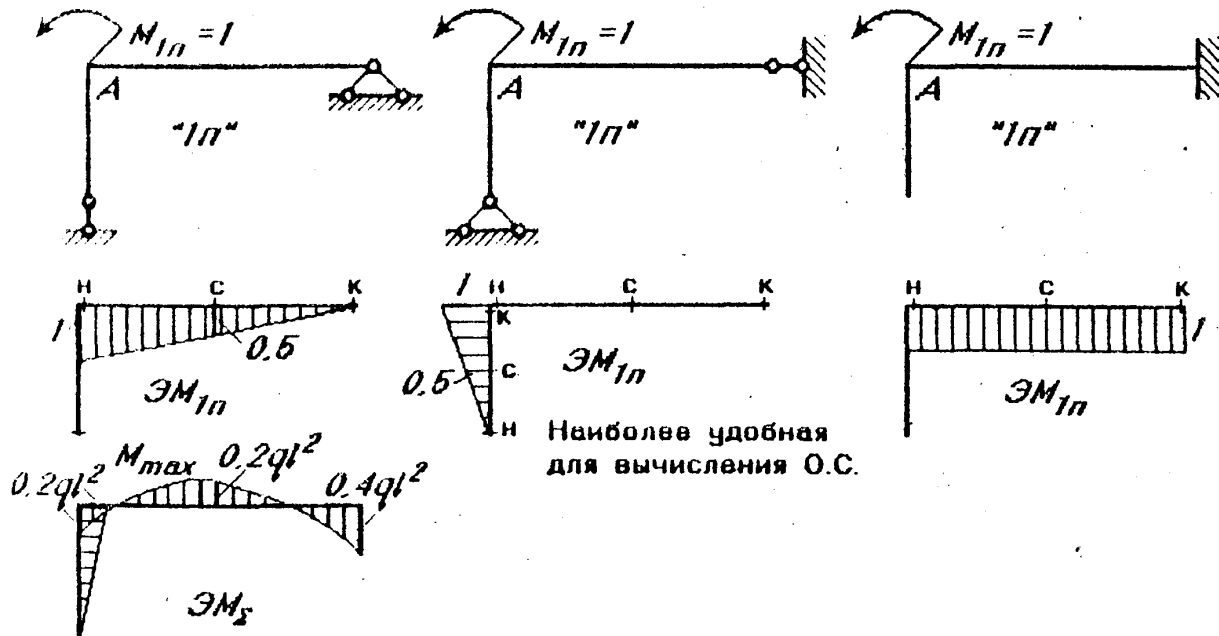
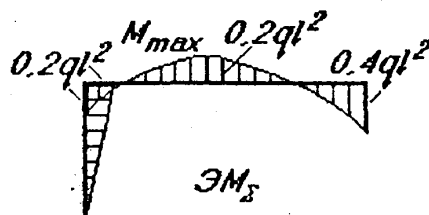
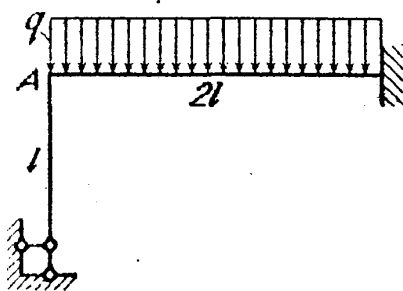
8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ  
ЭКВИВАЛЕНТНАЯ система деформируется как заданная СНС, поэтому перемещения определяются в Э.С., которая статически определимая.

Перемещения вычисляются методом Мора; единичная нагрузка прикладывается в направлении искомого перемещения в О.С. (которая может быть любой - наиболее удобной для вычисления):

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^n \int \frac{M_{1n}(z) M_2(z)}{EI_{xi}} dz = (\Delta M_{1n}) \times (\Delta M_2).$$

где  $M_{1n}$  - изгибающие моменты в О.С., нагруженной единичной нагрузкой ( $P_1 = 1$  или  $M_1 = 1$ ), приложенной по направлению искомого перемещения  $\Delta_i$ .

НАПРИМЕР: Определить угол поворота сечения (узла) А:  $\theta_A = ?$



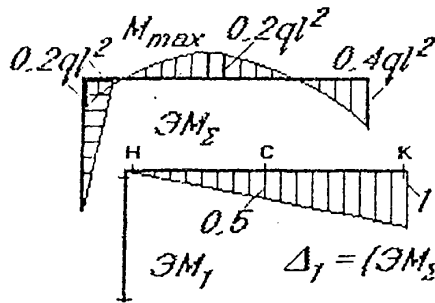
$$\theta_A = (\Delta M_{1n}) \times (\Delta M_2) = \frac{l}{6EI_x} (0 - 4 \cdot 0.5 \cdot 0.1ql^2 - 1 \cdot 0.2ql^2) = -\frac{0.4ql^3}{6EI_x}$$

$$\theta_A = -0.067 \frac{ql^3}{6EI_x} \text{ - знак (-) - сечение А поворачивается по часовой стрелке.}$$



### КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА

Для проверки правильности решения находят перемещения заведомо равные нулю - перемещения по направлению отброшенных связей в О.С.



$$\Delta_i = \sum_{i=1}^n \int \frac{M_S(z) M_C(z)}{EI_{xi}} dz = (\Delta M_S) \times (\Delta M_C):$$

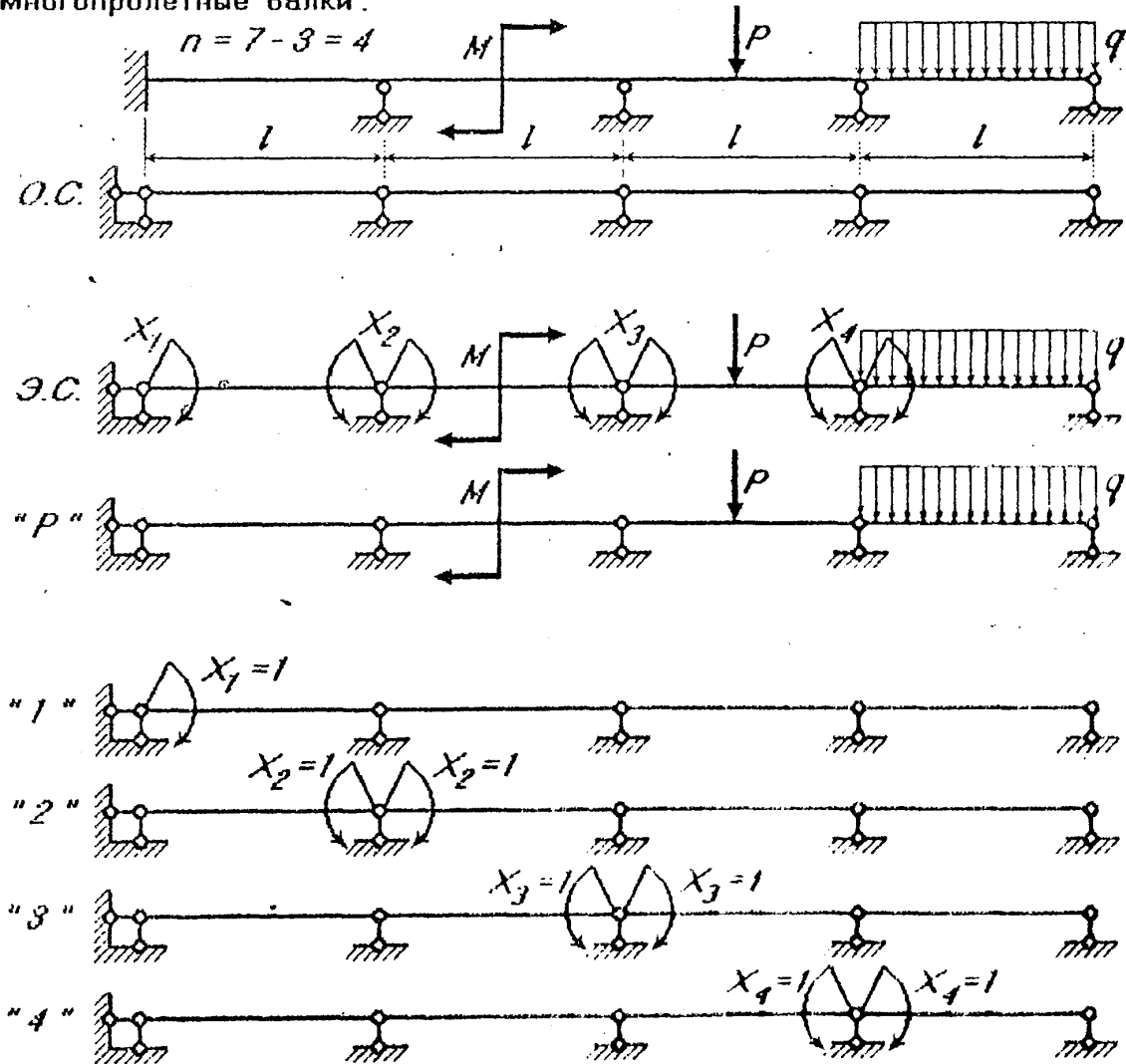
$$\Delta_1 = (\Delta M_S) \times (\Delta M_1) = \frac{2l}{6EI_x} (0 - 4 \cdot 0.2ql^2 \cdot 0.5 + 0.4ql^2 \cdot 1) = 0.$$

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ ДЛЯ РАСЧЕТА МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК

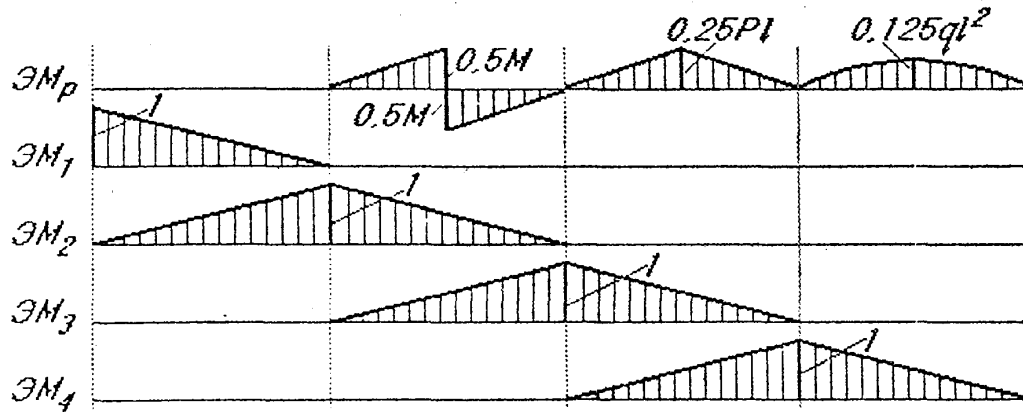
Метод сил является универсальным методом расчета СНС: простая идея, лежащая в основе метода, ясный геометрический и механический смысл всех величин, входящих в уравнения, КАНОНИЗИРОВАННАЯ последовательность вычислений делают этот метод незаменимым для расчета простых СНС.

Объем вычислений - трудоемкость метода - зависят от удачного выбора О.С.

Многопролетные балки:



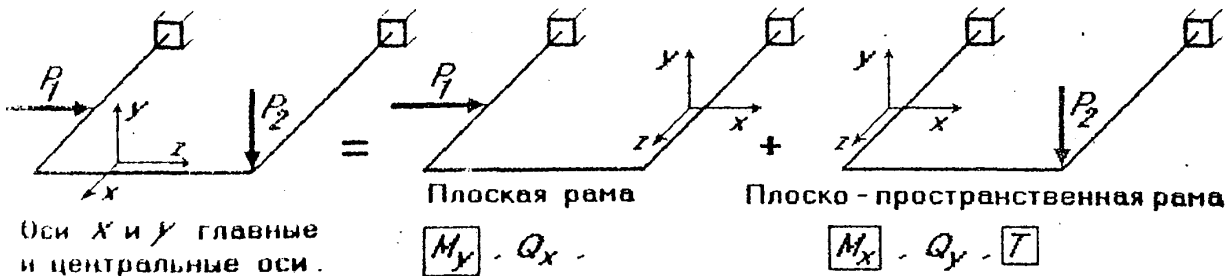
ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ



$$\begin{aligned}
 \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} &= 0; & \Delta_{1P} &= (\mathcal{E}M_1) \times (\mathcal{E}M_P) = 0; \\
 \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} &= 0; & \delta_{13} &= \delta_{31} = (\mathcal{E}M_1) \times (\mathcal{E}M_3) = 0; \\
 \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} &= 0; & \delta_{14} &= \delta_{41} = (\mathcal{E}M_1) \times (\mathcal{E}M_4) = 0; \\
 \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} &= 0; & \delta_{24} &= \delta_{42} = (\mathcal{E}M_2) \times (\mathcal{E}M_4) = 0; \\
 & & \delta_{22} &= \delta_{33} = \delta_{44} \neq 0; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{34} = \delta_{43} \neq 0;
 \end{aligned}$$

Система канонических уравнений оказалась неполной, в каждом из уравнений не более 3-х неизвестных

ПЛОСКО - ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РАМЫ



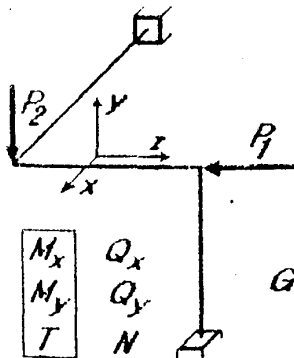
Оси  $x$  и  $y$  главные и центральные оси.

$$\boxed{M_y} - Q_x$$

$$\boxed{M_x} - Q_y - \boxed{T}$$

При вычислении  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{iP}$  учитываются ТОЛЬКО основные усилия.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РАМЫ

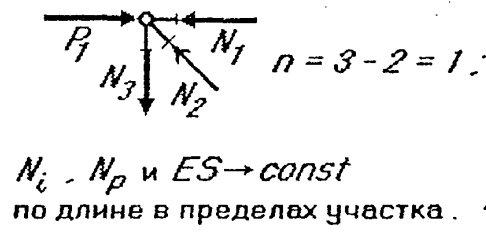
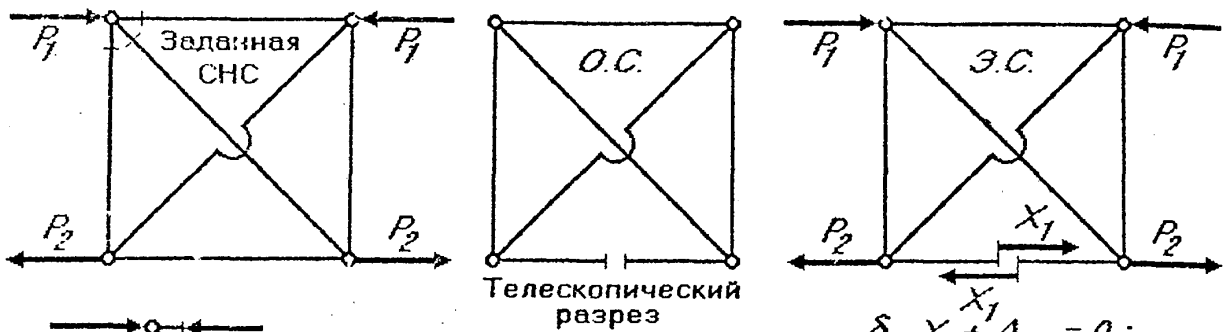


$$\begin{aligned}
 \delta_{ij} &= \sum_{i=1}^n \int \frac{M_{xi} M_{xj}}{EI_x} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{M_{yi} M_{yj}}{EI_y} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{T_i T_j}{EI_k} dz; \\
 \Delta_{iP} &= \sum_{i=1}^n \int \frac{M_{xi} M_{xp}}{EI_x} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{M_{yi} M_{yp}}{EI_y} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{T_i T_p}{EI_k} dz;
 \end{aligned}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$I_k$  — круглое поперечное сечение;  
 $I_k$  — некруглое поперечное сечение.

ФЕРМЫ (СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ - УЗЛОВАЯ НАГРУЗКА)



$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_i N_j}{ES_i} dz = \sum_{i=1}^n \frac{N_i N_j}{ES_i} l_i = (\partial N_i) \times (\partial N_j)$$

$$\Delta_{iP} = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_i N_P}{ES_i} dz = \sum_{i=1}^n \frac{N_i N_P}{ES_i} l_i = (\partial N_i) \times (\partial N_P)$$

$N_i - N_P$  и  $ES \rightarrow const$   
по длине в пределах участка.

$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$

УСИЛИЯ в СНС от ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ( $T$ ), от НЕТОЧНОСТИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ( $\delta$ ) и от ОСАДКИ ОПОР ( $\Delta$ )

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_{jm} + \Delta_{im} = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$\Delta_{im}$  причина перемещения  
направление перемещения

$$\Delta_{im} = \begin{cases} \Delta_{iP} - \text{внешние силы } (P_e); \\ \Delta_{iT} - \text{температура } (T); \\ \Delta_{i\delta} - \text{заданные смещения } (\delta); \\ \Delta_{i\Delta} - \text{осадка опор } (\Delta). \end{cases}$$

Расчет на каждое воздействие ведется ОТДЕЛЬНО.

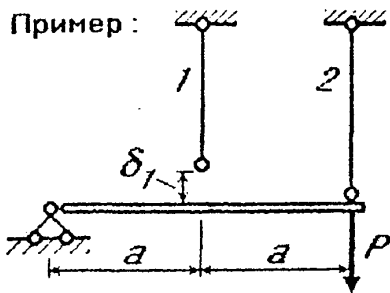
$\Delta_{im}$  - определяются методом Мора (изменяются в зависимости от воздействия).

$\delta_{ij}$  - остаются неизменными для всех видов воздействий.

$$\Delta_{iT} = \sum_{i=1}^n \int N_i(z) \alpha \frac{t_2 + t_1}{2} dz + \sum_{i=1}^n \int N_i(z) \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} dz$$

$$\Delta_{i\delta} = \sum_{i=1}^n N_{ii} \delta_i; \quad \Delta_{i\Delta} = \sum_{i=1}^n R_{ii} \Delta_i$$

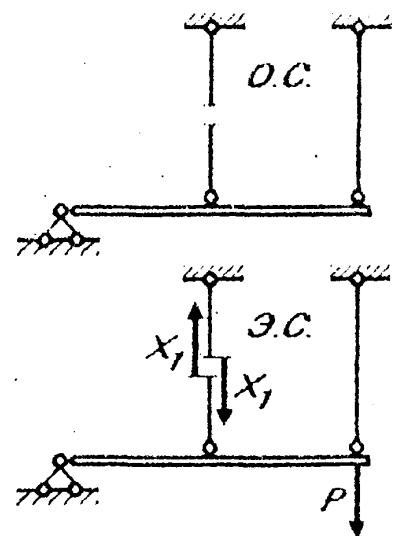
$R_{ii}$  - реакция опоры, которая получила смещение  $\Delta_i$ .



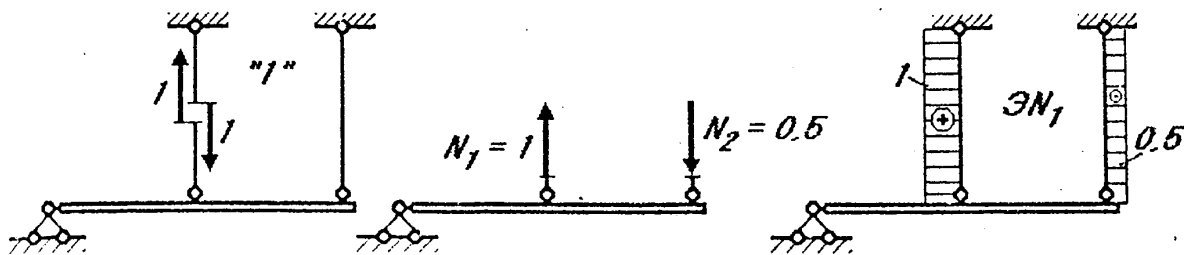
$n = 2 - 1 = 1$

$\delta_{11} X_{1m} + \Delta_{1m} = 0$

- Дано:
- $P = 200 \text{ kH}$
  - $S_1 = S_2 = S = 10 \text{ см}^2$
  - $l_1 = l_2 = l = 1.0 \text{ м}$
  - $\delta_1 = 1.0 \text{ мм}$
  - $\Delta t_2 = 75^\circ$
  - $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$
  - $E = 2.0 \cdot 10^4 \text{ МПа}$
  - $\sigma_i = ?$



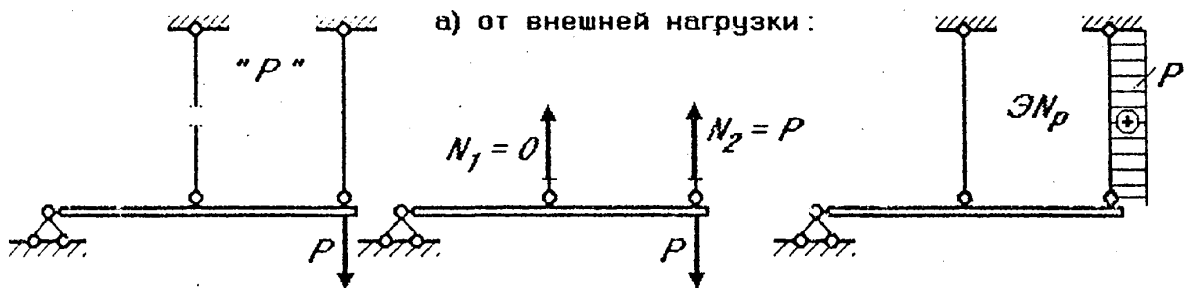
ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ



$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_1 N_1}{ES_i} dz = \sum_{i=1}^n \frac{N_1 N_1}{ES_i} l_i = (\sum N_1) \times (\sum N_1) = \frac{1 \cdot 1}{ES} l + \frac{0.5 \cdot 0.5}{ES} l = 1.25 \frac{l}{ES}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ

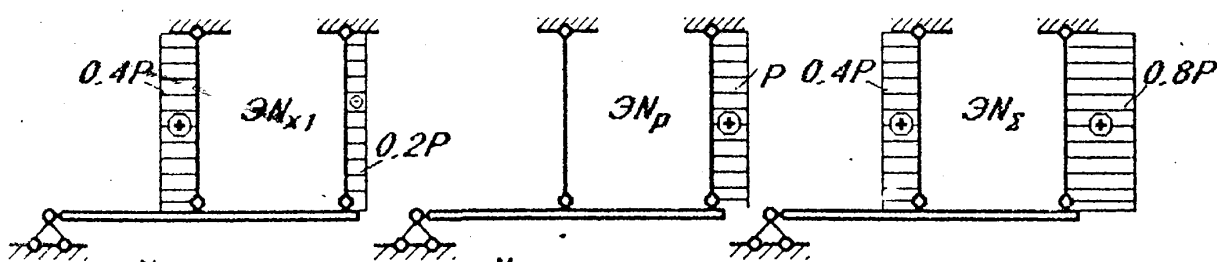
а) от внешней нагрузки:



$$\delta_{11} X_{1P} + \Delta_{1P} = 0; \Delta_{1P} = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_1 N_p}{ES_i} dz = \sum_{i=1}^n \frac{N_1 N_p}{ES_i} l_i = (\sum N_1) \times (\sum N_p) = -\frac{0.5 \cdot P}{ES} l$$

$$1.25 \frac{l}{ES} X_{1P} - \frac{0.5 \cdot P}{ES} l = 0; X_{1P} = 0.4P; \sum N_{x1} = \sum N_1 \cdot X_{1P}; \sum N_2 = \sum N_p + \sum N_{x1}$$

Усилия  $X_{1P}$  не зависят от  $l$  и  $ES$ , а зависят от их соотношения.



$$\sigma_{1P} = \frac{N_{1P}}{S_1} = 0.4 \frac{P}{S}; \sigma_{2P} = \frac{N_{2P}}{S_2} = 0.8 \frac{P}{S}; \sigma_{1P} = 80 \text{ МПа}; \sigma_{2P} = 160 \text{ МПа}$$

б) от неточности изготовления стержней:  $\delta_{11} = 1.25 \frac{l}{ES}$  - неизменнов;

$$\delta_{11} X_{1\delta} + \Delta_{1\delta} = 0; \Delta_{1\delta} = \sum_{i=1}^n N_{1i} \delta_i = 1 \cdot (-\delta_1) = -\delta_1; \text{ (от } N_1 \text{ - удлинение,}$$

$N_{1i}$  - усилие от единичной нагрузки в  $i$ -ом стержне; от  $\delta_1$  - укорочение)

$\delta_i$  - неточность изготовления  $i$ -го стержня.

$$1.25 \frac{l}{ES} X_{1\delta} - \delta_1 = 0; N_{1\delta} = X_{1\delta} = 0.8 \frac{\delta_1 ES}{l}; N_{2\delta} = 0.5 X_{1\delta} = -0.4 \frac{\delta_1 ES}{l}$$

$$\sigma_{1\delta} = \frac{N_{1\delta}}{S_1} = 0.8 \frac{\delta_1 E}{l} = \frac{0.8 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{1} = 160 \text{ МПа}; \sigma_{2\delta} = -80 \text{ МПа}$$

в) от изменения температуры стержней:

$$\delta_{11} X_{1T} + \Delta_{1T} = 0; \quad \delta_{11} = 1.25 \frac{l}{ES} \text{ - неизменное:}$$

$$\Delta_{1T} = \sum_{i=1}^n \int N_i(z) \alpha \frac{t_2 + t_1}{2} dz = \sum_{i=1}^n N_{1i} \alpha \frac{t_2 + t_1}{2} l = -0.5 \alpha_2 \Delta t_2 l;$$

$$1.25 \frac{l}{ES} X_{1T} - 0.5 \alpha_2 \Delta t_2 l = 0; \quad X_{1T} = 0.4 \alpha_2 \Delta t_2 ES;$$

$$N_{1T} = X_{1T}; \quad \sigma_{1T} = 0.4 \alpha_2 \Delta t_2 E = 0.4 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 75 \cdot 2 \cdot 10^5 = 72 \text{ МПа};$$

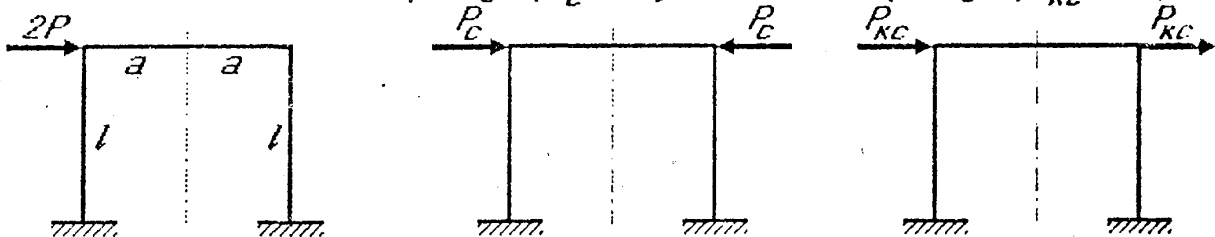
$$N_{2T} = -0.5 X_{1T}; \quad \sigma_{2T} = -36 \text{ МПа}.$$

$\sigma_i \backslash m$	$P$	$\delta_1$	$\Delta t_2$	$\Sigma$
$\sigma_1$	80 МПа	160 МПа	72 МПа	312 МПа
$\sigma_2$	160 МПа	-80 МПа	-36 МПа	44 МПа

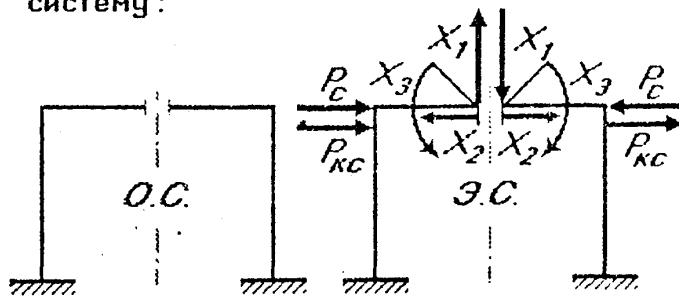
### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ ПРИ РАСКРЫТИИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ

Симметричная рама (правая часть - зеркальное отображение левой части), нагружена несимметричной нагрузкой.

Используя принцип независимости действия сил, заменим заданную несимметричную на симметричную ( $P_c = P$ ) и кососимметричную ( $P_{kc} = P$ ).



Выберем основную систему, сохраняя симметрию, и составим эквивалентную систему:



Система канонических уравнений:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} = 0;$$

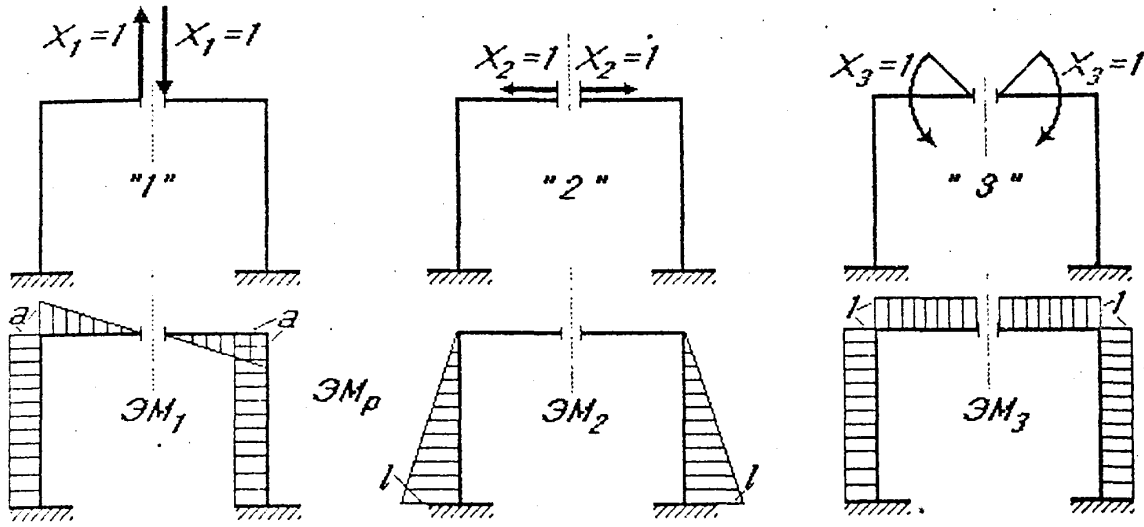
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0;$$

$X_1$  - кососимметричный ВСФ -  $Q$ ;

$X_2$  и  $X_3$  - симметричные ВСФ -  $N$  и  $M$

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ

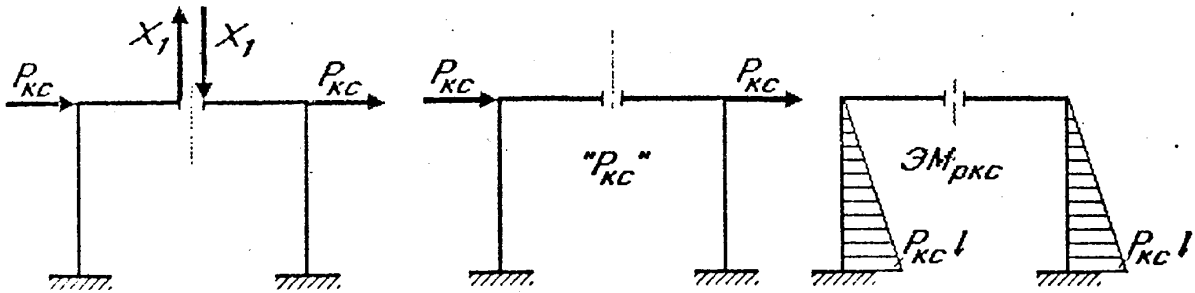


$$\delta_{12} = \delta_{21} = (ZM_1) (ZM_2) = (+ \text{лев}) + (- \text{прав}) = 0;$$

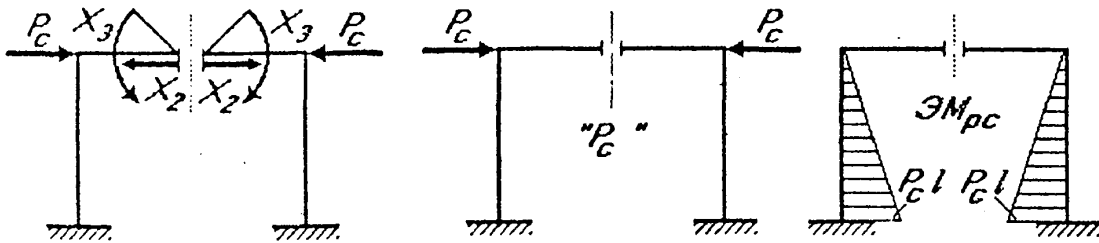
$$\delta_{13} = \delta_{31} = (ZM_1) (ZM_3) = (+ \text{лев}) + (- \text{прав}) = 0;$$

Поставленная задача и система канонических уравнений распадаются на две самостоятельные:

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ



$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0; \quad \Delta_{1P} \text{ - зависит от кососимметричной нагрузки } P_{kc}$$



$$\delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0; \quad \Delta_{2P} \text{ и } \Delta_{3P} \text{ - зависят от симметричной нагрузки } P_c$$

©Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

РАСЧЕТЫ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

РАСЧЕТ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ В ОПАСНОЙ ТОЧКЕ  
(или по допускаемым напряжениям в пределах упругих деформаций)

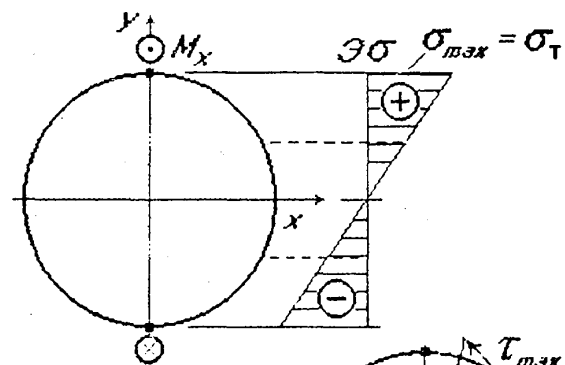
$\max \sigma \leq [\sigma]; [\sigma] = \frac{\bar{\sigma}}{[n]}$ ;  $\bar{\sigma} \begin{cases} \sigma_T - \text{пластичные материалы;} \\ \sigma_B - \text{хрупкие материалы;} \end{cases}$

а) Однородное напряженное состояние:

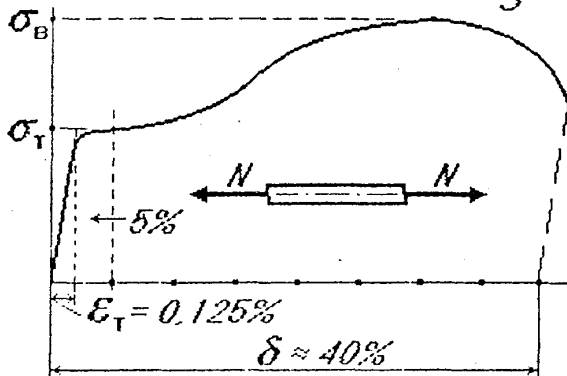
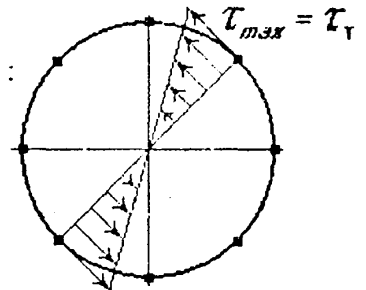
Растяжение - сжатие:  $\sigma = \frac{N}{S}$

б) Неоднородное напряженное состояние:

Изгиб:



Кручение:



Пластичный материал Ст3:

$\sigma_T = 250 \text{ МПа}; \sigma_B = 400 \text{ МПа};$

$E = 2.0 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \delta = 0.4 (40\%)$

$\epsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{250}{2.0 \cdot 10^5} = 1.25 \cdot 10^{-3} = 0.125\%$

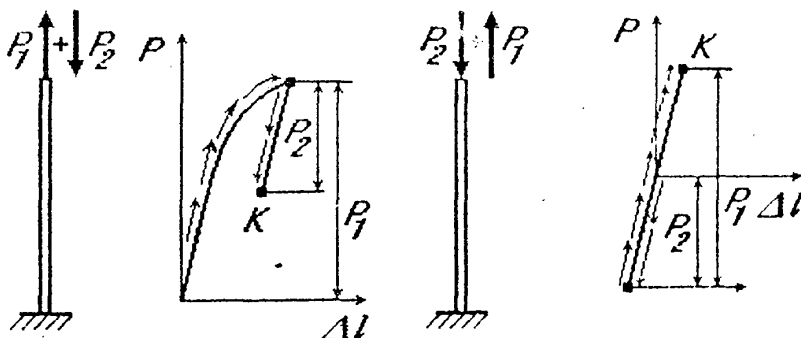
За пределами упругости.

В целом ряде случаев приходится иметь дело с процессами пластического деформирования (штамповка, резание, прокатка, волочение, гибка листов, выдавливание стержней и труб, навивка пружин), в условиях высоких температур (диски и лопатки паровых и газовых турбин, элементы двигателей внутреннего сгорания и реактивных двигателей, химических установок и др.).

Ограничимся ( $\epsilon \leq 5\%$ ), здесь  $\epsilon \ll 1$  ( $\epsilon \leq 0.05$ ).

а) Расчет ведется в пределах малых пластических деформаций - это позволяет использовать принцип начальных размеров.

б) Принцип независимости действия сил не применим, например:



в) При активном деформировании - напряжение возрастает, при пассивном деформировании - напряжение уменьшается.

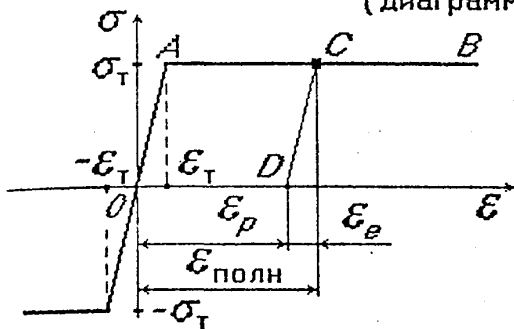
г) РАБОТОСПОСОБНОСТЬ конструкций определяется величиной ПЕРЕМЕЩЕНИЯ либо по величине ПРЕДЕЛЬНОЙ или РАЗРУШАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ.

СХЕМАТИЗАЦИЯ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Для упруго-пластического материала:  $\sigma_{пц} = \sigma_{тр} = \sigma_{тс} = \sigma_{т}$ ;  $E_p = E_c = E$ .

ДИАГРАММА ИДЕАЛЬНО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

(диаграмма Прандтля)



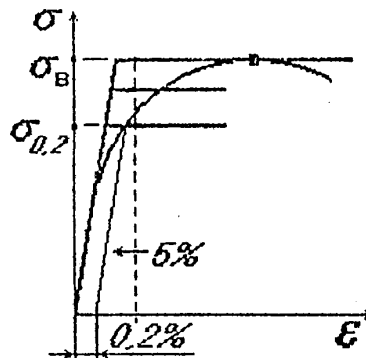
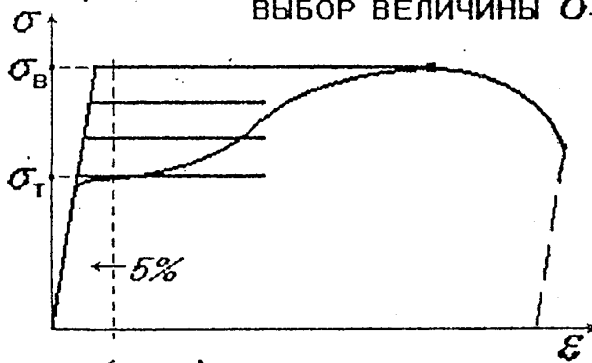
а) если  $\epsilon \leq \epsilon_T$ ,  $\sigma = E\epsilon$  (закон Гука) участок OA

б) если  $\epsilon > \epsilon_T$ ,  $\sigma = \sigma_T$  (участок AB)

в) разгрузка - упругие деформации, подчиняются закону Гука (участок OD)

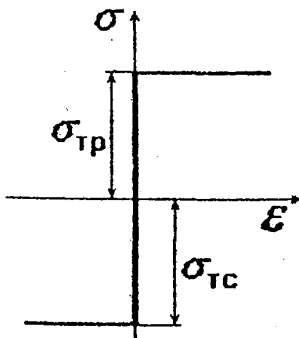
$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

ВЫБОР ВЕЛИЧИНЫ  $\sigma_T$



От  $\sigma_T = \sigma_T(\sigma_{0.2})$  до  $\sigma_T = \sigma_B$

Если  $\epsilon_e \ll \epsilon_p$  - материал называется ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИМ.



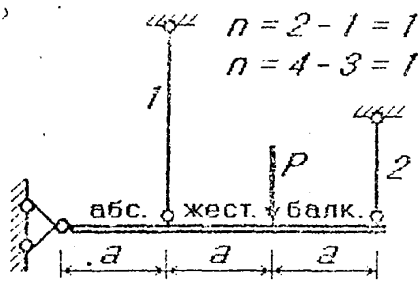
ИСТОРИЯ НАГРУЖЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ



Одному  $\sigma$  соответствуют  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ .



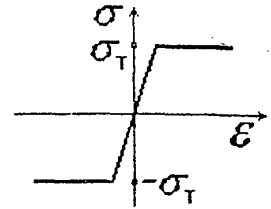
АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ УПРУГО - ПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ (УПК) ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ ПРОСТОЙ СНС, элементы которой испытывают растяжение или сжатие.



$n = 2 - 1 = 1$   
 $n = 4 - 3 = 1$

Дано:  
 $l_1 = 2l; l_2 = l;$   
 $S_1 = 2S; S_2 = S;$   
 $E_1 = E_2 = E; a$   
 $\sigma_T; 0 \leq P \leq P^*;$

Диаграмма идеально упруго - пластического материала:



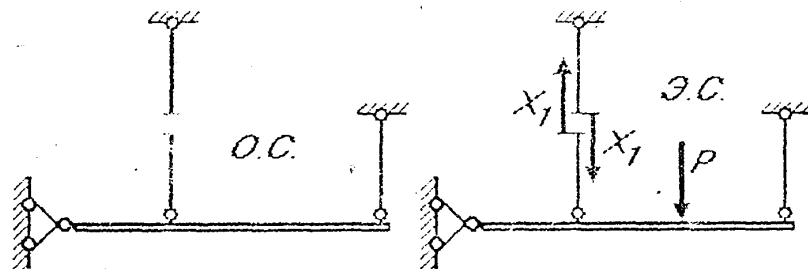
Построить зависимости:

$\sigma_i = \sigma_i(P); \Delta_{pp} = \Delta_{pp}(P) = \Delta_A$

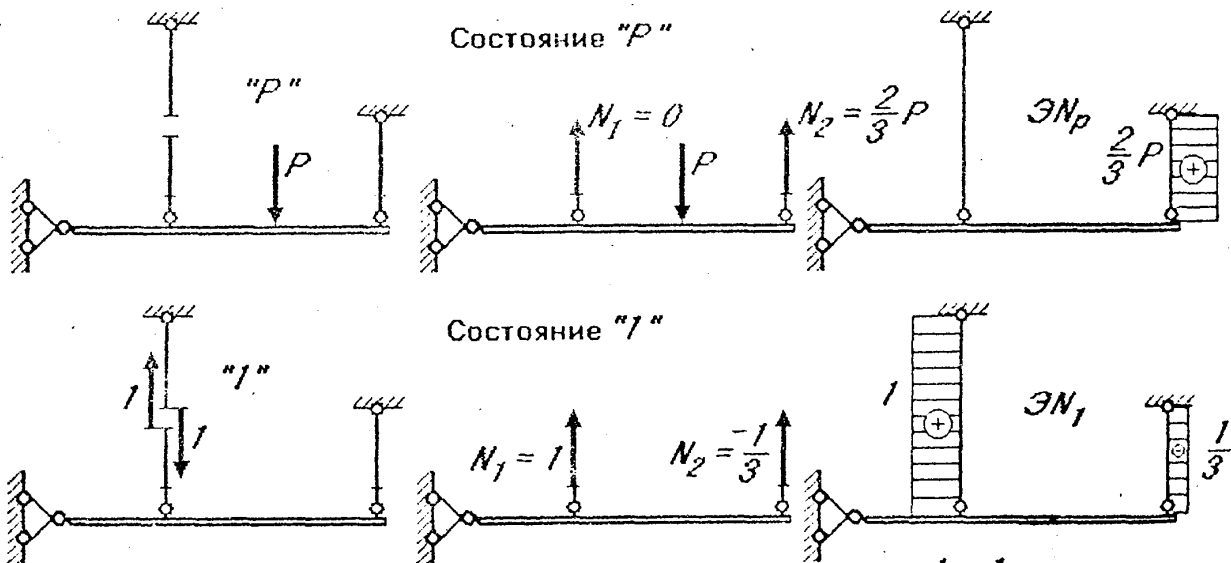
Рассмотрим три характерно различных состояния конструкции:

- 1) Упругое состояние ( $\sigma_{max} < \sigma_T$ ).
- 2) Упруго - пластическое состояние.
- 3) Предельное состояние - пластические деформации неограниченно возрастают.

1. Упругое деформирование обеих стержней. Раскрытие статической неопределенности.



$\delta_{11} X_{1P} + \Delta_{1P} = 0;$

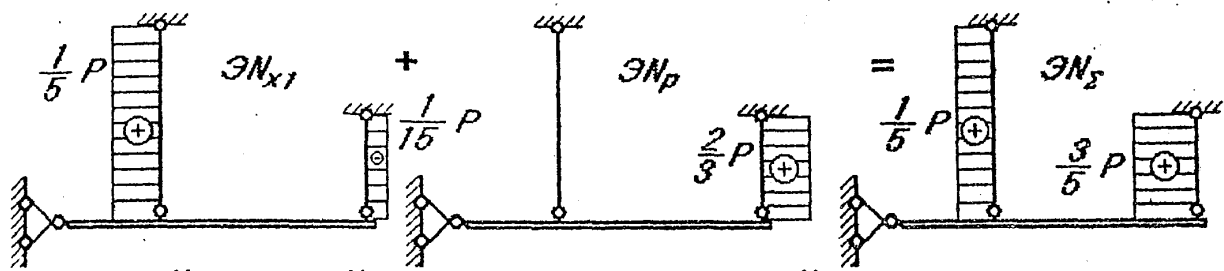


$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_1 N_1}{ES_i} dz = \sum_{i=1}^n \frac{N_1 N_1}{ES_i} l_i = (\mathcal{E}N_1) \times (\mathcal{E}N_1) = \frac{1 \cdot 1}{E \cdot 2S} \cdot 2l + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{ES} \cdot l = \frac{10Pl}{9ES}$$

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_1 N_P}{ES_i} dz = \sum_{i=1}^n \frac{N_1 N_P}{ES_i} l_i = (\mathcal{E}N_1) \times (\mathcal{E}N_P) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{ES} \cdot l = -\frac{2Pl}{9ES}$$

$$\frac{10Pl}{9ES} X_1 - \frac{2Pl}{9ES} = 0; \quad X_1 = 0.2P = \frac{1}{5} P.$$

$$\Delta N_{x1} = \Delta N_1 \cdot X_1 ; \Delta N_2 = \Delta N_p + \Delta N_{x1}$$

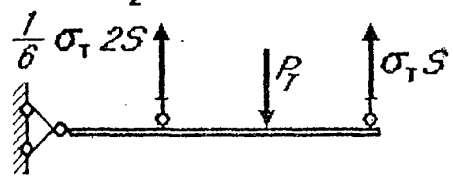


$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{P}{5 \cdot 2S} = 0.1 \frac{P}{S} ; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{3P}{5S} = 0.6 \frac{P}{S} ; \quad (1)$$

1. УПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ:  $0 \leq P \leq P_T$ :

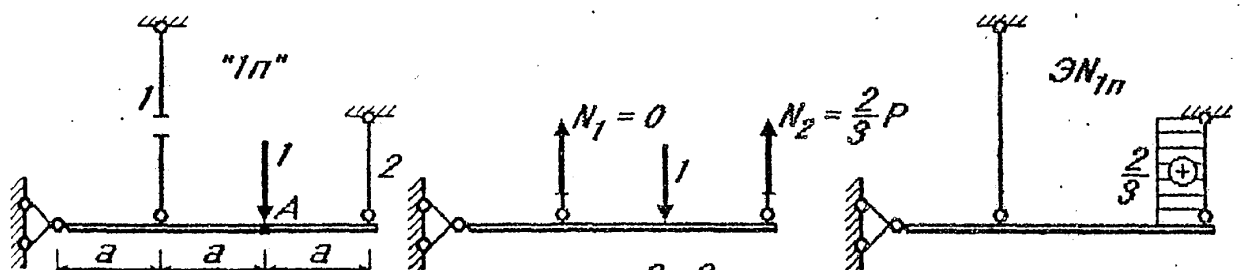
Увеличение нагрузки  $P$  приводит к пропорциональному росту напряжений в стержнях. При  $P = P_T$  напряжения во втором стержне достигнут предела текучести:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{3P_T}{5S} = \sigma_T ; \quad \text{отсюда: } P_T = \frac{5}{3} \sigma_T S ; \quad \sigma_1 = \frac{P_T}{10 \cdot S} = \frac{5 \sigma_T S}{10 \cdot 3S} = \frac{1}{6} \sigma_T ;$$



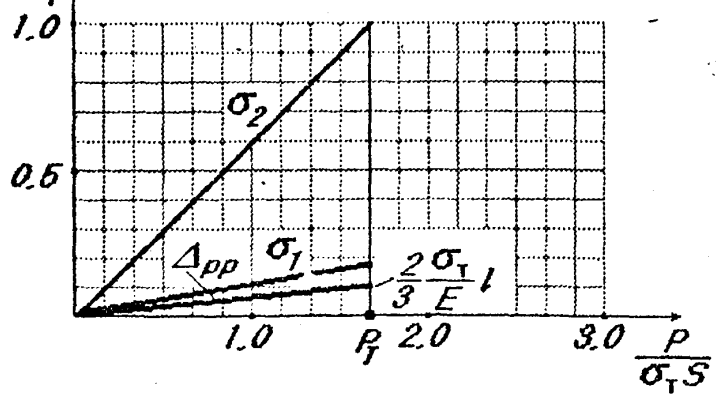
$P_T$  - "опасная" нагрузка, при которой в конструкции впервые возникают пластические деформации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ:



$$\Delta_{pp} = \Delta_{pp}(P) = \Delta_A = (\Delta N_{1п}) \cdot (\Delta N_2) = \frac{2 \cdot \frac{3}{5} P}{ES} \cdot l = \frac{2Pl}{5ES} ; \quad (2) \quad P=0: \Delta_{pp}=0 ;$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_T} ; \frac{\sigma_2}{\sigma_T} \quad \Delta_{pp} \quad P = P_T = \frac{5}{3} \sigma_T S ; \quad \Delta_{pp} = \frac{2 \sigma_T l}{3 E} ;$$

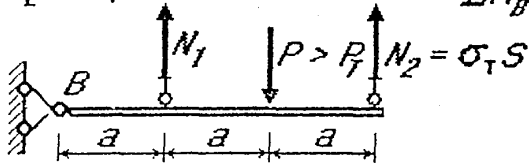


© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

2. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ:  $P_T \leq P \leq P_0$ :

При увеличении нагрузки  $P$ ,  $\sigma_2 = \sigma_T = const$ ,  $N_2 = \sigma_T S$  растет усилие  $N_1$ .

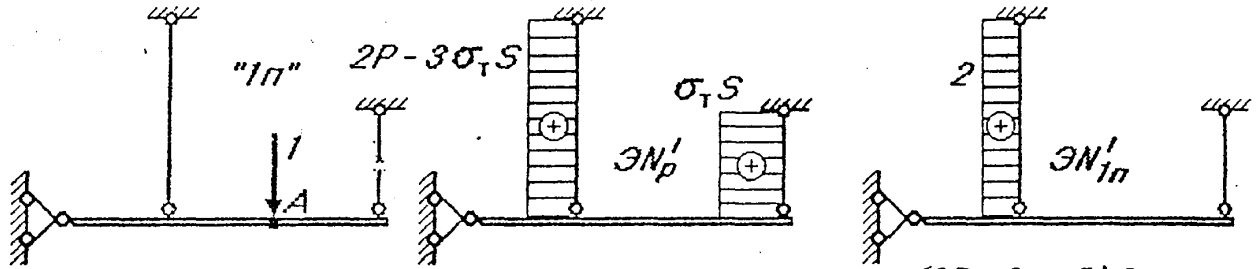
Первый стержень остается упругим и ограничивает рост пластических деформаций. Система в этом состоянии становится статически определимой, т.к.  $N_2 = \sigma_T S$  - известна.



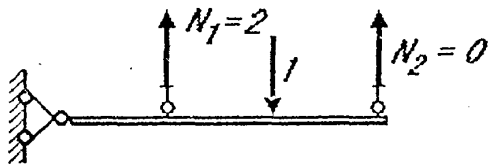
$$\sum M_B = N_1 \cdot a - P \cdot 2a + \sigma_T S \cdot 3a = 0; N_1 = 2P - 3\sigma_T S;$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{2P - 3\sigma_T S}{2S}; \sigma_2 = \sigma_T \quad (3)$$

Перемещения в упруго-пластическом состоянии определяются деформациями упругих элементов. Для определения перемещений в единичную систему желательно не включать пластически деформированные элементы.



$$\Delta_{pp} = (\sum N'_{1п}) \times (\sum N_2) = \frac{(2P - 3\sigma_T S) \cdot 2}{E \cdot 2S} \cdot 2l$$

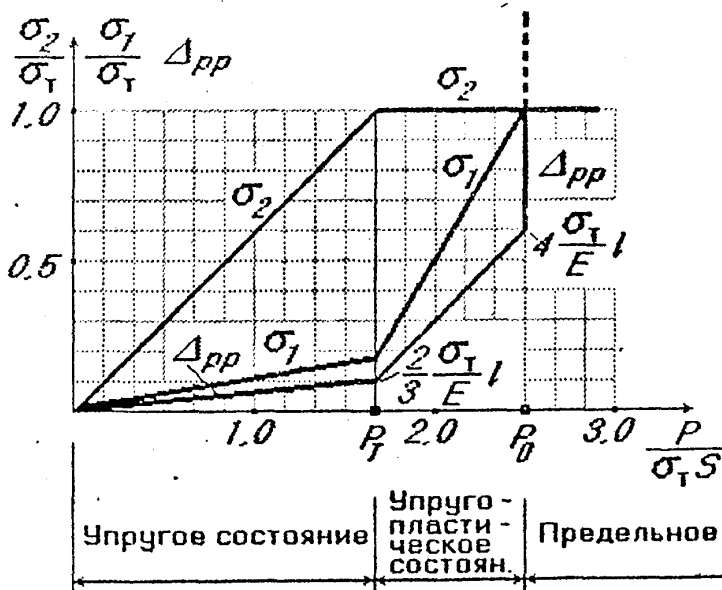


$$\Delta_{pp} = \frac{2P - 3\sigma_T S}{ES} \cdot 2l \quad (4)$$

Выражения (3) и (4) сохраняются до  $P = P_0$ , при которой напряжения в первом достигнут предела текучести:  $\sigma_1 = \sigma_T = const$ .

$$\sigma_1 = \frac{2P_0 - 3\sigma_T S}{2S} = \sigma_T; 2P_0 = \sigma_T 2S + 3\sigma_T S; P_0 = 2.5\sigma_T S;$$

$$\Delta_{pp} = \frac{2P - 3\sigma_T S}{ES} \cdot 2l = \frac{2 \cdot 2.5\sigma_T S - 3\sigma_T S}{ES} \cdot 2l = 4 \frac{\sigma_T}{E} l;$$



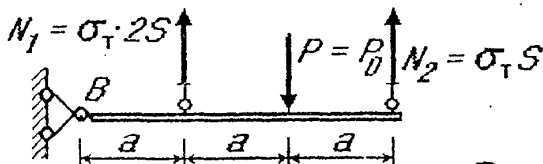
3. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ - наступит при  $P = P_0$ , когда  $\sigma_1 = \sigma_T$ . В этом состоянии деформации системы будут неограниченно ВОЗРАСТАТЬ и система превратит - в механизм (потеря геометрической неизменяемости).

$P_0$  - предельная или разрушающая нагрузка, при которой конструкция превращается в механизм.

Нагрузка	$N_1$	$N_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\Delta_{pp}$
0-исходное состояние	0	0	0	0	0
$0 < P < P_T$ все стержни работают упруго	$\frac{1}{5}P$	$\frac{3}{5}P$	$0.1\frac{P}{S}$	$0.6\frac{P}{S}$	$\frac{2Pl}{5ES}$
$P = P_T$ $P_T = \frac{5}{3}\sigma_T S$ начало пластического деформирования	$\frac{1}{3}\sigma_T S$	$\sigma_T S$	$\frac{1}{6}\sigma_T$	$\sigma_T$	$\frac{2\sigma_T l}{3E}$
$P_T < P < P_0$ стержень 2 пластически деформируется, стержень 1 - упругий.	$2P - 3\sigma_T S$	$\sigma_T S$	$\frac{2P - 3\sigma_T S}{ES}$	$\sigma_T$	$\frac{2P - 3\sigma_T S}{ES} 2l$
$P = P_0$ $P_0 = 2.5\sigma_T S$ начало пластического деформирования стержня 1	$2\sigma_T S$	$\sigma_T S$	$\sigma_T$	$\sigma_T$	$4\frac{\sigma_T l}{E}$

**ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ**

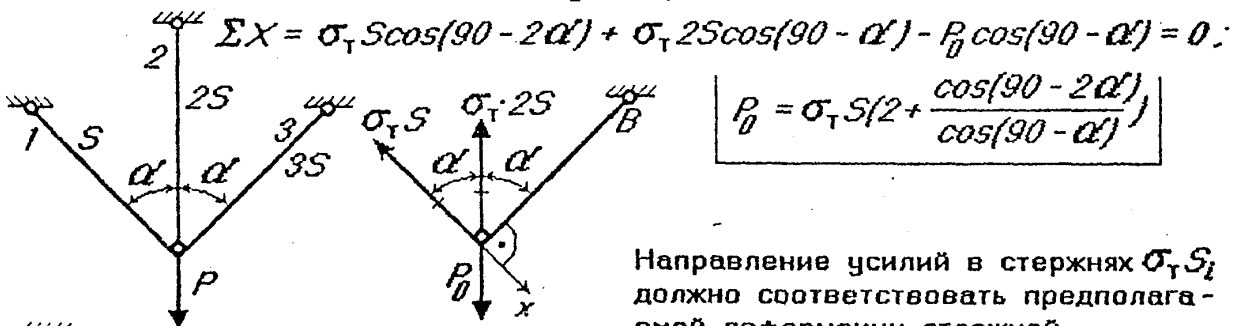
Предельное состояние системы при  $P = P_0$  характеризуется превращением ее в механизм.



$$\sum M_B = \sigma_T \cdot 2S \cdot a - P_0 \cdot 2a + \sigma_T S \cdot 3a = 0:$$

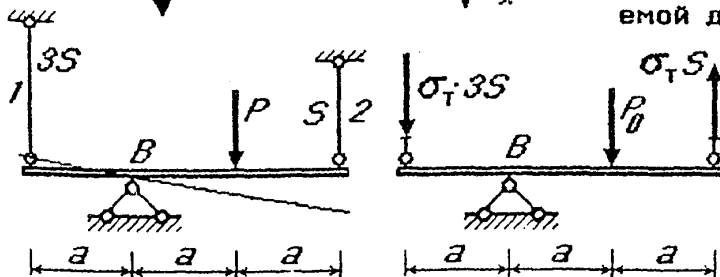
$$P_0 = 2.5\sigma_T S$$

Потекут стержни 1 и 2:



$$P_0 = \sigma_T S \left( 2 + \frac{\cos(90 - 2\alpha)}{\cos(90 - \alpha)} \right)$$

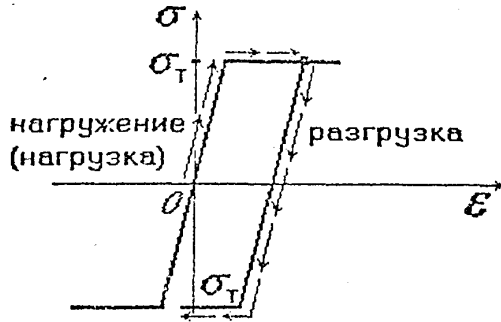
Направление усилий в стержнях  $\sigma_T S_i$  должно соответствовать предполагаемой деформации стержней.



$$\sum M_B = \sigma_T \cdot 3S \cdot a - P_0 \cdot a + \sigma_T S \cdot 2a = 0:$$

$$P_0 = 5\sigma_T S$$

ЗАКОН РАЗГРУЗКИ УПРУГО - ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ



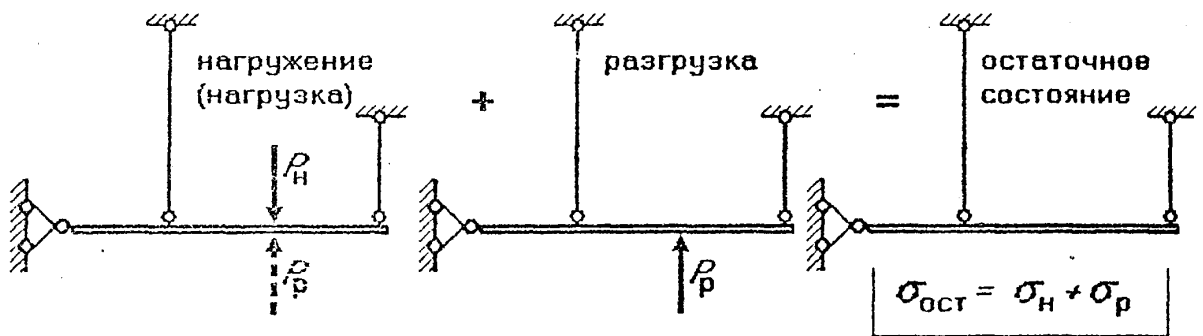
При нагружении (нагрузке) -  $\sigma_H \leq \sigma_T$

При разгрузке -  $\sigma_p = \sigma_{Tp} + \sigma_{Tc} = 2\sigma_T$

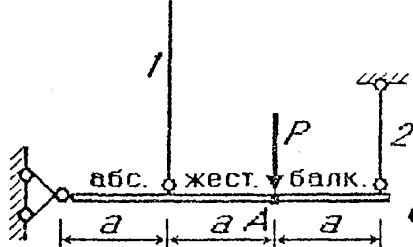
$$\sigma_p \leq 2\sigma_T$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Остаточные напряжения возникают в системе после разгрузки. Процесс разгрузки эквивалентен приложению внешней силы равной силе нагрузки, но обратной ей по знаку.



Пример:



Дано:  
 $l_1 = 2l; l_2 = l;$   
 $S_1 = 2S; S_2 = S;$   
 $E_1 = E_2 = E; a$   
 $\sigma_T; P = 2.0\sigma_T S;$

1) Упругое состояние:

$$0 < P < P_T;$$

$$\sigma_1 < \sigma_T; \sigma_2 < \sigma_T;$$

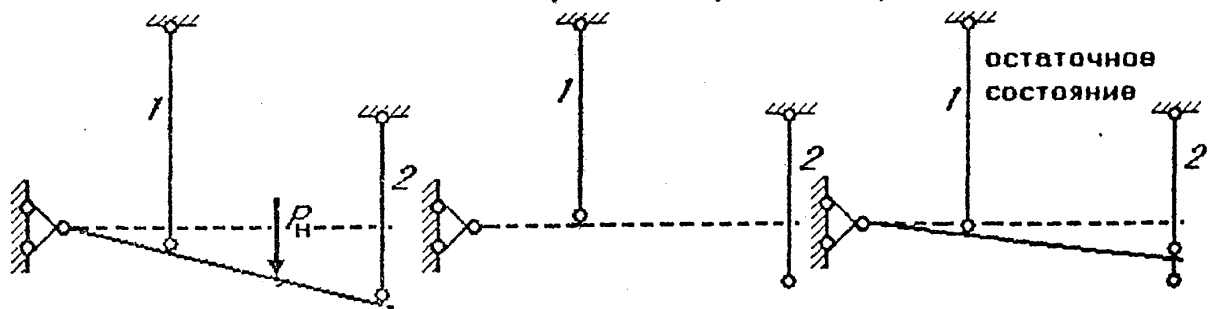
$$\sigma_{ост} = 0;$$

3) Предельное состояние - разрушение:

$$P > P_D;$$

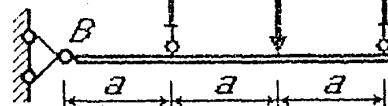
2) Упруго-пластическое состояние:  $P_T < P < P_D;$

$$1.67\sigma_T S < 2.0\sigma_T S < 2.5\sigma_T S;$$



1) Определяем напряжения при нагружении  $\sigma_H$ :  $P_H = 2\sigma_T S;$

$$\sigma_H^{(1)} 2S \uparrow \quad P_H = 2\sigma_T S \downarrow \quad \sigma_T S \uparrow \quad \Sigma M_B = \sigma_H^{(1)} 2S \cdot a - 2\sigma_T S \cdot 2a + \sigma_T S \cdot 3a = 0;$$



$$\sigma_H^{(2)} = \sigma_T; \quad \sigma_H^{(1)} = 0.5\sigma_T;$$

2) Определяем напряжения при разгрузке  $\sigma_p$ :  $P_p = -2\sigma_T S$ :

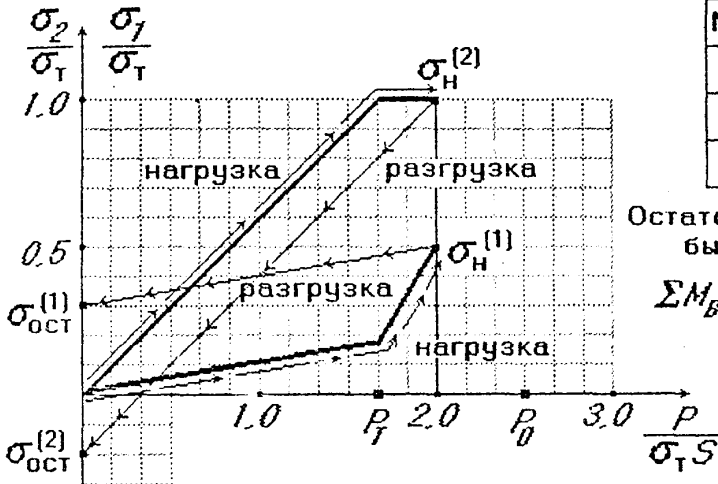
Разгрузка происходит упруго  $\sigma_p \leq 2\sigma_T$ :

Используем упругое решение задачи.

$$\sigma_p^{(1)} = 0.1 \frac{P_p}{S} = 0.1 \frac{(-2.0\sigma_T S)}{S} = -0.2\sigma_T$$

$$\sigma_p^{(2)} = 0.6 \frac{P_p}{S} = 0.6 \frac{(-2.0\sigma_T S)}{S} = -1.2\sigma_T$$

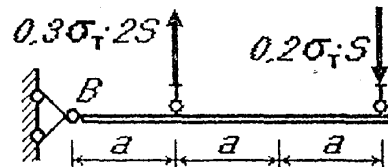
3) Определяем остаточные напряжения:  $\sigma_{ост} = \sigma_H + \sigma_p$



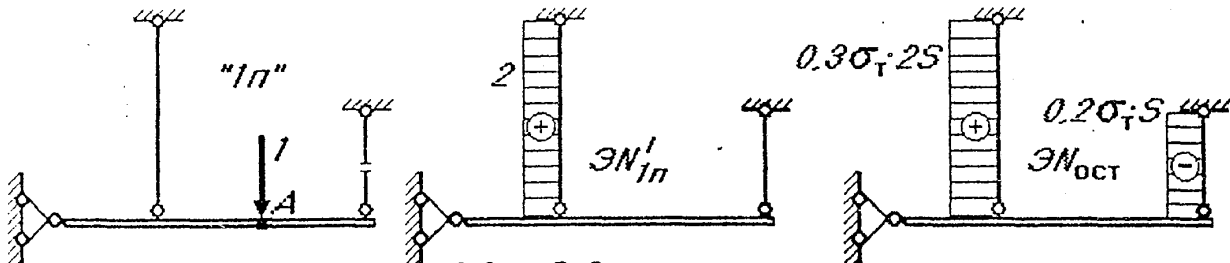
№ стержня	1	2
$\sigma_H$	$0.5\sigma_T$	$\sigma_T$
$\sigma_p$	$-0.2\sigma_T$	$-1.2\sigma_T$
$\sigma_{ост}$	$+0.3\sigma_T$	$-0.2\sigma_T$

Остаточные усилия (напряжения) должны быть САМОУРАВНОВЕШЕННЫМИ.

$$\Sigma M_B = 0.3\sigma_T \cdot 2S \cdot a - 0.2\sigma_T \cdot S \cdot 3a = 0$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ



$$\Delta_{ост}^{(A)} = (\Delta N_{1n}') (\Delta N_{ост}) = \frac{0.6\sigma_T S \cdot 2}{E \cdot 2S} \cdot 2l = 1.2 \frac{\sigma_T}{E} l$$

Нагрузка	$N_1$	$N_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\Delta_{pp} = \Delta_A$
$P = 2.0\sigma_T S$ - исходное состояние	$0.5\sigma_T \cdot 2S$	$\sigma_T S$	$0.5\sigma_T$	$\sigma_T$	$2 \frac{\sigma_T}{E} l$
$P = 2.0\sigma_T S - \bar{P}$ - уменьшение нагрузки, все стержни работают упруго	$0.5\sigma_T \cdot 2S - 0.2\bar{P}$	$\sigma_T S - 0.6\bar{P}$	$0.5\sigma_T - 0.1 \frac{\bar{P}}{S}$	$\sigma_T - 0.6 \frac{\bar{P}}{S}$	$2 \frac{\sigma_T}{E} l - \frac{2\bar{P}l}{5ES}$
$P = 0$ остаточные усилия, напряжения, перемещения	$0.6\sigma_T S$	$-0.2\sigma_T S$	$0.3\sigma_T$	$-0.2\sigma_T$	$1.2 \frac{\sigma_T}{E} l$

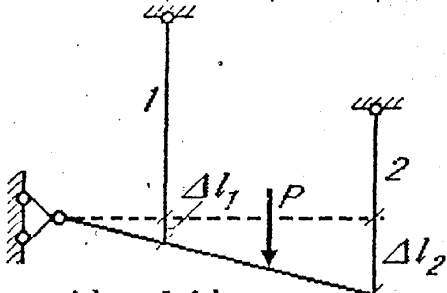
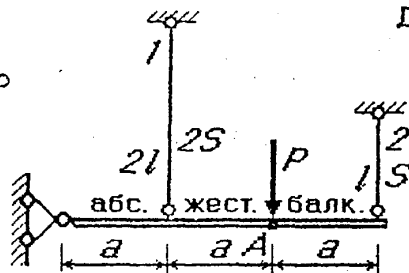
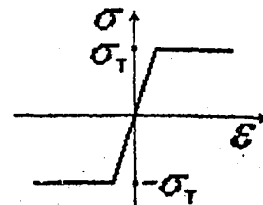
ПОВТОРНОЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ

Дано:  $a, l, E, S, \sigma_T$   
 $-P_0 < P < P_0$

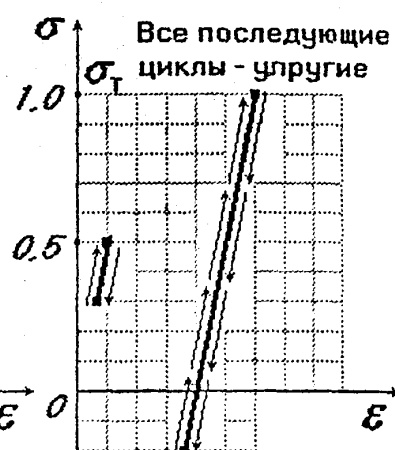
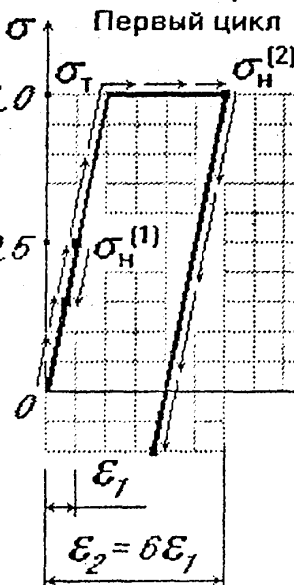
1)  $0 \leq P \leq 2\sigma_T S$ :

$\sigma_H^{(1)} = 0.5\sigma_T; \sigma_H^{(2)} = \sigma_T$

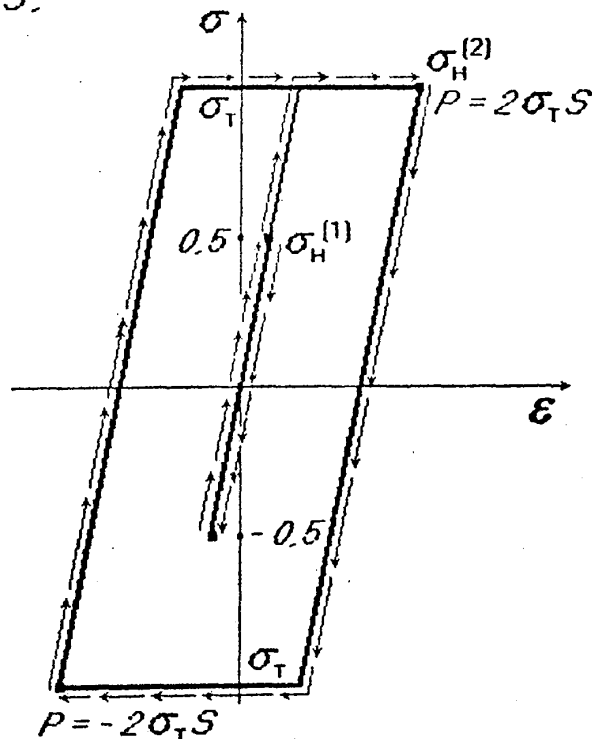
$\sigma_P^{(1)} = -0.2\sigma_T; \sigma_P^{(2)} = -1.2\sigma_T$



$\Delta l_2 = 3\Delta l_1$   
 $\epsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_1}{2l}$   
 $\epsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{3\Delta l_1}{l}$   
 $\epsilon_2 = 6\epsilon_1$

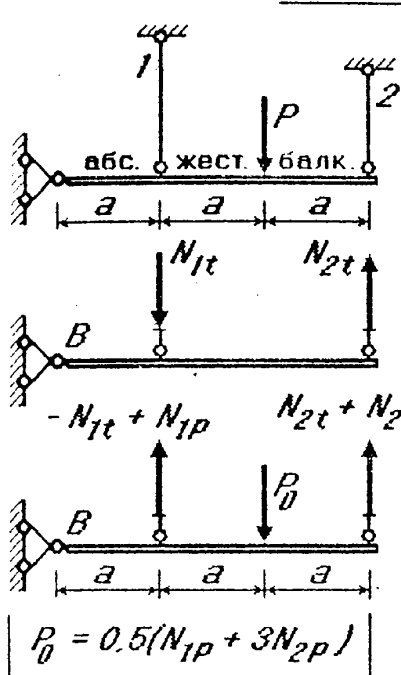


2)  $-2\sigma_T S \leq P \leq 2\sigma_T S$ :



ВЛИЯНИЕ САМОУРАВНОВЕШЕННЫХ (тепловых, монтажных, остаточных) НАПРЯЖЕНИЙ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ( $P_0$ )

Дано:  $a, l, E, S, \sigma_T, \Delta t, \alpha$



$P_0 = ?$

$$\Sigma M_B = -N_{1t} \cdot a + N_{2t} \cdot 3a = 0; \quad -N_{1t} + N_{2t} \cdot 3 = 0;$$

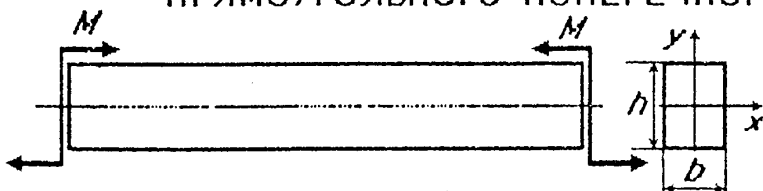
$$\Sigma M_B = (-N_{1t} + N_{1p}) \cdot a - P_0 \cdot 2a + (N_{2t} + N_{2p}) \cdot 3a = 0;$$

$$2P_0 = (-N_{1t} + N_{2t} \cdot 3) + N_{1p} + 3N_{2p};$$

$$P_0 = 0.5(N_{1p} + 3N_{2p})$$

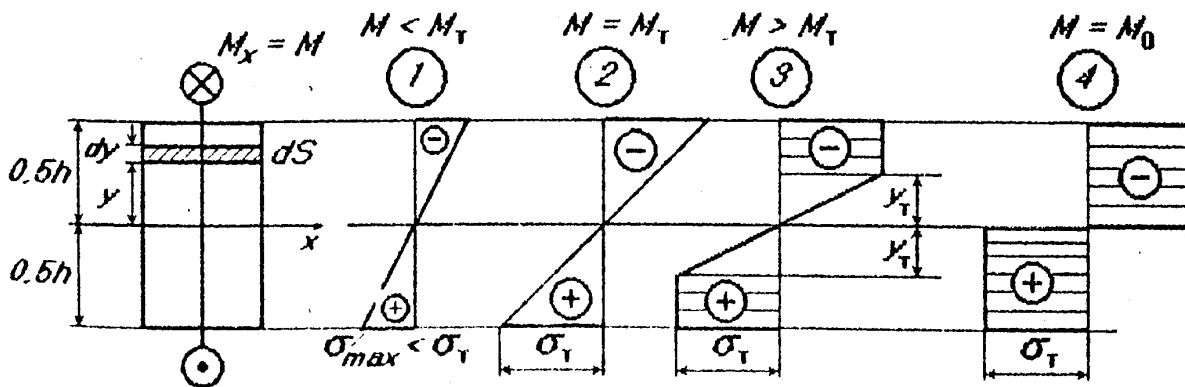
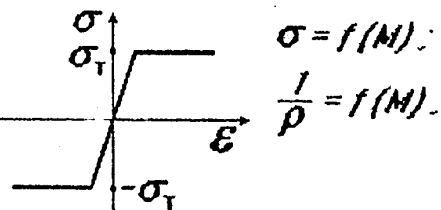
Предельная нагрузка при однократном нагружении от самоуравновешенных напряжений НЕ ЗАВИСИТ.

УПРУГО - ПЛАСТИЧЕСКИЙ ЧИСТЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ



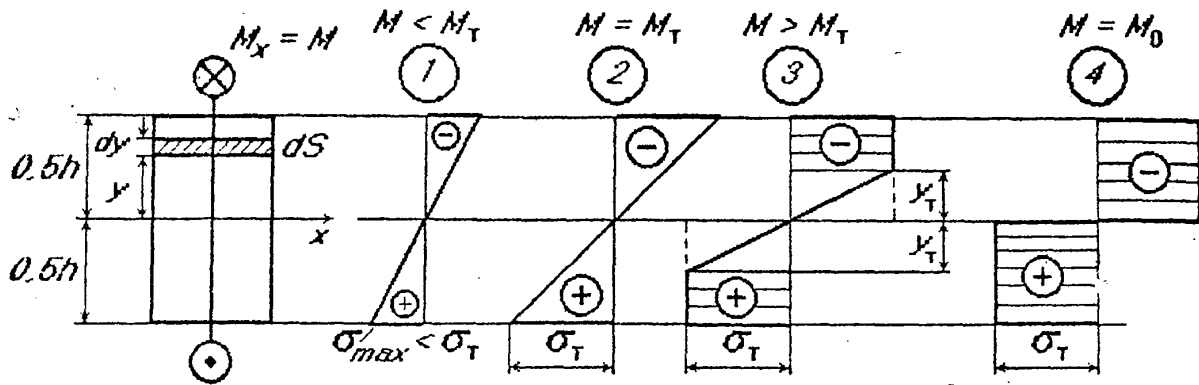
Дано:  
 $M, b \times h, \sigma_{Тр} = \sigma_{Тс} = \sigma_T$   
 $0 \leq M \leq M^*$

- 1) Сечение имеет две оси симметрии;
- 2) Нейтральная ось совпадает с осью  $x$ ;
- 3) Диаграммы растяжения и сжатия одинаковы:



© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях не допускается без согласия автора





1. В упругом состоянии:  $\sigma = \frac{M}{I_x} y$ ;  $\sigma_{max} = \frac{M}{W_x}$ ;  $W_x = \frac{bh^2}{6}$

2. Фибровая текучесть:  $\sigma_{max} = \frac{M_T}{W_x} = \sigma_T$ ;  $M_T = \sigma_T W_x$

3. Упруго-пластическое состояние:  $M = \int_S \sigma dS \cdot y = \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma y b dy$ ;  $dS = b \cdot dy$

$$M = \sigma_T \cdot b \cdot 0.5h \cdot 0.25h \cdot 2 - \sigma_T \cdot 0.5b y_T \frac{y_T}{3} \cdot 2$$

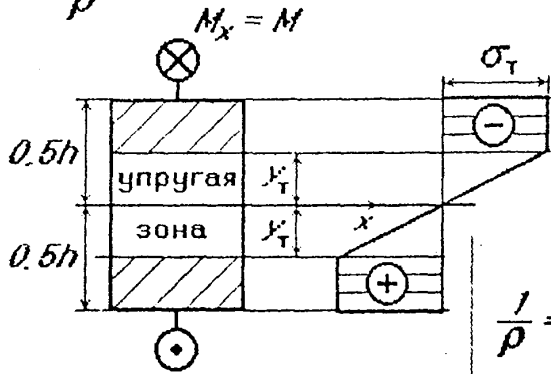
$$M = \sigma_T \frac{bh^2}{4} - \sigma_T \frac{by_T^2}{3} \quad (1)$$

4. Если  $y_T = 0$ ,  $M_0 = \sigma_T \frac{bh^2}{4}$  (2)

$$M = M_0 - \sigma_T \frac{by_T^2}{3} \quad (1^*)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ (M) И КРИВИЗНОЙ СТЕРЖНЯ ( $\frac{1}{\rho}$ )

$\epsilon = \frac{y}{\rho}$  - гипотеза плоских сечений сохраняется при пластических деформациях:



В упругой зоне:  $y_T = \epsilon_T \rho = \frac{\sigma_T}{E} \rho$  (3)

$$M = \sigma_T \frac{bh^2}{4} - \sigma_T \frac{by_T^2}{3} = \sigma_T \frac{bh^2}{4} - \sigma_T \frac{b}{3} \frac{\sigma_T^2}{E^2} \rho^2$$

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \sigma_T^3 \frac{b}{E^2}}{\sigma_T \frac{bh^2}{4} - M}} \quad (4) \quad M \Rightarrow \sigma_T \frac{bh^2}{4} = M_0$$

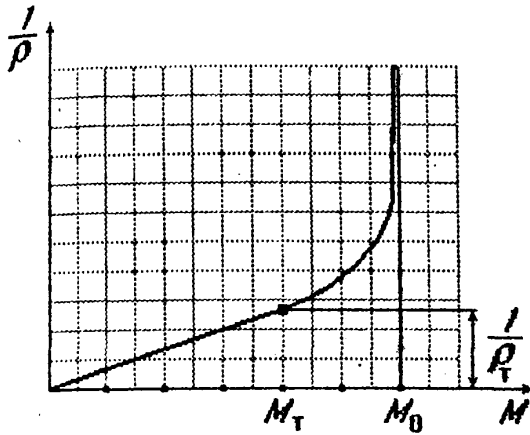
$$\frac{1}{\rho} \Rightarrow \infty; \rho \Rightarrow 0$$

ПРИМЕНИМОСТЬ И ОГРАНИЧЕНИЯ формулы (4)

1. Упругое состояние:  $y_T \geq 0.5h$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x} = \frac{M}{Ebh^3} \quad (5) \quad M_T = \sigma_T W_x = \sigma_T \frac{bh^2}{6}$$

$$\frac{1}{\rho_T} = \frac{12 M_T}{Ebh^3} = \frac{12 \sigma_T bh^2}{Ebh^3 \cdot 6} \quad \frac{1}{\rho_T} = \frac{2 \sigma_T}{Eh}$$



Ограничения слева:  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}$

$M = M_T = \sigma_T W_x = \sigma_T \frac{bh^2}{6}$ ;  $\frac{1}{\rho_T} = \frac{2\sigma_T}{Eh}$

Ограничения справа:

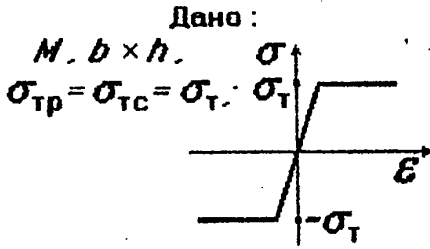
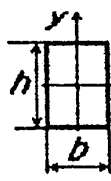
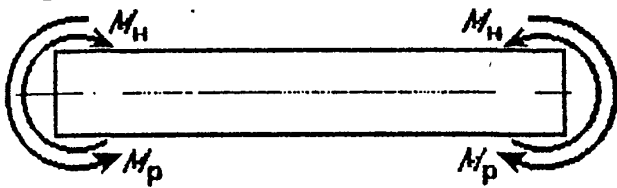
$M = M_0 = \sigma_T \frac{bh^2}{4}$

$\frac{1}{\rho} \Rightarrow \infty$ ;  $\rho \Rightarrow 0$

$0 \leq M \leq M_T$   $M > M_T$   $0 \leq M \leq M_0$

$\frac{1}{\rho_T} = \frac{2\sigma_T}{Eh}$

ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ОСТАТОЧНАЯ КРИВИЗНА СТЕРЖНЯ



1) Упругое состояние:  $M \leq M_T$

$\sigma < \sigma_T$ ;  $\sigma_{ост} = 0$

2) Предельное состояние - разрушение:  $M \geq M_0$

$M \geq M_0$

$\sigma_{ост} = ?$   $\frac{1}{\rho_{ост}} = ?$

3)  $M_T \leq M \leq M_0$ : Напряжения нагрузки:

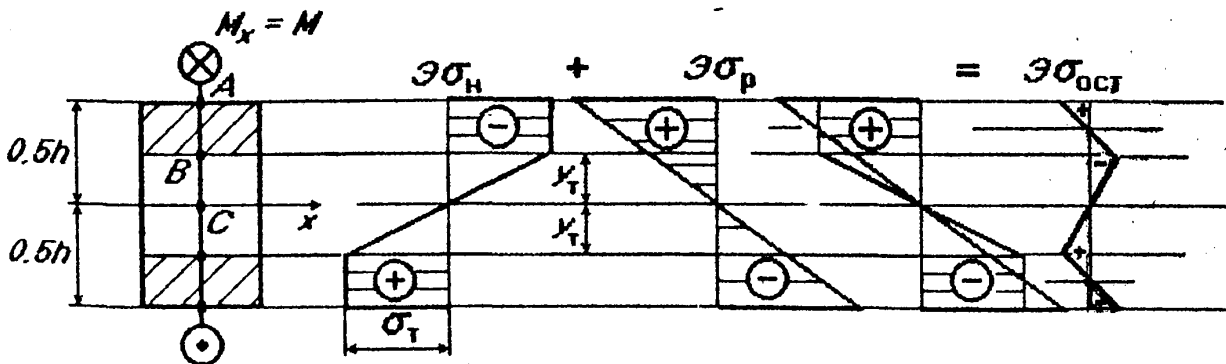
$\sigma_H^A = -\sigma_T$ ;  $\sigma_H^B = -\sigma_T$ ;  $\sigma_H^C = 0$

Напряжения разгрузки:

$\sigma_P^A = \frac{M_P}{W_x} = \frac{M \cdot b}{bh^2}$ ;  $\sigma_P^B = \frac{M_P}{I_x} y_T = \frac{12M}{bh^3} y_T$ ;  $\sigma_P^C = 0$

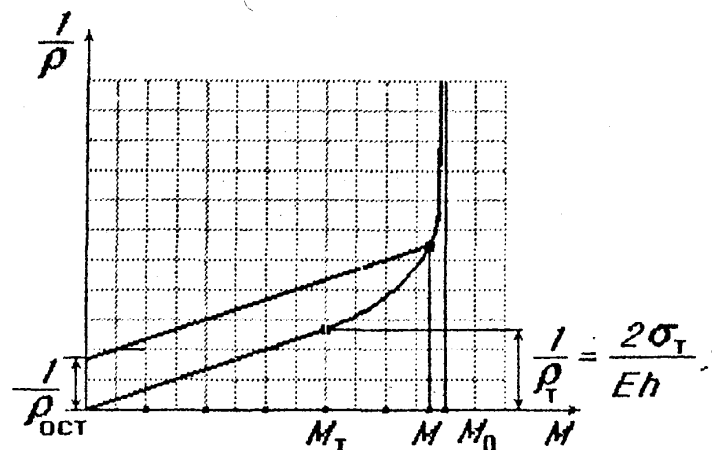
Остаточные напряжения:

$\sigma_{ост} = \sigma_H + \sigma_P$   $\sigma_{ост}^A = -\sigma_T + \frac{M \cdot b}{bh^2}$ ;  $\sigma_{ост}^B = -\sigma_T + \frac{12M}{bh^3} y_T$ ;  $\sigma_{ост}^C = 0$



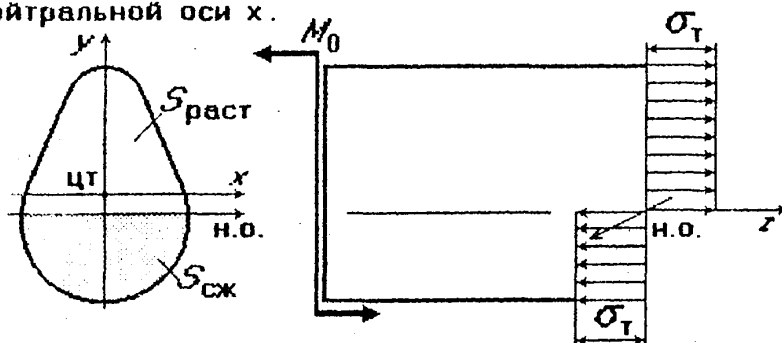
3)  $M_T \leq M \leq M_0$  : Остаточная кривизна :

$$\frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{1}{\rho_H} - \frac{1}{\rho_p} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \sigma_T^3 \frac{b}{E^2}}{\sigma_T \frac{bh^2}{4} - M} - \frac{12M}{Ebh^3}}$$



### ХАРАКТЕРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА ( $M_T$ и $M_0$ ) ПРИ ПРЯМОМ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим стержень с поперечным сечением симметричным относительно оси  $y$  (плоскость действия нагрузки) и несимметричным относительно нейтральной оси  $x$ .



- 1 В упругом состоянии нейтральная ось  $x$  проходит через центр тяжести сечения.
- 2 В упруго - пластическом состоянии нейтральная ось (н.о.) получает параллельное смещение. Чтобы определить положение н.о. в предельном состоянии, нужно составить для внутренних сил уравнения равновесия :

$$\sum Z = \int_{S_{\text{раст}}} \sigma_T dS - \int_{S_{\text{сж}}} \sigma_T dS = 0; \quad \sigma_T S_{\text{раст}} - \sigma_T S_{\text{сж}} = 0; \quad S_{\text{раст}} = S_{\text{сж}}$$

В предельном состоянии стержня н.о. делит поперечное сечение на две равные по площади части и не проходит через его центр тяжести.

$M_0$  - можно найти из второго уравнения равновесия :




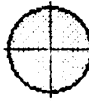
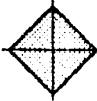
$$\sum M_{н.о.} = M_0 - \int_{S_{раст}} \sigma_T y ds - \int_{S_{сж}} \sigma_T y ds = 0; \quad M_0 = \sigma_T \int_{S_{раст}} y ds + \sigma_T \int_{S_{сж}} y ds = 0;$$

$$M_0 = \sigma_T (S_{н.о.}^{раст} + S_{н.о.}^{сж}) = \sigma_T W_{пл};$$

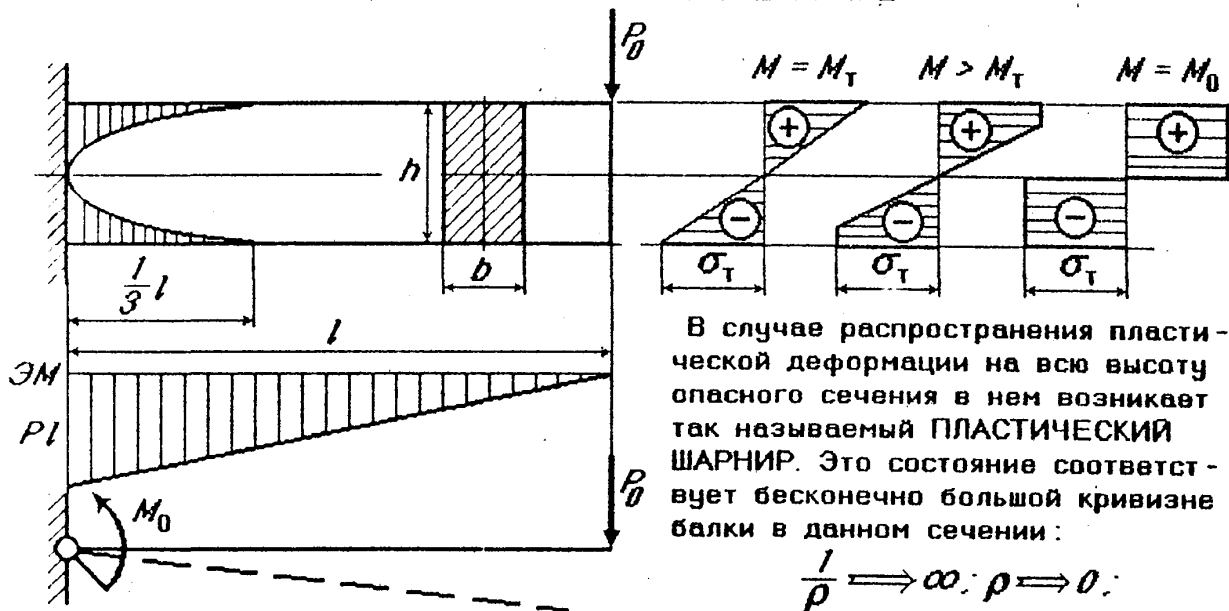
$S_{н.о.}^{раст}$  и  $S_{н.о.}^{сж}$  - статические моменты площадей растянутой и сжатой зон сечения относительно нейтральной оси (н.о.);

$W_{пл} = S_{н.о.}^{раст} + S_{н.о.}^{сж}$  - пластический момент сопротивления поперечного сечения.

Таким образом имеем:  $M_T = \sigma_T W_X$  ;  $M_0 = \sigma_T W_{пл}$  ;  $\frac{M_0}{M_T} = \frac{W_{пл}}{W_X}$ .

Форма сечения					
$\frac{W_{пл}}{W_X}$	1.15...1.17	1.27	1.5	1.7	2.0

ПОНЯТИЕ О ПЛАСТИЧЕСКОМ ШАРНИРЕ



Образование пластического шарнира в опасном сечении приводит к потере геометрической неизменяемости балки. Пластический шарнир, как и действительный уменьшает число связей в заданной системе на единицу, но в отличие от действительного шарнира имеет свои особенности:

- а) момент в нем не равен нулю, а равен предельному изгибающему моменту,
- в) пластический шарнир является односторонним, т.е. он исчезает при перемене знака нагрузки, потому что при разгрузке материал ведет как упругий.

© Все права на материалы принадлежат ЮУРГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

## ОСНОВЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ РАВНОВЕСИЮ ( по ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ )

Расчетное усилие  $P_{max}$ , которое можно безопасно приложить к системе, должно удовлетворять условию прочности:

$$P_{max} \leq \frac{P_0}{[n]}$$

где  $P_0$  - предельная нагрузка (разрушающая нагрузка)

$[n]$  - нормированный коэффициент запаса прочности.

### МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК:

- а) кинематический метод,
- б) статический метод.

### КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Способ расчета, состоящий в определении наименьшей величины предельной нагрузки при рассмотрении различных схем разрушения конструкций ( превращение системы в механизм ), профессор А. А. Гвоздев предложил называть КИНЕМАТИЧЕСКИМ.

Применяя кинематический метод необходимо:

- 1) выявить все кинематически возможные схемы разрушения конструкции ( системы )
- 2) для каждого механизма разрушения составить уравнения предельного равновесия.

Действительной формой разрушения будет та, которая соответствует **НАИМЕНЬШЕМУ ЗНАЧЕНИЮ** предельной нагрузки.

Уравнения предельного равновесия могут быть составлены, например, в виде уравнений статики или виртуальных (возможных) работ.

Пример:

1) Потекут стержни 1 и 2:

$$\sum M_C = \sigma_T \cdot S \cdot 2a + \sigma_T \cdot 2S \cdot a - P_0^{(1)} \cdot 2a = 0;$$

$$P_0^{(1)} = 2 \sigma_T S$$

2) Потекут стержни 1 и 3:

$$\sum M_B = \sigma_T \cdot S \cdot a + \sigma_T \cdot 3S \cdot a - P_0^{(2)} \cdot 3a = 0;$$

$$P_0^{(2)} = \frac{4}{3} \sigma_T S$$

3) Потекут стержни 2 и 3:

$$\sum M_A = \sigma_T \cdot 2S \cdot a + \sigma_T \cdot 3S \cdot 2a - P_0^{(3)} \cdot 4a = 0;$$

$$P_0^{(3)} = \frac{4}{3} \sigma_T S$$

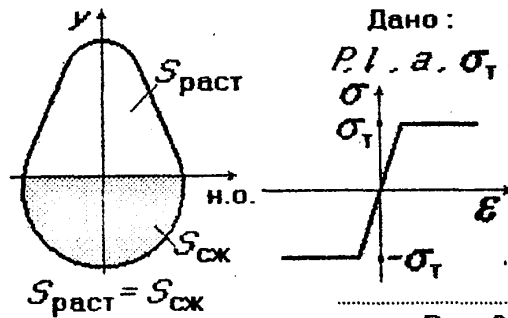
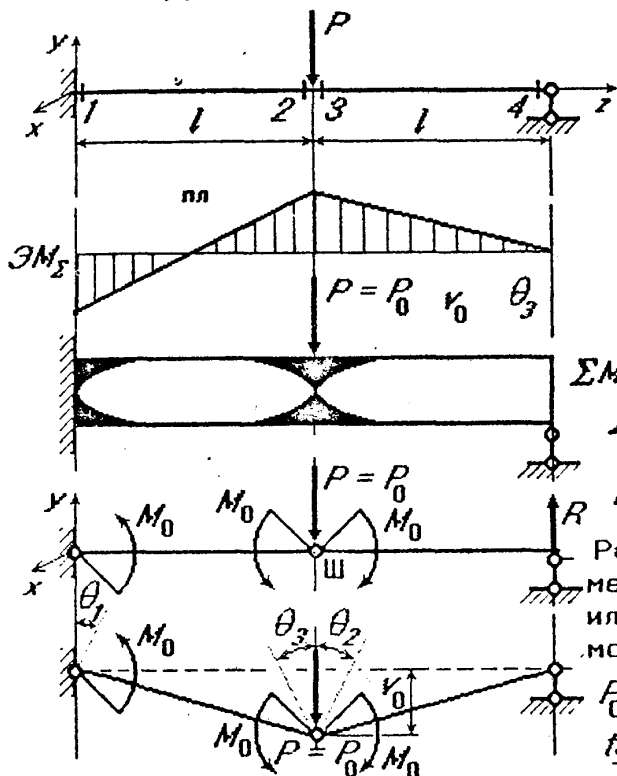
Рассмотрим возможные механизмы разрушения:

- 1) Потекут стержни 1 и 2;
- 2) Потекут стержни 1 и 3;
- 3) Потекут стержни 2 и 3;

Дано:  $S, l, a, \sigma_T$

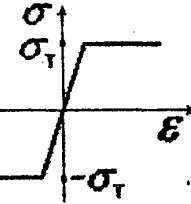
$P_0^{(1)} P_0 = ?$

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ



Дано:

$P, l, a, \sigma_T$



$\Sigma M_{ш}^{пр} = M_0 - R \cdot l = 0, R = \frac{M_0}{l}, P_0 = ?$

$\Sigma M_A = P_0 \cdot l - R \cdot 2l - M_0 = 0:$

$P_0 = \frac{3M_0}{l}$

$P_0 \cdot l = \frac{M_0}{l} \cdot 2l + M_0:$

Работа внешних усилий на возможных перемещениях в предельном состоянии меньше или равна работе внутренних усилий на возможных пластических перемещениях

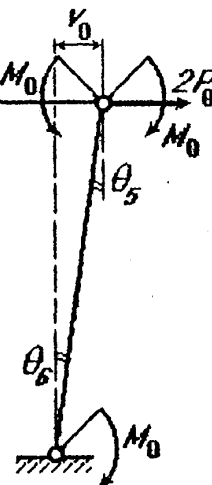
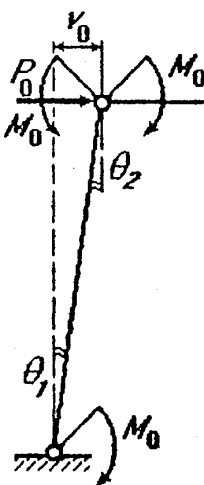
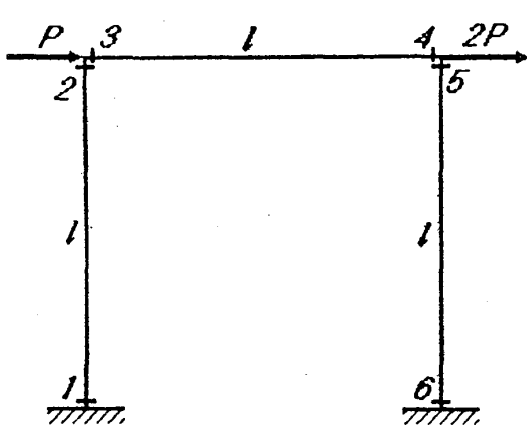
$P_0 \cdot y_0 = M_0 \theta_1 + M_0 \theta_2 + M_0 \theta_3:$

$P_0 = \frac{3M_0}{l}$

$tg \theta_1 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{y_0}{l}:$

$M_0 = \sigma_T W_{пл} = \sigma_T (S_{н.о.}^{раст} + S_{н.о.}^{сж}): P_0 = \frac{3\sigma_T W_{пл}}{l} = \frac{3\sigma_T}{l} (S_{н.о.}^{раст} + S_{н.о.}^{сж})$

ПЛОСКАЯ РАМА:



$n = 6 - 3 = 3;$

$\omega = n + 1 = 3 + 1 = 4;$

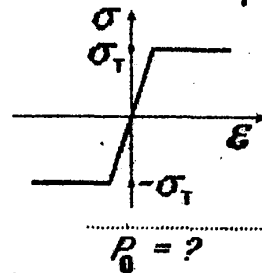
$P_0 \cdot y_0 + 2P_0 \cdot y_0 = M_0 \theta_1 + M_0 \theta_2 + M_0 \theta_5 + M_0 \theta_6:$

$tg \theta_1 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_5 = \theta_6 = \frac{y_0}{l}; \theta_3 = \theta_4 = 0:$

$3P_0 y_0 = 4M_0 \theta_1; P_0 = \frac{4}{3} \frac{M_0}{l} \quad M_0 = \sigma_T W_{пл}.$

Дано:

$l, S, \sigma_T$



$P_0 = ?$

©Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

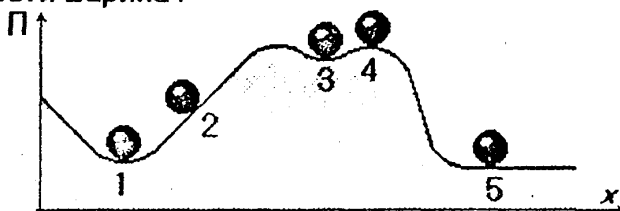
Раздел устойчивости в механике деформируемых тел весьма специфичен.

1. УСТОЙЧИВЫЕ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ

Форма равновесия статически нагруженной конструкции называют УСТОЙЧИВОЙ, если малым возмущениям соответствуют малые отклонения от этой формы.



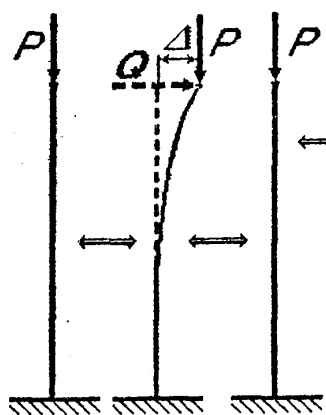
Качество равновесия легко увидеть на примере весоного шарика, лежащего на поверхности рельефа. Здесь  $\Pi$  - высота рельефа, как функция координаты  $x$ ; одновременно это потенциальная энергия положения шарика, поделенная на силу тяжести шарика.



Равновесие соблюдается в четырех из пяти положений и каждое из этих четырех положений качественно отличаются друг от друга.

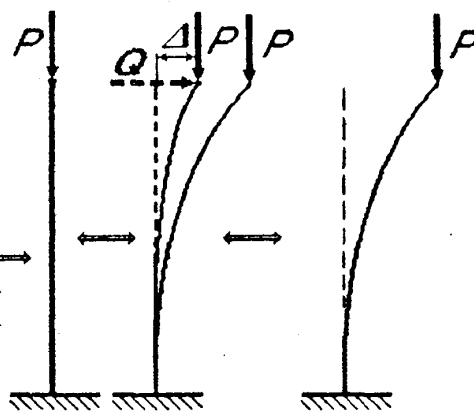
Положение 1 (наиболее типичное для механических систем) - устойчивое равновесие (устойчивая форма равновесия для деформируемых систем - как, например, при растяжении стержня).

Положение 3 - "устойчивое" в малом равновесие; оно в механике не изучается. Малые возмущения не нарушают рав-

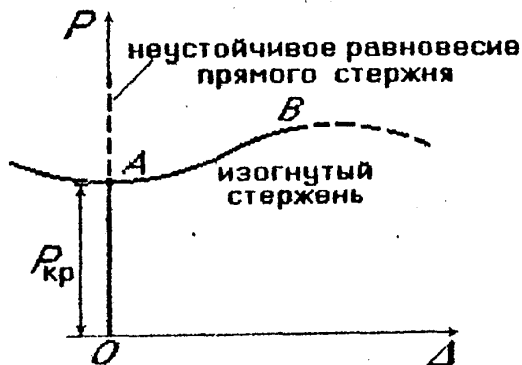


При малых значениях силы  $P$  прямолинейная форма равновесия сжатого стержня (стойки) - устойчива.

При больших значениях силы  $P$  устойчива криволинейная форма равновесия стержня.



При определенном значении силы  $P$  происходит разветвление форм равновесия - потеря устойчивости по Эйлеру.



OA - прямолинейная форма равновесия - устойчивая;

AB - криволинейная форма равновесия - устойчивая;

т. А - точка БИФУРКАЦИИ (точка разветвления форм равновесия).

Нагрузка, при которой происходит переход из одной формы равновесия в другую (потеря устойчивости), называется КРИТИЧЕСКОЙ ( $P_{кр}$ )

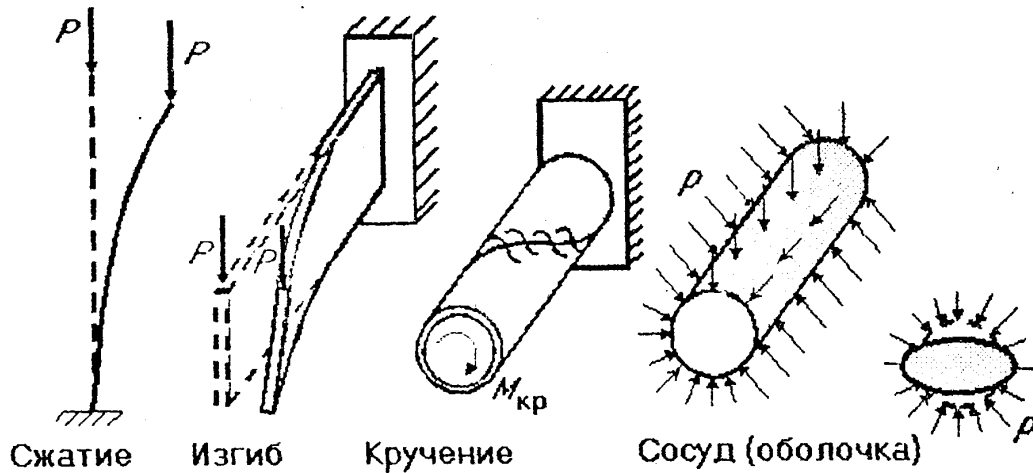
Потеря устойчивости - состояние предшествующее разрушению.

Условие устойчивости:

$$P \leq \frac{P_{кр}}{[n]_y}, \quad [n]_y = 1.5 \dots 2.0.$$

Потеря устойчивости по Эйлеру наиболее распространенный случай проявления неустойчивости.

Потеря устойчивости наиболее опасна для тонкостенных конструкций - которые с точки зрения прочности и жесткости наиболее рациональны.



## 2. МЕТОД ЭЙЛЕРА

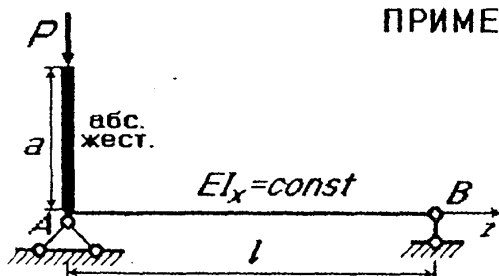
Для определения критической силы ( $P_{кр}$ ) применяются метод Эйлера или энергетический метод.

ОСНОВНАЯ ИДЕЯ МЕТОДА ЭЙЛЕРА:

Предполагают, что смежная, качественно новая форма равновесия существует; тогда из уравнений равновесия, характеризующих эту форму, определяют нагрузку, при которой новая форма равновесия становится возможной.

ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ:

1. Идеализация геометрии системы и способа нагружения.
2. Материал - идеально упругий.
3. Малые перемещения - линеаризация задачи  $P = P_{кр}$ .
4. Силы тяжести конструкции не учитываются.
5. Нагрузка "мертвая", т.е. не меняет направление при переходе в смежное состояние.



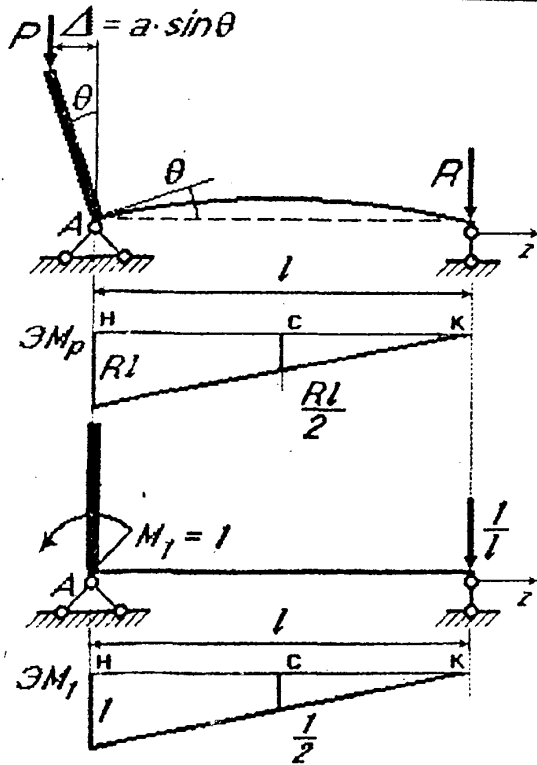
ПРИМЕР:

Дано:

$$a. l. EI_x = \text{const}$$

$$P_{кр} = ?$$





Запишем уравнение равновесия для деформированной системы:

$$\Sigma M_A = 0: \quad \Sigma M_A = P \cdot \Delta - R \cdot l = 0;$$

Неизвестные:  $\Delta = ?$   $R = ?$

Угол поворота  $\theta$  определим с помощью метода Мора:

$$\begin{aligned} \theta &= (\mathcal{E}M_p) * (\mathcal{E}M_1) = \\ &= \frac{l}{6EI_x} (M_p^H M_1^H + 4M_p^C M_1^C + M_p^K M_1^K) = \\ &= \frac{l}{6EI_x} (Rl \cdot 1 + 4 \frac{Rl}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0); \\ \theta &= \frac{Rl^2}{3EI_x}; \quad R = \frac{3EI_x \theta}{l^2}; \quad \Delta = a \cdot \sin \theta = a \theta; \end{aligned}$$

Подставим  $\Delta$  и  $R$  в уравнение равновесия:

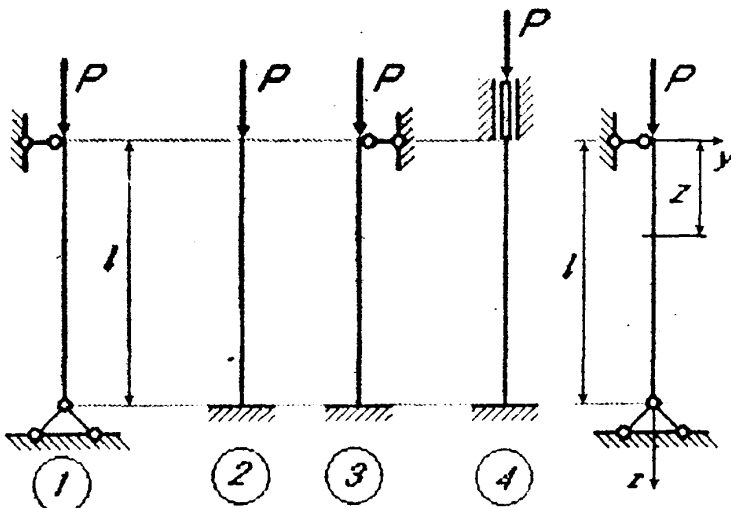
$$Pa\theta - \frac{3EI_x \theta}{l^2} \cdot l = 0;$$

$$P_{кр} = \frac{3EI_x}{a l}$$

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Впервые (1744 г.) задачу об упругой устойчивости сжатых стержней решил Леонард Эйлер.

Возможны разные способы закрепления стержня:



Основной случай закрепления концов стержня

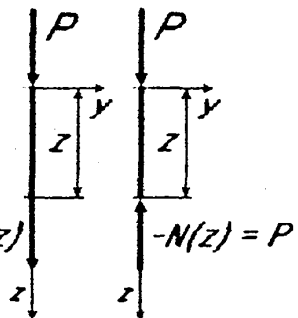
$$\begin{aligned} \Sigma Z = P + N(z) &= 0; \\ -N(z) &= P; \\ v(z) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Определим при каких условиях возможна криволинейная форма равновесия.

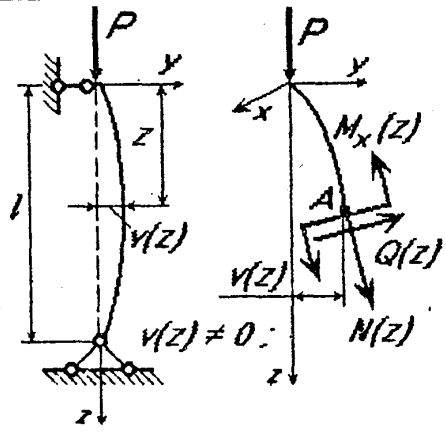
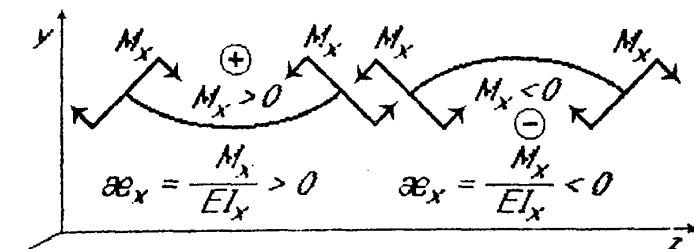
Рассмотрим формы равновесия одного из участков стержня для которого

$$N = P = const;$$

1. Прямолинейная форма равновесия:



2. Криволинейная форма равновесия:  
Обозначения и правило знаков:



Отметим, что все внутренние силовые факторы и перемещения показаны положительными.  
Запишем условие равновесия:

$$\sum M_A = P \cdot v(z) + M_x(z) = 0 \quad (1) \quad M_x(z) = -P \cdot v(z) \quad (1^*)$$

Критическую силу определим из дифференциального уравнения упругой изогнутой оси ( $\sigma = E\varepsilon$ ).

$$\frac{1}{\rho} = \varphi_x = \frac{M_x}{EI_x} \quad (2); \quad \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}}; \quad v' = \frac{dv(z)}{dz} \quad v'' = \frac{d^2v(z)}{dz^2}$$

При малых перемещениях  $v(z)$  имеем:

$$EI_x v''(z) = M(z) \quad (3). \quad \text{Выражение } (1^*) \text{ в } (3): \quad EI_x v''(z) + P v(z) = 0 \quad (4)$$

$$v''(z) + k^2 v(z) = 0, \quad (\text{здесь } k^2 = \frac{P}{EI_x} \quad (5))$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Т.к. корни характеристического уравнения  $\pm ik$ , то решение ищем в следующем виде:

$$v''(z) + k^2 v(z) = 0, \quad (\text{здесь } k^2 = \frac{P}{EI_x} \quad (5))$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Т.к. корни характеристического уравнения  $\pm ik$ , то решение ищем в следующем виде:

$$v(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz \quad (6)$$

Функция прогибов (6) должна удовлетворять граничным условиям:  
при  $z = 0, v(0) = 0; 0 = C_1 \sin k \cdot 0 + C_2 \cos k \cdot 0; 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1; C_2 = 0,$

при  $z = l; v(l) = 0; 0 = C_1 \sin kl$  отсюда: а)  $C_1 = 0; \sin kl \neq 0; v(z) = 0$  и переход в прямолинейную форму равновесия;

б)  $C_1 \neq 0; \sin kl = 0; kl = \pi \cdot n$ , где  $n \in Z_0$  (множество всех не отрицательных целых чисел 1,2,3,...)

С учетом (5) получим все собственные значения решаемой задачи:

$$k^2 = \frac{P}{EI_x} = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}; \quad P = \frac{\pi^2 n^2 EI_x}{l^2}; \quad (7) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

При этих значениях возможна криволинейная форма упругого равновесия сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами.

Форма изогнутой оси стержня:

$$v(z) = C_1 \sin kz = C_1 \sin \frac{\pi \cdot n}{l} z, \quad (8) \quad n - \text{число полуволин синусоиды.}$$

Критическое значение силы  $P_{min}$  при  $n = 1$ :

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} \quad (9) \quad (\text{формула Эйлера - Эйлерава сила})$$

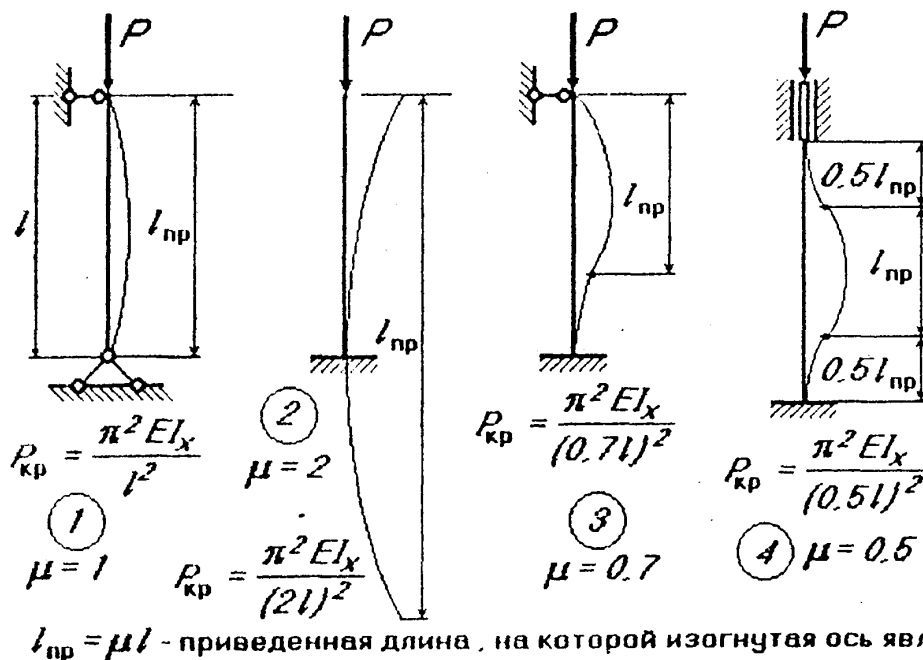
© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

Анализ решения :

1. Определяется точное значения  $P_{кр}$
2. Перемещения  $v(z) = C_1 \sin \frac{\pi \cdot n}{l} z$ , определены с точностью до  $C_1$ , которое не определяется.
3. При  $P > P_{кр}$  ( $\pi < kl < 2\pi$ ),  $\sin kl \neq 0$ , но  $C_1 \sin kl = 0$ , т.е.  $C_1 = 0$  или  $v(z) = 0$ , что противоречит смыслу. Неопределенность и противоречивость решения связано с допущением о малости перемещений (линеаризация задачи). После потери устойчивости перемещения стремительно возрастают и использовать допущения о малости перемещений недопустимо.
4. При определении значения  $P = P_{кр}$  происходит раздвоение форм равновесия (точка бифуркации) - потеря устойчивости по Эйлеру.

4. ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Задача определения критических сил ( $P_{кр}$ ) при других условиях закрепления решается аналогичным образом, используя граничные условия. Однако это можно обойти, рассмотрев характер упругой линии изогнутых стержней.



$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} \quad (10)$$

обобщенная формула Эйлера

$l_{пр} = \mu l$  - приведенная длина, на которой изогнутая ось является полуцелой синусоиды  
 $\mu$  - коэффициент приведения длины стержня. Это число, показывающее во сколько раз необходимо изменить длину рассматриваемого стержня, чтобы критическая сила его равнялась бы критической силе шарнирно опертого стержня.

©Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

## 5. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Для нахождения границы применимости обобщенной формулы Эйлера (10) найдем критическое напряжение в стойке (стойка в безразличном состоянии испытывает чистое сжатие):

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{S} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2 S} = \frac{\pi^2 E i_x^2}{(\mu l)^2} \quad (11)$$

где  $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$  - радиус инерции сечения (геометрическая характеристика сечения)  
Размерность [М, СМ]

Обозначим  $\lambda = \frac{\mu l}{i_x}$  - гибкость стержня - величина безразмерная - характеризует условия закрепления и размеры сжатого стержня.

Тогда  $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = f(\lambda)$  - формула Эйлера (гипербола Эйлера).

Решение Эйлера справедливо в пределах упругости (закона Гука):

$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$  - предел пропорциональности ( $\sigma_{пцс} = \sigma_{пцр} = \sigma_{пц}$ )

$$\bar{\sigma}_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{пред}^2} = \sigma_{пц} \quad \lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}} \quad \text{т.о. предельная гибкость зависит только от свойств материала}$$

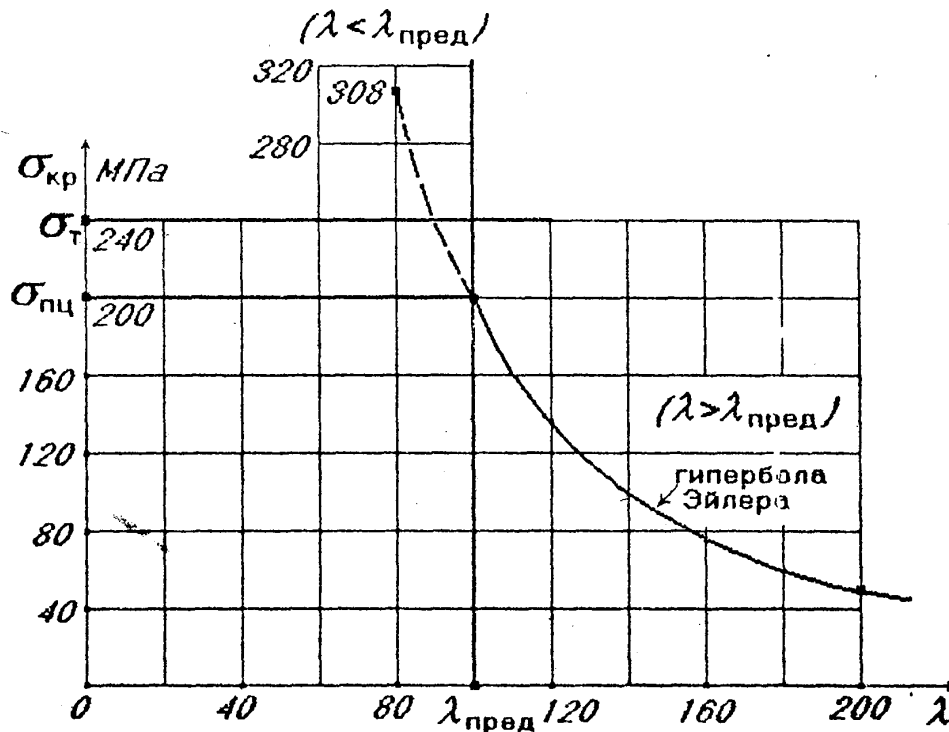
Для малоуглеродистой стали:  $\sigma_{пц} = 200 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100$$

Если для реального стержня  $\lambda = 80$ , то

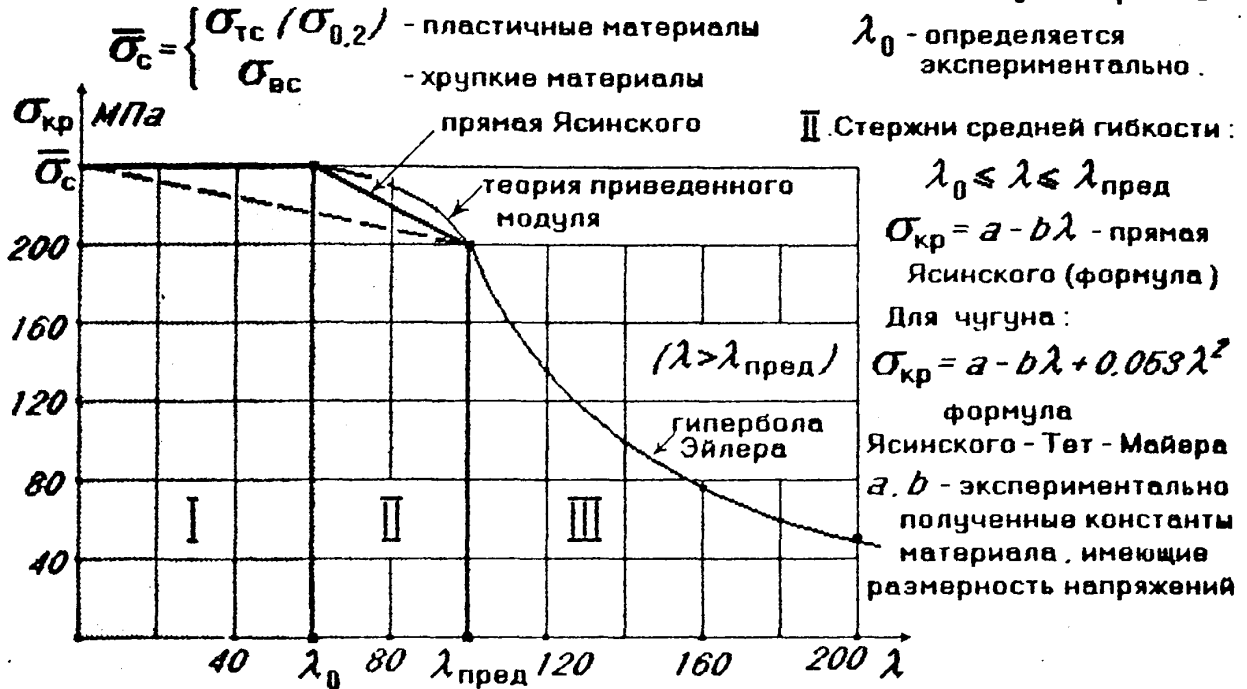
$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{80^2} = 308 \text{ МПа} > \sigma_T$$

За пределом упругости ( $\lambda < \lambda_{пред}$ ) формулой Эйлера пользоваться нельзя.



### 6. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

В настоящее время сделаны различные теоретические разработки (теория приведенного модуля (Энгессора - Кармана), метод Шенли). Однако на практике используются результаты экспериментальных исследований (Ясинского, Тет - Майера, Энгессора и др.). Различают: I. Стержни малой гибкости ( $\lambda \leq \lambda_0$ ):  $\sigma_{кр} = \bar{\sigma}_c$



Для стержней (I и II - гибкости) можно принять (штриховая линия)

$$\sigma_{кр} = \bar{\sigma}_c - (\bar{\sigma}_c - \sigma_{пц}) \frac{\lambda}{\lambda_{пред}} \qquad \sigma_{кр} = \bar{\sigma}_c - (\bar{\sigma}_c - \sigma_{пц}) \frac{\lambda}{\lambda_{пред}}$$

Материал	Сталь Ст2. 15	Сталь Ст3	Сталь Ст5. 30	Дерево	Чугун
$\sigma_{т. МПа}$	216	235	275	—	—
$\lambda_{пред}$	105	100	90	76	80
$\lambda_0$	62	61	57	—	—
$a, МПа$	259	304	343	28	761
$b, МПа$	0.69	1.12	1.13	0.19	11.8

III Стержни большой гибкости. теряют устойчивость в пределах упругости и  $\sigma_{кр}$  определяется по формуле Эйлера:

$$\lambda > \lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}} \qquad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

По  $\sigma_{кр}$  вычисляется  $R_{кр} = \sigma_{кр} \cdot S$

$$P \leq \frac{R_{кр}}{[n]_y}$$

**6. РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ**

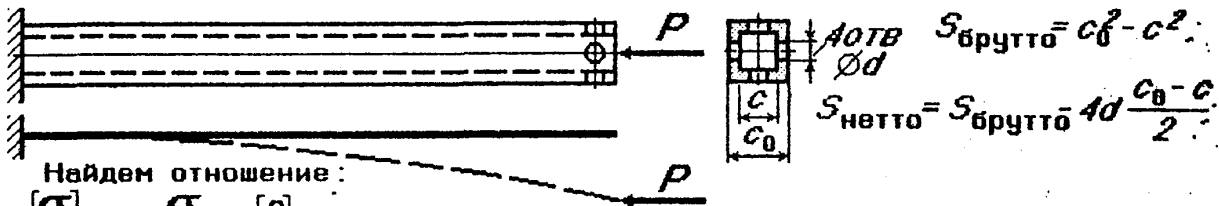
Условие устойчивости:

$$P \leq \frac{R_{кр}}{[n]_y} = \frac{\sigma_{кр} \cdot S}{[n]_y} \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{P}{S_{брутто}} \leq [\sigma]_y \quad [\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{[n]_y}$$

Одновременно должно выполняться и условие прочности:

$$\max \sigma = \frac{P}{S_{нетто}} \leq [\sigma] \quad [\sigma] = \frac{\bar{\sigma}}{[n]}$$

Ослабление сечения мало влияет на величину  $\sigma_{кр}$ , но снижают прочность.



Найдем отношение:

$$\frac{[\sigma]_y}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр} [n]}{[n]_y \bar{\sigma}} = \varphi(\lambda) \quad \text{коэффициент снижения основного допускаемого напряжения - определяется нормами прочности и обычно } \varphi(\lambda) < 1.$$

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma]$$

Условия устойчивости и прочности:

$$\sigma = \frac{P}{S_{брутто}} \leq \varphi[\sigma] \quad \text{и} \quad \max \sigma = \frac{P}{S_{нетто}} \leq [\sigma]$$

Если местных ослаблений сечений нет, то второе условие не нужно.

**РАСЧЕТ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ  $\varphi$**

**А. ПРОВЕРОЧНЫЙ РАСЧЕТ:**

$$n = \frac{R_{кр}}{P} = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma} \leq [n]_y \quad [n]_y = 1.5 \dots 2.5 \quad (\text{зависит от гибкости } \lambda)$$

$$n = \frac{\bar{\sigma}}{\max \sigma} \leq [n] \quad [n] = 1.3 \dots 1.8$$

**Б. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСТИМОЙ НАГРУЗКИ:**

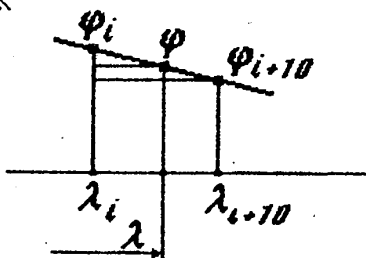
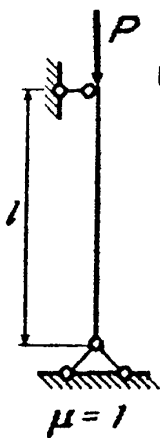
Дано: Заданы размеры стержня и способ закрепления:

$$S, I_x, I_y, E, \mu, \bar{\sigma}, [n]$$

$P = ?$  из расчета на устойчивость

$$\sigma = \frac{P}{S_{брутто}} \leq \varphi[\sigma] \quad [\sigma] = \frac{\bar{\sigma}}{[n]} \quad \lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{\mu l}{\sqrt{I_{min}/S}}$$

$\varphi = \varphi(\lambda)$  - находят по таблицам



$$\varphi = \varphi_i - \frac{\varphi_i - \varphi_{i+10}}{10} (\lambda - \lambda_i)$$

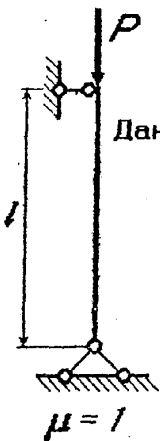
линейная интерполяция

$$\begin{cases} P = \varphi[\sigma] S_{брутто} \\ P = [\sigma] S_{нетто} \end{cases}$$

$$[P] = \min P$$

РАСЧЕТ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ  $\varphi$

В. ПОДБОР РАЗМЕРОВ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ - МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ



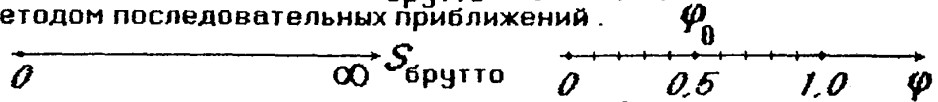
Дано: Заданы форма поперечного сечения стержня и способ закрепления:

$$S, l, I_x, I_y, E, \mu, \bar{\sigma} [\sigma]$$

$h \times b = ?$  из расчета на устойчивость

Условия устойчивости:  $\sigma = \frac{P}{S_{\text{брутто}}} \leq \varphi[\sigma]$

- две неизвестных величины ( $S_{\text{брутто}}$  и  $\varphi = \varphi(\lambda)$ ) и задача решается методом последовательных приближений.



Нулевое приближение - задаваясь  $\varphi_0 = 0.5$ , определяют  $S_0$

$$S_0 = \frac{P}{\varphi_0[\sigma]} = \frac{P}{0.5[\sigma]}$$

и вычисляют  $i_0 = \sqrt{\frac{I_0}{S_0}} \rightarrow \lambda_0 = \frac{\mu l}{i_0} \rightarrow \varphi_0^T$  - табличное значение

Сравниваем  $\varphi_0 \leftrightarrow \varphi_0^T$  (погрешность должна быть не более  $\delta \leq 5\%$ )

Если  $\delta > 5\%$ , тогда  $\varphi_1 = \frac{\varphi_0 + \varphi_0^T}{2}$  - первое приближение:

$$S_1 = \frac{P}{\varphi_1[\sigma]}$$

вычисляют  $i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{S_1}} \rightarrow \lambda_1 = \frac{\mu l}{i_1} \rightarrow \varphi_1^T$  - табличное значение  $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_1^T$

(определяют погрешность и если  $\delta \leq 5\%$  - процесс приближений закончен)

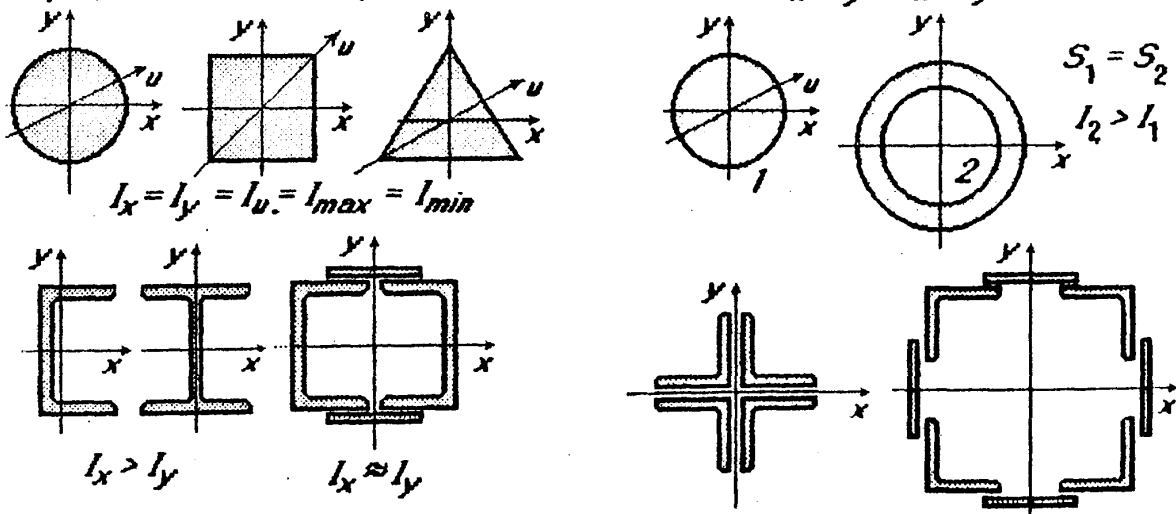
7. ВЫБОР МАТЕРИАЛА И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

1. Для стержней большой гибкости ( $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ ) применяют дешевые малоуглеродистые стали, т.к.

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, E = (20 \dots 21) \cdot 10^5 \text{ МПа} - \text{ для большинства сталей}$$

2. Для стержней малой и средней гибкостью целесообразно применять высокопрочные стали, т.к.  $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$  где  $a$  и  $b$  зависят от прочности материала.

При одинаковых условиях закрепления стержня в разных плоскостях форма сечения рациональна, если при  $S = \text{const}$  имеем  $\max(I_x, I_y), I_x = I_y$  и  $I_{\text{max}} \approx I_{\text{min}}$



**ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА  
РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ С УЧЕТОМ СИЛ ИНЕРЦИИ;  
ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА Д'АЛАМБЕРА**

- А. СТАТИЧЕСКОЕ** действие нагрузок - медленно изменяющиеся нагрузки - ускорение частиц тела практически равны нулю - сил инерции нет.
- Б. НАЛИЧИЕ УСКОРЕНИЯ ЧАСТИЦ** рассматриваемого тела характеризует воздействие динамической нагрузки. При ускоренном движении частей конструкции (тела) в них возникают добавочные (а иногда и основные) вполне реальные напряжения, которые эквивалентны статическим напряжениям, вызванные силами инерции.

Правила определения напряжений в конструкции, элементы которой испытывают ускорения:

1. Вычислить ускорения элементов конструкции.
2. Определить силы инерции (виртуальные или фиктивные)  $P_{ин} = -m \cdot a$ , где  $m$  и  $a$  - масса и ускорение элементов конструкции.
3. Конструкцию загрузить внешними силами и силами инерции (используя принцип Д'Аламбера).
4. Далее вести расчет, как будто на элемент действует статическая нагрузка.

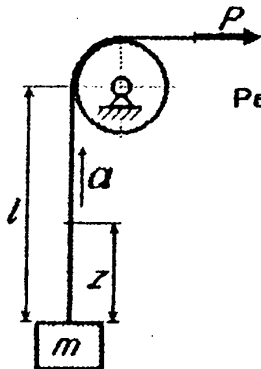
**СЛЕДУЕТ РАЗЛИЧАТЬ 3 СЛУЧАЯ:**

1. Действие внешних сил не зависит от деформации элементов и деформации не меняют характер движения стержня (принцип начальных размеров). Воздействие динамических усилий сводится к добавочной статической нагрузке соответствующими силами инерции.
2. Если при движении (под действием внешних сил) ускорения будут меняться, то возникнут колебания элементов конструкции, которые могут дать явления резонанса.
3. Третий случай (удар), когда величина ускорений и сил инерции будет зависеть от деформируемости конструкции. В этом случае при вычислении сил инерции необходимо использовать данные сопротивления материалов.

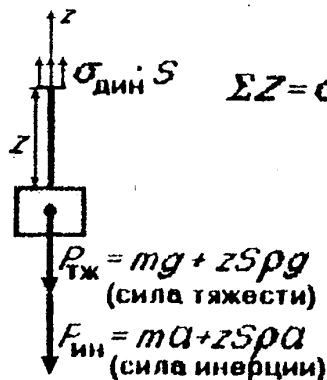
**ПРИМЕРЫ** вычисления напряжений при равноускоренном движении, не вызывающее колебаний элементов конструкции.

**Пример 1.** Дано:  $m$ ,  $a$ ,  $l$ ,  $S$  и  $\rho$  - длина, площадь поперечного сечения и плотность материала каната

$\sigma_{дин} = ?$



Расчетная схема

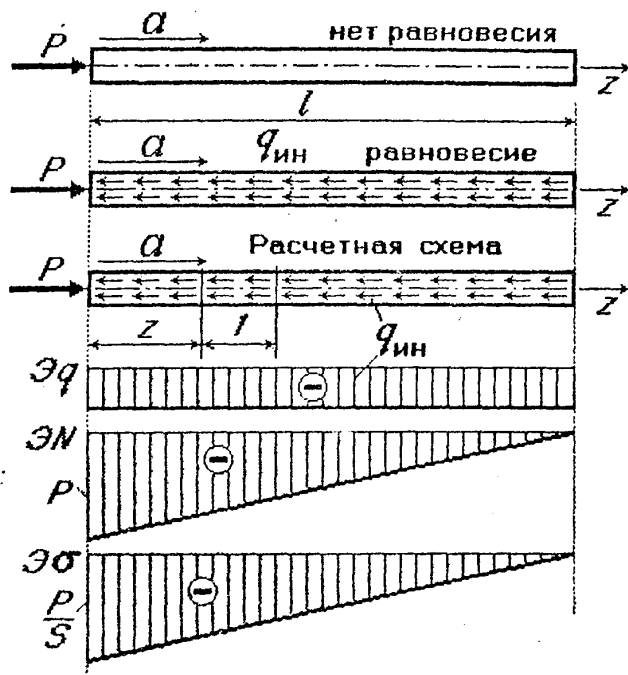


$$\sum Z = \sigma_{дин} S - (m + zSp)g - (m + zSp)a = 0;$$

$$\sigma_{дин} = \frac{m + zSp}{S} g \left(1 + \frac{a}{g}\right)$$



Пример 2. Стержень длиной  $l$ , постоянного поперечного сечения  $S$  и плотностью материала  $\rho$  под действием силы  $P$  движется равноускоренно.



Дано:  $m, l, S, \rho, P$

$\sigma_{дин} = ?$

$P_{ин} = -ma; a = \frac{P}{m}$

Ускорение  $a$  направлено в сторону действия силы  $P$ .

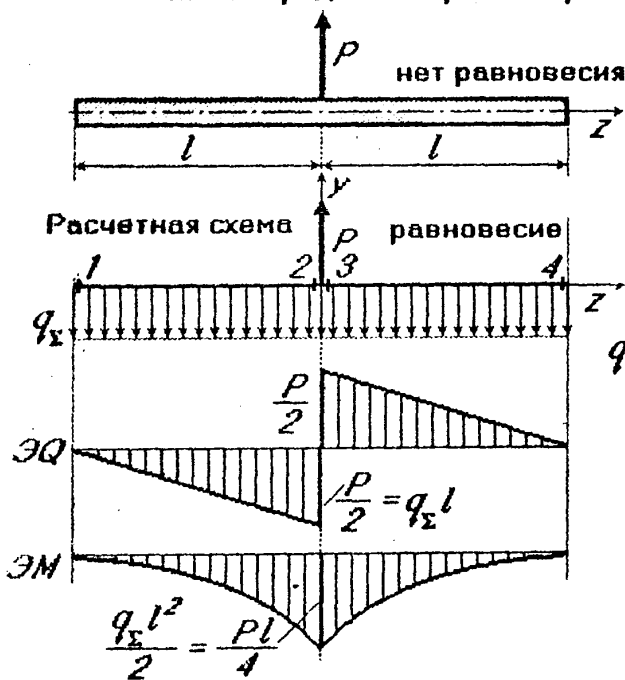
$m = \rho \cdot Sl = \rho \cdot V$  и  $V = Sl$   
масса и объем стержня

$q_{ин}$  - погонная сила инерции (сила инерции на единицу длины)

$q_{ин} = m_1 a = 1 \cdot S \rho a = \frac{S \rho P}{\rho \cdot Sl}$

$q_{ин} = \frac{P}{l}; \sigma_{max} = -\frac{P}{S}$

Пример 3. Горизонтальный стержень длиной  $2l$ , постоянного поперечного сечения  $S$  и плотностью материала  $\rho$  поднимается вверх силой  $P$ , приложенной посредине стержня и превышающей силу тяжести стержня.



Дано:  $P, l, S$  и  $\rho$

$\sigma_{дин} = ?$

$q_{\Sigma} = q_{тж} + q_{ин}$  - интенсивность полной погонной нагрузки состоит из интенсивности силы тяжести и интенсивности инерционной нагрузки

$\Sigma Y = P - q_{\Sigma} 2l = P - (q_{тж} + q_{ин}) 2l = 0$

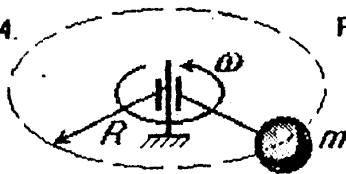
$q_{тж} = m_1 g = 1 \cdot S \rho g; q_{ин} = m_1 a = 1 \cdot S \rho a$

$q_{\Sigma} = \frac{P}{2l}; a = \frac{P}{2lS\rho} - g$

Сила  $P$  и нагрузка  $q_{\Sigma}$  вызывают изгиб стержня. Эпюры ЭQ и ЭM приведены.

$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max} = \frac{M_{max}}{W_x}$

Пример 4.



Расчетная схема:

Дано:  $m, R, S, \omega = const$

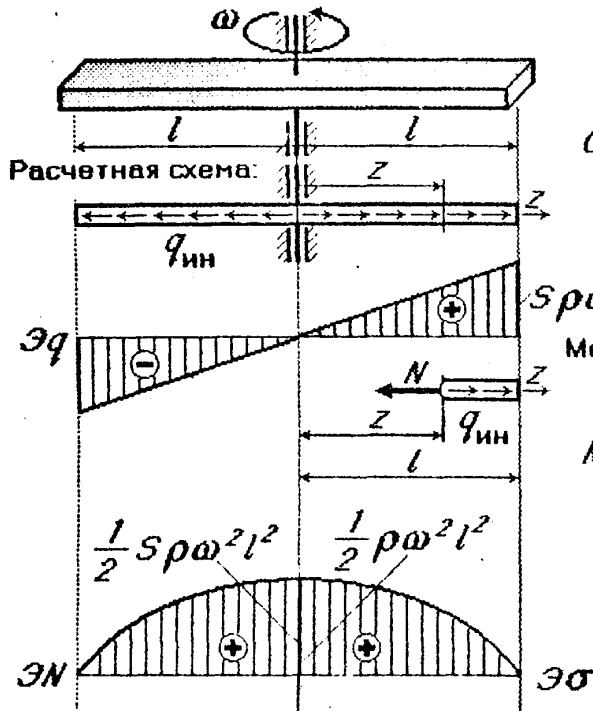
$\sigma_{дин} = ?$

$P_{ин} = -m a_n = -m \omega^2 R$

$N = P_{ин}; \sigma_{дин} = \frac{N}{S}$

©Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

Пример 5. Горизонтальный стержень постоянного поперечного сечения  $S$ , длиной  $2l$  и плотностью материала  $\rho$ , равномерно вращается вокруг вертикальной оси  $OO$  с постоянной угловой скоростью  $\omega = const$ .



Дано:  $S, l, \rho$  и  $\omega = const$ .

$\sigma_{дин} = ?$

$a_n(z) = \omega^2 z; q_{ин} = m_1 a_n = 1 \cdot S \rho \omega^2 z;$

Силы инерции (центробежные силы) направлены по радиусу от оси вращения.

$q_{ин}(l) = S \rho \omega^2 l;$

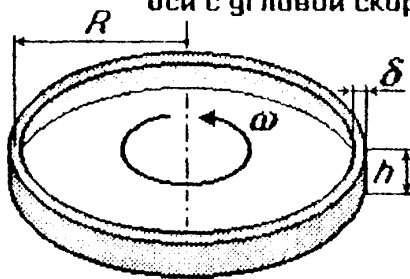
Метод сечений - равновесие отсеченной части стержня:

$$N = \int_z^l q_{ин}(z) dz = \int_z^l S \rho \omega^2 z dz = \frac{1}{2} S \rho \omega^2 (l^2 - z^2).$$

$N_{max} = \frac{1}{2} S \rho \omega^2 l^2$

$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{S} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 l^2$

Пример 6. Плоское тонкостенное кольцо радиусом  $R$ , толщиной  $\delta$ , шириной  $h$  и плотностью материала  $\rho$  равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ .



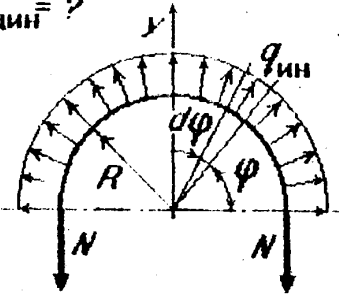
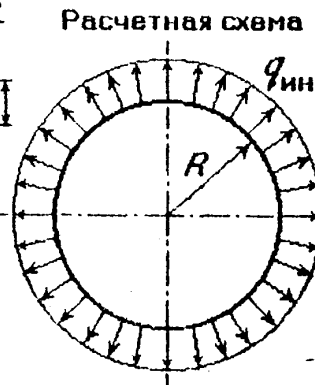
$a_n = \omega^2 R;$

$q_{ин} = m_1 a_n = 1 \cdot S \rho \omega^2 R;$

Силы инерции (центробежные силы) направлены по радиусу от оси вращения.

Дано:  $R, \delta, h, \rho, \omega = const;$

$\sigma_{дин} = ?$



$\sum Y = -2N + \int_0^\pi q_{ин} R d\varphi \sin\varphi = 0;$

$2N = q_{ин} R (-\cos\varphi) \Big|_0^\pi = 2q_{ин} R;$

$N = q_{ин} R;$

$\sigma_{дин} = \frac{q_{ин} R}{S} = \frac{S \rho \omega^2 R^2}{S} = \rho \omega^2 R^2;$

$V = \omega R;$

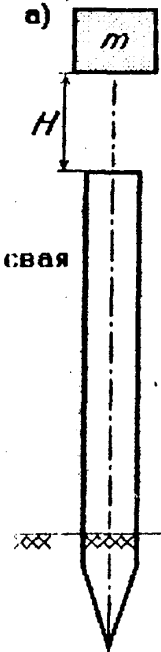
$\sigma_{дин} = \rho V^2;$

© Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

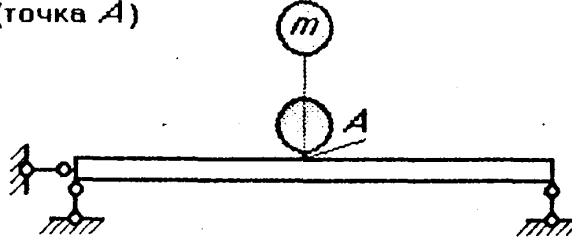
### ИМПУЛЬСНОЕ (КРАТКОВРЕМЕННОЕ) НАГРУЖЕНИЕ

Под ударной понимается всякая, вообще говоря, быстро изменяющаяся нагрузка.

Примеры: б) Ковка. Проковываемое изделие и шток молота с бойком.

а)  Задача о расчете конструкций на ударную нагрузку содержит ряд трудностей:

а) анализ напряженного состояния в зоне контакта соударяющихся тел (точка А)



б) процесс изменения контактных сил во времени.

в) фактор рассеяния энергии в процессе удара падающего и ударяемого тел.

Ограничимся простейшими приемами расчета, которые не дают высокой точности, но позволяют правильно оценить порядок перемещений, напряжений и деформаций при ударе.

При расчете на удар принимаем следующие допущения:

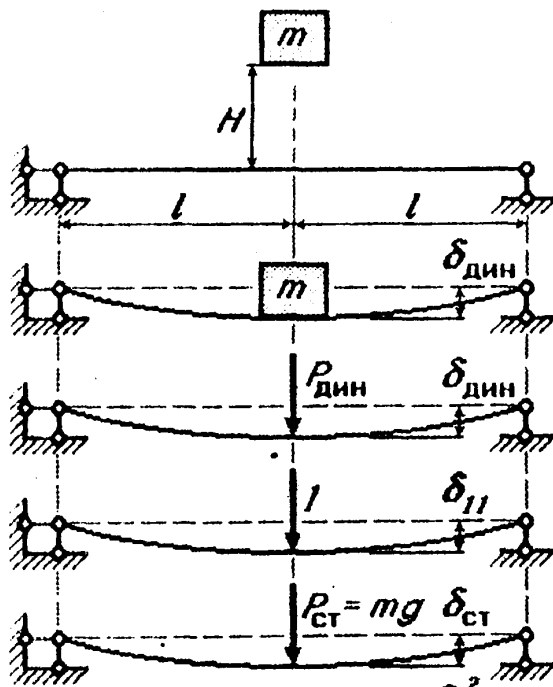
а) вся кинетическая энергия падающего или движущегося тела полностью переходит в потенциальную энергию деформации конструкции;

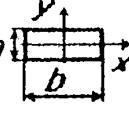
б) деформации в конструкции будем считать упругими, т.е. между усилиями и перемещениями, между напряжениями и деформациями сохраняется пропорциональная зависимость (закон Гука);

в) удар происходит без соударения (без отскока).

### ИЗГИБАЮЩИЙ УДАР

На балку с высоты  $H$  падает тело (груз) массой  $m$ . (Масса балки мала и при расчетах принимается равной нулю).



Дано:  $m, H, l, E, b \times h$    
 $\sigma_{дин} = ?$

Составим энергетический баланс:

$$K_0 + \Pi = U$$

$K_0$  - кинетическая энергия падающего тела в момент соприкосновения с балкой;

$\Pi$  - изменение потенциальной энергии тела на перемещении  $\delta_{дин}$ ;

$\delta_{дин}$  - путь торможения, в конце которого скорость перемещения тела равна нулю.

$\delta_{11}$  - перемещение от единичной нагрузки, приложенной в точку соударения тел по направлению движущегося тела;

$U$  - упругая энергия деформации балки (потенциальная энергия деформации).

$$K_0 = mgH = \frac{mv_0^2}{2}; \quad v_0^2 = 2Hg; \quad H = \frac{v_0^2}{2g};$$

$v_0$  - скорость падающего тела в момент соприкосновения с балкой;

$$\Pi = mg\delta_{дин}$$

$$\delta_{дин} = \delta_{11} P_{дин}; \quad \delta_{ст} = \delta_{11} P_{ст}$$

$$U = \frac{1}{2} P_{дин} \delta_{дин} = \frac{1}{2} \frac{\delta_{дин}^2}{\delta_{11}}$$

$$k_0 + P = U; \quad mgH + mg\delta_{\text{дин}} = \frac{1}{2} \frac{\delta_{\text{дин}}^2}{\delta_{\text{ст}}}; \quad (H + \delta_{\text{дин}}) mg 2\delta_{\text{ст}} = \delta_{\text{дин}}^2$$

$$\delta_{\text{дин}}^2 - (H + \delta_{\text{дин}}) 2\delta_{\text{ст}} = 0; \quad \delta_{\text{дин}}^2 - 2\delta_{\text{дин}} \delta_{\text{ст}} - 2H\delta_{\text{ст}} = 0;$$

$$\delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{ст}} \pm \sqrt{\delta_{\text{ст}}^2 + 2H\delta_{\text{ст}}} = \delta_{\text{ст}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}} \right)$$

в окончательном выражении перед радикалом взят знак плюс (+) потому, что удар происходит без отскока.

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta_{\text{ст}}}} \quad \delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{ст}} k_{\text{д}}; \quad P_{\text{дин}} = P_{\text{ст}} k_{\text{д}};$$

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{ст}} k_{\text{д}};$$

$P_{\text{дин}}$  - это нагрузка, которая будучи приложена статически, вызовет такие же напряжения, перемещения и деформации, как и тело массой  $m$ , падающее с высоты  $H$  или движущееся со скоростью  $v_0$ .

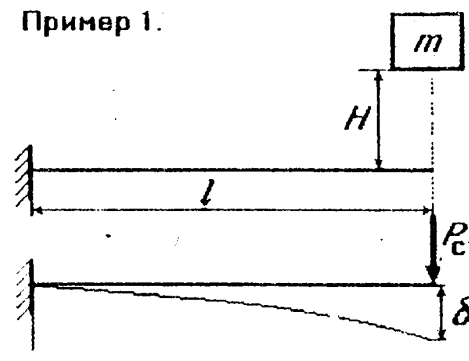
**ПРОСТЕЙШИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ:**

1. При  $H = 0$ ,  $k_{\text{д}} = 2$  - мгновенное (внезапное) нагружение. В этом случае прогиб, напряжения и деформации вдвое превышают те, которые возникли бы при статическом нагружении.
2. Если высота падения ( $H$ ) значительно превышает статический прогиб  $\delta_{\text{ст}}$  ( $2H \gg \delta_{\text{ст}}$ ), то единицей перед и под радикалом можно пренебречь:

$$k_{\text{д}} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta_{\text{ст}}}}$$

**ПУТИ СНИЖЕНИЯ УДАРНЫХ (ДИНАМИЧЕСКИХ) НАПРЯЖЕНИЙ:**

Пример 1.

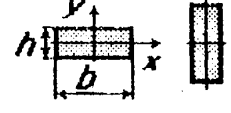


$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{ст}} k_{\text{д}};$$

Примем  $2H \gg \delta_{\text{ст}}$ :

$$k_{\text{д}} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}}$$

Дано:  $m, H, l, E, b \times h$



$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{P_{\text{ст}} l}{W_x}; \quad \delta_{\text{ст}} = \frac{P_{\text{ст}} l^3}{3E I_x}$$

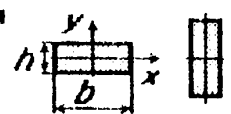
$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$\sigma_{\text{дин}} = ?$

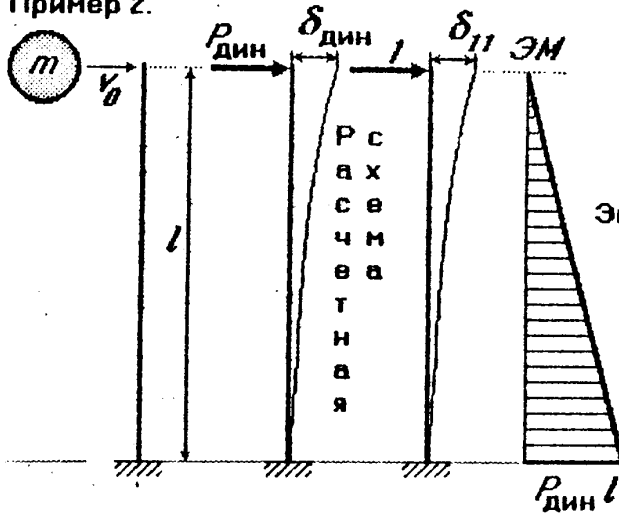
$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{ст}} k_{\text{д}} = \frac{P_{\text{ст}} l}{W_x} \sqrt{\frac{2H 3E I_x}{P_{\text{ст}} l^3}} = \sqrt{\frac{P_{\text{ст}}^2 l^2 36 2H 3E b h^3}{b^2 h^4 P_{\text{ст}} l^3 \cdot 12}} = \sqrt{\frac{18 P_{\text{ст}} H E}{b \cdot h \cdot l}} = \sqrt{\frac{18 P_{\text{ст}} H E}{V}}$$

Пути снижения:

- 1) Уменьшение модуля упругости -  $E$ .
- 2)  $V = bh l$  - увеличение объема тела, воспринимающего удар.
- 3) Не зависит от расположения



Пример 2.

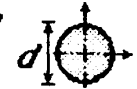


Дано :

Стойка круглого поперечного сечения

$$m, v_0, EI_x = const, l, d$$

$$\sigma_{дин} = ?$$



$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$

Энергетический баланс :

$$K_0 = U; K_0 = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$U = \frac{1}{2} P_{дин} \delta_{дин} = \frac{1}{2} P_{дин}^2 \delta_{ст}$$

$$P_{дин} = \sqrt{\frac{mv_0^2}{\delta_{ст}}} = v_0 \sqrt{\frac{m}{\delta_{ст}}}$$

$$\sigma_{дин} = \frac{P_{дин} l}{W_x} = \frac{l}{W_x} v_0 \sqrt{\frac{m}{\delta_{ст}}} = v_0 \sqrt{\frac{32 \cdot 32 \cdot l^2 m 3E \pi d^4}{\pi^2 d^6 l^3 64}} = v_0 \sqrt{\frac{12mE}{\pi d^2 l}}$$

$$\sigma_{дин} = v_0 \sqrt{\frac{12mE}{5 \cdot l}}$$

Если тело падает на балку, обладающую значительной массой, которой нельзя пренебречь, то решение усложняется. Можно использовать приближенное решение: распределенная по длине балки масса заменяется приведенной массой, сосредоточенной в месте удара.

Дано :  $m, H, l, EI_x = const$ ;

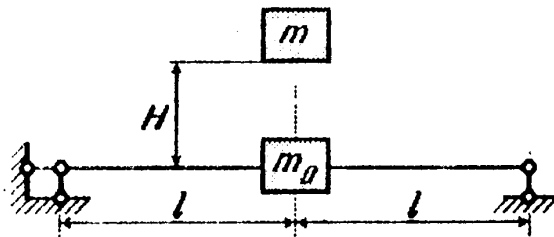
$m_b$  - масса балки;

$m_0 = km_b$  - приведенная масса балки;

$$\sigma_{дин} = ?$$

Составим энергетический баланс:

$$K_0 + \Pi = U$$



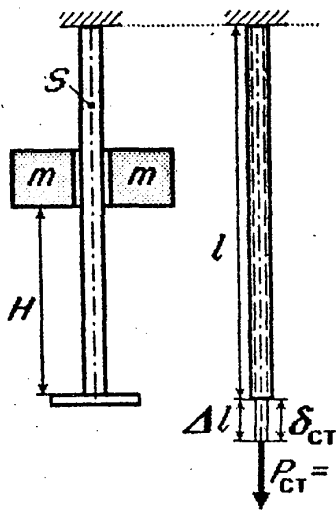
$$\Pi = (m + m_0) g \delta_{дин}; \quad mgH + mg \delta_{дин} + m_0 g \delta_{дин} = \frac{1}{2} \frac{\delta_{дин}^2}{\delta_{ст}}$$

$$2 \delta_{ст} mg [H + (1 + \frac{m_0}{m}) \delta_{дин}] = \delta_{дин}^2$$

$$\delta_{дин} = \delta_{ст} (1 + \frac{m_0}{m}) + \sqrt{\delta_{ст}^2 (1 + \frac{m_0}{m})^2 + 2H \delta_{ст}}$$

$$k_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_0}{m}}}$$

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР, ВЫЗЫВАЮЩИЙ РАСТЯЖЕНИЕ ИЛИ СЖАТИЕ



Дано :

$m, H, l, S, E$

$\sigma_{дин} = ?$

$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} k_d, \sigma_{ст} = \frac{N}{S} = \frac{P_{ст}}{S}$

$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}}$

Если  $2H \gg \delta_{ст}$ , то  $k_d = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}}$

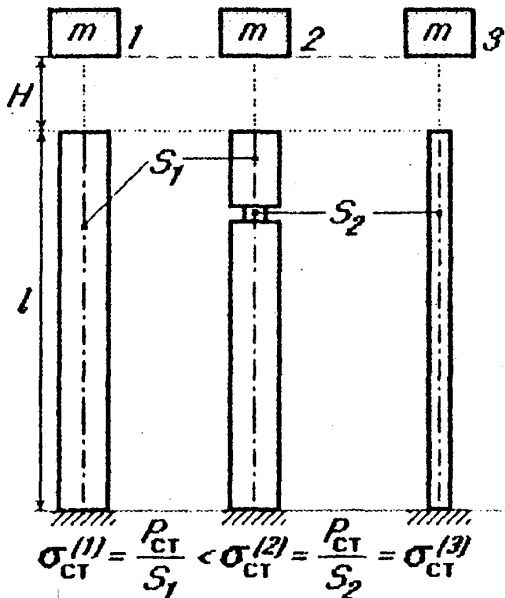
$\delta_{ст} = \Delta l = \frac{P_{ст} l}{ES}$

$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} k_d = \frac{P_{ст}}{S} \sqrt{\frac{2HES}{P_{ст} l}} = \sqrt{\frac{P_{ст}^2 2HES}{S^2 P_{ст} l}}$

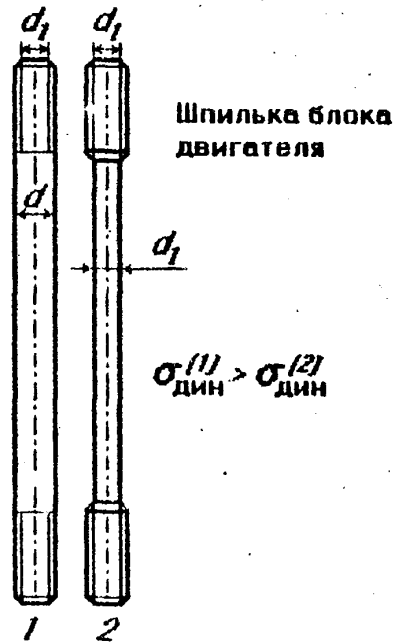
$\sigma_{дин} = \sqrt{\frac{P_{ст} 2HE}{Sl}}$

$\sigma_{дин} = \sqrt{\frac{mg2HE}{Sl}}$

Сравним прочность трех стержней, подвергающихся продольному удару :



При ударном действии нагрузки  $\sigma_{дин}^{(2)}$  больше чем  $\sigma_{дин}^{(1)}$  и  $\sigma_{дин}^{(3)}$ . Поэтому нежелательно местное ослабление стержня при ударных нагрузках.

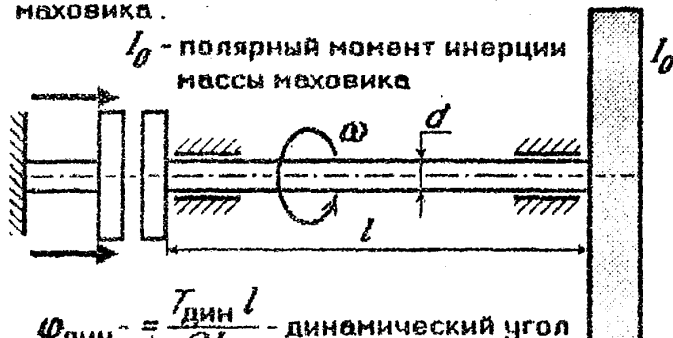


$k_d^{(1)} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}^{(1)}}} \approx k_d^{(2)} > k_d^{(3)} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}^{(3)}}}$

$\sigma_{дин}^{(1)} = \sigma_{ст}^{(1)} k_d^{(1)} < \sigma_{дин}^{(2)} = \sigma_{ст}^{(2)} k_d^{(2)} > \sigma_{дин}^{(3)} = \sigma_{ст}^{(3)} k_d^{(3)}$

СКРУЧИВАЮЩИЙ УДАР

Пример. Вал с маховиком вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Момент инерции массы вала пренебрежимо мал по сравнению с полярным моментом инерции массы маховика. При внезапном торможении левого конца вал будет закручиваться от маховика.



Дано:  
 $l, d, G, \omega, I_0$   
 $T_{дин} = ?$

Энергетический баланс:

$K_0 = U$   
 $K_0 = \frac{I_0 \omega^2}{2}$  - кинетическая энергия массы маховика;  
 $U = \frac{1}{2} T_{дин} \varphi_{дин}$  - потенциальная энергия деформации вала при кручении;

$\varphi_{дин} = \frac{T_{дин} l}{GI_p}$  - динамический угол закручивания вала;

$T_{дин}$  - динамический крутящий момент;

$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$  - полярный момент инерции сечения вала.

$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$

$\frac{I_0 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{T_{дин}^2 l}{GI_p}$   $T_{дин} = \omega \sqrt{\frac{I_0 GI_p}{l}}$   $\max T_{дин} = \frac{T_{дин}}{W_p} = \frac{\omega}{W_p} \sqrt{\frac{I_0 GI_p}{l}}$

$\max T_{дин} = \omega \sqrt{\frac{256 \cdot I_0 G \cdot \pi d^4}{\pi^2 d^6 l \cdot 32}} = \omega \sqrt{\frac{4 \cdot 2I_0 G}{\pi d^2 \cdot l}} = \omega \sqrt{\frac{2I_0 G}{Sl}}$

для снижения напряжений желательно увеличить объем вала.

©Все права на материалы принадлежат ЮУрГУ. Любое дальнейшее их размножение и использование, особенно в учебных целях, не допускается без согласия автора.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986.
2. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986.
3. Кононов Н.М., Кононов К.М., Буслаева О.С. Метод Сечений. Построение эпюр внутренних силовых факторов: Учебное пособие/ Под ред. Э.Ф.Черняева. — Челябинск: ЮУрГУ, 1998.



Эдуард Фёдорович Черняев

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие

Техн. редактор А.В.Миних

Издательство Южно-Уральского государственного  
университета

---

ЛР № 020364 от 10.04.97. Подписано в печать 04.06.99. Формат 60\*84 1/8.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,18. Уч.-изд. л. 19,00.

Тираж 600 экз. Заказ 150/250 Цена 20 р.

---

УОП Издательства 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И.Ленина, 76