

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Южно-Уральский государственный университет  
Кафедра теоретической механики

531(07)  
П858

Ю.Г. Прядко, В.Г. Карavaев

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.  
ГЕОМЕТРИЯ МАСС**

*Курс лекций*

Челябинск  
Издательство ЮУрГУ  
2006

УДК 531(075.8) + 531.3(075.8)  
П858

*Одобрено*  
*учебно-методической комиссией*  
*аэрокосмического факультета*

*Рецензенты:*  
*В.А. Жилкин, Ю.Б. Курочкин*

П858 Прядко Ю.Г Теоретическая механика. Геометрия масс: курс лекций /  
Ю.Г. Прядко, В.Г. Караваев, – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. –  
105 с.

ISBN 5-696-00000-0

Пособие предназначено для самостоятельной и аудиторной работы студентов при изучении раздела «Геометрия масс» курса теоретической механики. В нём приведены основные теоретические сведения, выводятся формулы для расчета положения центра масс, осевых, центробежных моментов инерции тел с наиболее распространённой формой. Для получения результатов используются и обычно применяемые координатные методы, и элементы векторного и тензорного анализа.

В приложениях содержатся сведения из векторной и тензорной алгебры с выводом формул для определения динамических мер движения, расчетом массовых характеристик при повороте системы координат. Полученные результаты используются студентами при выполнении курсовых работ по балансировке вращающегося составного тела и расчету компонентов тензоров инерции, положения главных осей в произвольной точке тела. Продемонстрирована возможность использования пакета MathCad для выполнения курсовых работ.

Материалы пособия могут быть полезны студентам, преподавателям, читающим курсы теоретической механики и сопротивления материалов, а также инженерам-исследователям.

УДК 531(075.8) + 531.3(075.8)

ISBN 5-696-00000-0

© Издательство ЮУрГУ, 2006

УДК 531(075.8)

Прядко Ю.Г., Караваев В.Г Теоретическая механика. Геометрия масс:  
Курс лекций/ Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2006. – 106 с.

Пособие предназначено для самостоятельной и аудиторной работы студентов при изучении раздела «Геометрия масс» курса теоретической механики. В нём приведены основные теоретические сведения, выводятся формулы для расчета положения центра масс, осевых, центробежных моментов инерции тел с наиболее распространённой формой. Для получения известных в теоретической механике, в сопротивлении материалов результатов используются и обычно применяемые координатные методы, и элементы векторного и тензорного анализа.

В приложениях содержатся сведения из векторной и тензорной алгебры с выводом формул для определения динамических мер движения, с расчетом геометрических характеристик при повороте системы координат. Приведенные результаты используются студентами при выполнении курсовых работ по балансировке вращающегося составного тела и расчету компонентов тензоров инерции, главных моментов инерции и положения главных осей в произвольной точке тела. Продемонстрирована возможность использования пакета MathCad для выполнения курсовых работ.

Материалы пособия могут быть полезны не только студентам, но и преподавателям, читающим курсы теоретической механики и сопротивления материалов, инженерам - исследователям.

Ил. 64, табл. 5 , список лит.—10 назв.

Одобрено учебно-методической комиссией аэрокосмического факультета ЮУрГУ.

Рецензенты:

д. т. н., проф., засл. деятель науки и техники РФ В.А. Жилкин (ЧГАА),  
к. т. н., доцент, Ю.Б.Курочкин, ЧГАУ.

## *Оглавление*

Введение .....	4
1. Масса и центр масс механической системы материальных точек .....	5
2. Масса и центр масс твердого тела .....	6
2.1. Масса и центр масс неоднородного твердого тела .....	6
2.2. Масса и центр масс однородного твердого тела .....	8
2.3. Центры масс однородных тел простейшей формы.....	12
2.4. Определение центров масс однородных тел сложной формы.....	20
3. Моменты инерции.....	24
3.1. Статические моменты инерции. ....	26
3.2. Осевые и полярные моменты инерции.....	28
3.3. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции. ....	30
3.4. Осевые моменты инерции тел простейшей формы. ....	33
3.5. Радиус инерции .....	40
3.6. Моменты инерции однородных тел вращения. ....	41
3.7. Примеры. ....	44
3.8. Представление тензора инерции тела в векторной форме.....	47
3.9. Преобразование тензора инерции при параллельном переносе системы координат.....	49
3.10. Преобразование тензора инерции при повороте системы координат..	53
3.11. Осевой момент инерции тела относительно пучка осей .....	56
3.12. Эллипсоид инерции тела в точке $O$ . ....	58
3.13. Определение положения главных осей инерции.....	62
3.14. Положение главных осей инерции в плоском случае.....	68
3.15. Определение геометрических характеристик составного тела.....	71
Библиографический список.....	76
4. Приложения.....	77
Приложение 4.1. Сведения из векторной и тензорной алгебры.....	77
Приложение 4.2. Динамические меры тела в сферическом движении.....	83
Приложение 4.3. Моменты инерции при повороте системы координат ...	87
Приложение 4.4. Построение тензора инерции в пакете MathCad.....	88
Приложение 4.5. Центры масс однородных тел.....	99
Приложение 4.6. Моменты инерции однородных тел.....	103

## *Введение*

В истории механики понятие о *массе* и *массовых характеристиках* материальных объектов (МО) вырабатывалось тысячелетиями. Уже в III в. до н. э. великий древнегреческий мыслитель Архимед широко использовал понятие *центра масс* и на основании его математических свойств доказал ряд известных теорем. Позднее идеи Архимеда были использованы в трудах многих геометров (Чева, Папп, Гюльден, Люилье и др.).

В XVIII столетии сформировалось понятие о массе и массовых характеристиках как о мерах, характеризующих инерционные свойства МО.

И. Ньютон во второй аксиоме  $\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}$ , которая при постоянной массе

превращается в  $m\vec{a} = \vec{F}$ , фактически говорит о том, что масса точки определяет, как сила может изменить её движение (ускорение) и что в меру движения объекта (в данном случае в количество движения точки) должна входить масса.

Леонард Эйлер в связи с изучением вращательного движения ввел понятие *момента инерции*. Такие динамические меры движения тел и механических систем, как кинетический момент и кинетическая энергия также потребовали введения мер инерции МО, характеризующих распределение массы объекта в пространстве.

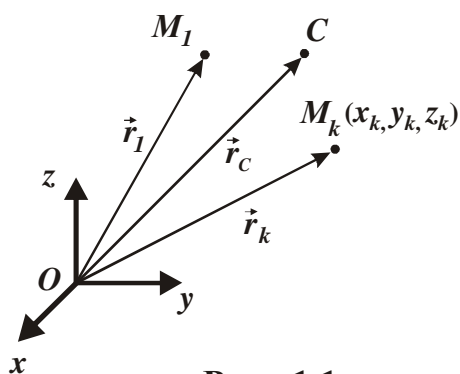
В курсе теоретической механики раздел «Геометрия масс» всегда занимал значительное место. В то же время большое разнообразие задач механики, связь методов и формул этого раздела с методами анализа напряженного состояния и расчетами на прочность в курсах сопротивления материалов, теории упругости и пластичности заставляют усложнять решаемые задачи, выводить расчетные формулы для определения геометрических и массовых характеристик большого числа тел, встречающихся на практике. Вся эта информация излагается в целом ряде учебников и справочников [1 – 8]. В некоторых случаях приведенные формулы не выводятся, а обозначения в разных источниках отличаются.

Именно поэтому, предпринята попытка в одном пособии собрать необходимый материал по методам расчета геометрических и массовых характеристик часто встречающихся тел и сечений. Приводятся примеры решения основных задач этого раздела, в том числе и с помощью ЭВМ.

В настоящее время конечно существуют пакеты компьютерных программ, позволяющие получать 3-d изображения тел, их массовые и геометрические характеристики без вывода расчетных формул. Но, на наш взгляд, излагаемый в пособии материал необходим для более глубокого понимания указанных характеристик, широко использующихся во всех дисциплинах, объединяемых одним словом «Механика».

## **1. Масса и центр масс механической системы материальных точек**

Механическая система определяется как выбранное по какому-либо признаку множество материальных точек и тел, взаимодействующих между собой.



**Рис. 1.1**

Пусть в пространстве  $Oxyz$  рассматривается движение механической системы, состоящей из материальных точек  $\{M_k\}_n$  массами  $\{m_k\}_n$ , положение которых определяется радиус-векторами  $\{\vec{r}_k\}_n$  (рис. 1.1).

Масса каждой материальной точки связана с количеством вещества и характеризует ее инертность.

По свойству аддитивности масса механической системы материальных точек равна сумме масс всех

точек системы:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k . \tag{1.1}$$

Для исследования движения механической системы полезно использовать введенное впервые Архимедом понятие центра масс [1]. В это понятие Архимед вкладывал следующие интуитивно ясные и имеющие простой механический смысл свойства, отражающие распределение масс в системе.

1. Всякая механическая система материальных точек имеет центр масс и притом единственный.
2. Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки. Его положение определяется правилом рычага: произведение массы материальной точки на ее расстояние до центра масс одинаково для обеих точек:

$$m_1 d_1 = m_2 d_2,$$

где  $m_1, m_2$  – массы материальных точек,  $d_1, d_2$  – расстояния материальных точек до центра масс.

3. Если в системе, состоящей из конечного числа материальных точек, отметить несколько материальных точек и массы всех отмеченных точек перенести в их центр масс, то положение центра масс всей системы не изменится.

На основе этих свойств математическое определение центра масс выглядит следующим образом: **центром масс механической системы материальных точек** называется геометрическая точка  $C$  пространства  $Oxyz$ , положение которой определяется радиус-вектором

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k. \quad (1.2)$$

Иногда центр масс называют **центром инерции**.

Проецируя (1.2) на оси координат, находим координаты  $(x_c, y_c, z_c)$  центра масс, выраженные через координаты  $(x_k, y_k, z_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) точек системы:

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (1.3)$$

## 2. Масса и центр масс твёрдого тела

### 2.1. Масса и центр масс неоднородного твёрдого тела

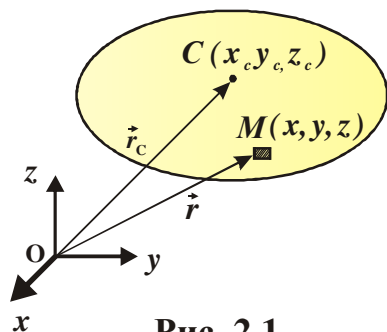


Рис. 2.1

Твёрдое тело рассматривается как геометрически неизменяемая система непрерывно распределённых по объёму тела ( $\gamma$ ) материальных частиц  $\{M\}$  массами  $\{dm\}$ , положение которых определяется радиус-векторами  $\{\bar{r}\}$  (рис. 2.1).

При вычислении массы  $M$  и положения центра масс  $C$  твёрдого тела ( $\gamma$ ) суммы равенств (1.1–1.3) в пределе переходят в интегралы:

$$M = \int_{(\gamma)} dm, \quad (2.1)$$

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \int_{(\gamma)} \bar{r} dm, \quad (2.2)$$

$$x_c = \frac{1}{M} \int_{(\gamma)} x dm, \quad y_c = \frac{1}{M} \int_{(\gamma)} y dm, \quad z_c = \frac{1}{M} \int_{(\gamma)} z dm. \quad (2.3)$$

Понятие массы как меры инертности, введенное для материальной точки, применимо и к поступательно движущемуся твердому телу: все частицы такого тела, в общем случае обладающие разными массами, имеют одинаковые ускорения.

Отношение массы  $dm$  частицы тела  $M$  к её объёму  $dV$  называется **плотностью тела** в данной точке  $M$ :  $\rho = \frac{dm}{dV}$ .

Если тело неоднородно, то его плотность меняется в зависимости от положения точки:

$$\rho = \rho(x, y, z) -$$

и масса неоднородного тела вычисляется по формуле

$$M = \int_{(V)} \rho dV = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.4)$$

Положение центра масс неоднородного тела также определяется через определённые интегралы распространением по объёму ( $V$ ) тела ( $\gamma$ ):

$$\bar{r}_c = \frac{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) \bar{r} dx dy dz}{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz}, \quad (2.5)$$

$$x_c = \frac{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) x dx dy dz}{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz},$$



$$y_c = \frac{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) y \, dx \, dy \, dz}{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}, \quad (2.6)$$

$$z_c = \frac{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_{(V)} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}.$$

## 2.2. Масса и центр масс однородного твёрдого тела

*Плотность однородного тела одинакова во всех его точках:*

$$\rho(x, y, z) = \frac{M}{V} = \text{const.}$$

В этом случае в формулах (2.1–2.3) величина  $\rho$  выносится за знаки интегралов:

$$M = \rho \iiint_{(V)} dx \, dy \, dz, \quad (2.7)$$

$$\bar{r}_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} \bar{r} \, dx \, dy \, dz, \quad (2.8)$$

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x \, dx \, dy \, dz, \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y \, dx \, dy \, dz, \quad z_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z \, dx \, dy \, dz. \quad (2.9)$$

Центр масс однородного тела называется **центром масс объёма**.

В ряде случаев тело можно рассматривать тонкой однородной плоской пластиной (рис. 2.2) или **оболочкой** (рис. 2.3).

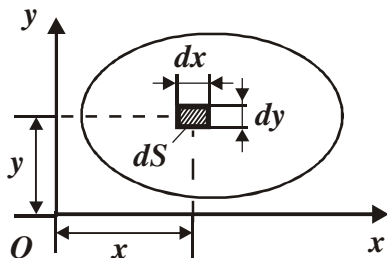


Рис. 2.2

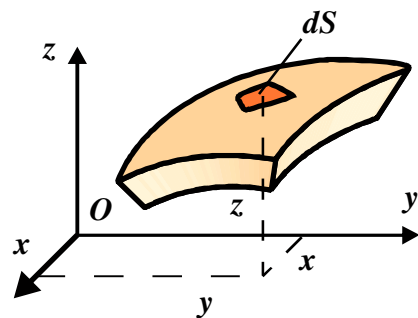


Рис. 2.3

Центр масс однородной пластины или оболочки называется **центром масс поверхности**. Определение положения центра масс поверхности сводится к вычислению интегралов по площади  $S$  поверхности:

$$\bar{r}_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} \bar{r} dS, \quad (2.10)$$

$$x_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} x dS, \quad y_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} y dS, \quad z_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} z dS. \quad (2.11)$$

Тело, один из характерных размеров которого значительно больше двух других (рис. 2.4), рассматривается как **криволинейный стержень**. Центр масс такого однородного стержня называется **центром масс линии**. Определение положения центра масс линии сводится к вычислению интегралов по длине  $L$  стержня:

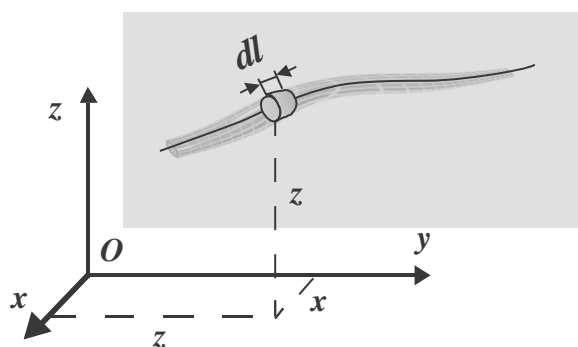


Рис. 2.4

$$\bar{r}_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} \bar{r} dl, \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl, \\ z_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl \end{array} \right\}. \quad (2.13)$$

Легко увидеть, что формулы (2.8–2.13), определяющие положение центра масс однородного твёрдого тела совпадают с аналогичными выражениями для центра тяжести твёрдого тела, находящегося в однородном поле тяжести [2, 3].

Таким образом, положение центра масс совпадает с положением центра тяжести твёрдого тела. Однако понятие центра тяжести тела имеет смысл только при наличии поля сил тяжести. Понятие же о центре масс как о характеристике распределения масс в теле имеет смысл всегда для любого тела, независимо от того, находится ли данное тело под действием каких-либо сил или нет.

Для определения положения центра масс твёрдого тела можно использовать известные экспериментальные и теоретические (способы **симметрии, разбиения тела на части, отрицательных масс**) методы нахождения центра тяжести тела.

## Способ симметрии

Если однородное твёрдое тело имеет плоскость, ось или центр материальной симметрии, то его центр масс лежит соответственно или на плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

По этой причине центры масс однородного прямолинейного стержня, кольца, шара, поверхности сферы находятся в их геометрических центрах. Центры масс однородных прямоугольной и ромбовидной пластин находятся на пересечении их диагоналей. Центр тяжести однородной пластины в форме диска располагается в её геометрическом центре. Центр масс однородного тела, полученного вращением плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости кривой и поверхности такого тела, находится на этой оси.

## Способ разбиения тела на части

Положение центра масс тела сложной формы можно определить, если разбить его на конечное число таких частей, центры масс которых известны.

Предположим, что имеются три такие части  $\tau_i = \{ V_i - \text{объем, } S_i - \text{площадь поверхности, } l_i - \text{длина линии } i - \text{й части, } i = 1, 2, 3$ . Центры масс этих частей обозначим соответственно  $C_1, C_2, C_3$ . Известны величины, определяющие положение центров масс этих частей:

$$\bar{r}_i, x_i, y_i, z_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда интегралы в формулах (2.8 – 2.13) можно подсчитать следующим образом:

$$\bar{r}_c = \frac{\bar{r}_{c_1} \tau_1 + \bar{r}_{c_2} \tau_2 + \bar{r}_{c_3} \tau_3}{\tau}, \quad (2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{x_{c_1} \tau_1 + x_{c_2} \tau_2 + x_{c_3} \tau_3}{\tau}, & y_c &= \frac{y_{c_1} \tau_1 + y_{c_2} \tau_2 + y_{c_3} \tau_3}{\tau}, \\ z_c &= \frac{z_{c_1} \tau_1 + z_{c_2} \tau_2 + z_{c_3} \tau_3}{\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Здесь  $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ .

## Способ отрицательных масс

Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, полости, углубления, в которых нет массы. Положение центра масс такого тела можно определить, если положить в формулах (2.14, 2.15) для слагаемых, описывающих вырез, полость, углубление,  $\tau_i$  берется со знаком минус.

Пусть, например, тело полной формы  $\tau_1$  имеет полость  $\tau_2$  и известны положения их центров масс  $\bar{r}_{c_i}, x_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i}, (i=1,2.)$ .

Тогда формулы (2.14, 2.15) запишутся в виде:

$$\bar{r}_c = \frac{\bar{r}_{c_1} \tau_1 - \bar{r}_{c_2} \tau_2}{\tau}, \quad (2.16)$$

$$x_c = \frac{x_{c_1} \tau_1 - x_{c_2} \tau_2}{\tau}, \quad y_c = \frac{y_{c_1} \tau_1 - y_{c_2} \tau_2}{\tau}, \quad z_c = \frac{z_{c_1} \tau_1 - z_{c_2} \tau_2}{\tau}, \quad (2.17)$$

где  $\tau = \tau_1 - \tau_2$ .

С определением положений центров масс линий и поверхностей связаны две элементарные теоремы, называемые теоремами Паппа–Гюльдена [2].

### Теорема 1

*Площадь поверхности вращения, образованной вращением плоской кривой вокруг оси, лежащей в её плоскости и её не пересекающей, равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описанной её центром масс (рис. 2.5):*

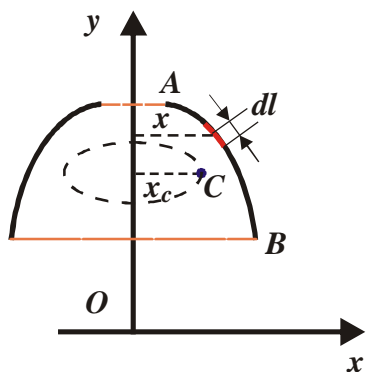


Рис. 2.5

$$S = 2\pi x_c L, \quad (2.18)$$

где  $S$  – площадь поверхности вращения,  $L$ ,  $x_c$  – длина и координата центра масс кривой  $\overset{\cup}{AB}$ .

## Теорема 2

*Объём тела вращения, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры и не пересекающей её, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной её центром масс (рис. 2.6):*

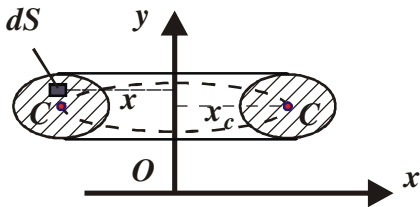


Рис. 2.6

$$V = 2\pi x_c S, \quad (2.19)$$

где  $V$  – объём тела вращения,

$S, x_c$  – площадь и координата центра масс плоской фигуры.

### 2.3. Масса и центр масс однородных тел простейшей формы

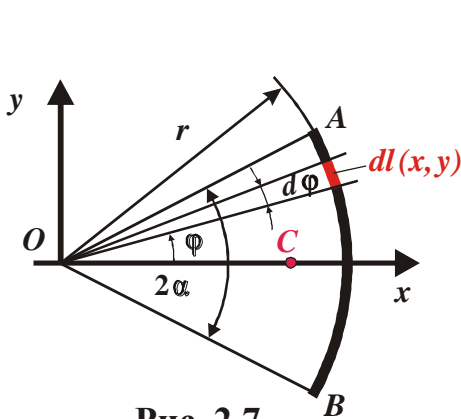


Рис. 2.7

Рассмотрим дугу  $\overset{\cup}{AB}$  окружности радиуса  $r$  с центральным углом  $2\alpha$ . Поместим начало координат в центре  $O$  окружности и направим ось  $x$  перпендикулярно хорде  $AB$  (рис. 2.7). Вследствие симметрии относительно оси  $x$  центр масс  $C$  будет лежать на этой оси ( $y_c = 0$ ).

Абсциссу центра масс найдём по формуле (2.13)

$$x_c = \frac{1}{\overset{\cup}{AB}} \int_{\overset{\cup}{AB}} x dl = \frac{1}{2rl} \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos \varphi d\varphi = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}, \quad (2.20)$$

где  $\alpha$  – половина центрального угла в радианах.

В частности, для дуги полуокружности  $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$  имеем  $x_c = \frac{2r}{\pi}$ , для дуги окружности  $(\alpha = \pi)$  —  $x_c = 0$ .

## Центр масс треугольника

Разбивая треугольник  $ABD$  на ряд узких полосок, параллельных одной из сторон, например  $AD$ , получаем, что центры масс этих полосок-прямоугольников находятся на медиане  $BK$  (рис.2.8).

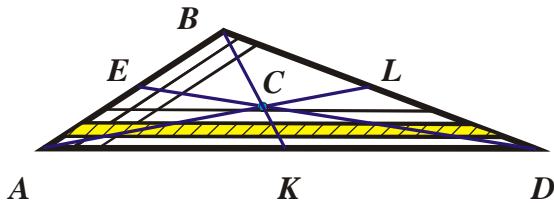


Рис. 2.8

Аналогично, разбивая треугольник на полоски, параллельные сторонам  $AB$  и  $BD$ , заключаем, что центр масс треугольника располагается на пересечении его медиан.

Доказательство того, что три медианы треугольника имеют общую точку, и каждая из медиан делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины, было получено впервые Архимедом.

Приведем это доказательство, основанное на сформулированных в разделе 1 свойствах центра масс.

Пусть  $ABD$  – данный треугольник,  $BK, AL, DE$  – его медианы. Загрузим вершины  $A, B, D$  равными массами  $m$ . Полученная система трех материальных точек  $A, B, D$  имеет однозначно определенный центр масс  $Z$  (свойство 1). В силу свойства 3 положение центра масс не изменится, если массы материальных точек  $A$  и  $D$  перенести в их центр масс, т.е. (согласно свойству 2) в точку  $K$ . Но тогда  $Z$  окажется центром масс лишь двух материальных точек: точки  $K$  с массой  $2m$  и точки  $B$  с массой  $m$ . Следовательно,  $Z \in BK$ . Аналогично убедимся, что  $Z \in AL$  и  $Z \in DE$ .

Таким образом, все три медианы пересекаются в одной точке  $Z \equiv C$ . Кроме того, по правилу рычага (свойство 2) имеем:

$$\begin{aligned} 2mCK &= mCB \Rightarrow \\ \Rightarrow CB : CK &= 2 : 1. \end{aligned} \tag{2.21}$$

## Центр масс трапеции

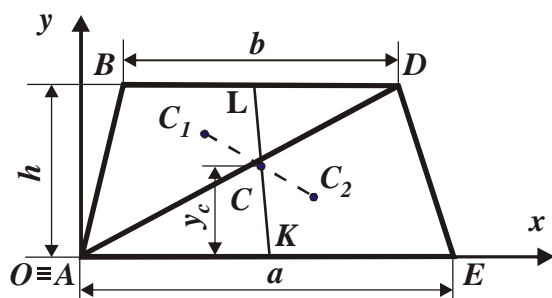


Рис. 2.9

Аналогично предыдущему случаю разобьём трапецию  $ABDE$  (рис. 2.9) на элементарные полоски, параллельные основаниям  $AE$  и  $BD$ .

Центры масс этих полосок располагаются на прямой  $KL$ , соединяющей середины оснований трапеции. Следовательно, и центр масс  $C$  трапеции лежит на этой прямой.

Чтобы найти ординату  $y_c$ , разобьём трапецию на треугольники  $ABD$  и  $ADE$ . Для этих треугольников имеем, соответственно:

площади  $S_1 = \frac{bh}{2}$ ,  $S_2 = \frac{ah}{2}$ ; координаты центров масс  $y_{c_1} = \frac{2}{3}h$ ,  $y_{c_2} = \frac{1}{3}h$ .

Используя формулу (2.15), получаем:

$$y_c = \frac{y_{c_1} S_1 + y_{c_2} S_2}{S_1 + S_2} = \frac{h(a + 2b)}{3(a + b)}. \quad (2.22)$$

## Центр масс кругового сектора

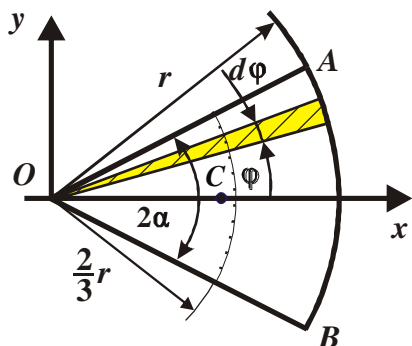


Рис. 2.10

Разобьём сектор круга, соответствующий центральному углу  $2\alpha$ , на бесчисленное множество элементарных секторов (рис. 2.10).

Каждый элементарный сектор можно рассматривать как треугольник с основанием  $rd\varphi$  и высотой  $r$ ,

центр масс которого находится на расстоянии  $\frac{2}{3}r$  от центра круга. Соответственно, геометрическим местом центров масс всех элементарных треугольников является дуга окружности радиуса  $\frac{2}{3}r$ .

Располагая оси координат как в случае с дугой окружности, получаем:

$$y_c = 0, \quad x_c = \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}r \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (2.23)$$

где  $\alpha$  – половина центрального угла в радианах.

В частности, для сектора в виде полукруга  $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$  получим  $x_c = \frac{4r}{3\pi}$ .

### Центр масс кругового сегмента

Применим способы симметрии и отрицательных масс, представив массу кругового сегмента в виде разности масс сектора круга радиусом  $r$  с центральным углом  $2\alpha$  и треугольника  $OAB$  (рис. 2.11).

Для этих фигур имеем соответственно: площади их равны  $S_1 = r^2\alpha$ , и  $S_2 = r^2 \sin \alpha \cos \alpha$ , абсциссы центров масс –  $x_{c_1} = \frac{2}{3}r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ,  $x_{c_2} = \frac{2}{3}r \cos \alpha$ .

Вследствие симметрии сегмента относительно оси  $Ox$  ордината его центра масс

$$y_c = 0.$$

Используя формулу (2.17), получаем абсциссу центра масс кругового сегмента

$$x_c = \frac{\frac{2}{3}r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot r^2\alpha - \frac{2}{3}r \cos \alpha \cdot r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r^2\alpha - r^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{3}r \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}, \quad (2.24)$$

где  $\alpha$  – половина центрального угла в радианах.



## Центры масс правильной пирамиды и прямого кругового конуса

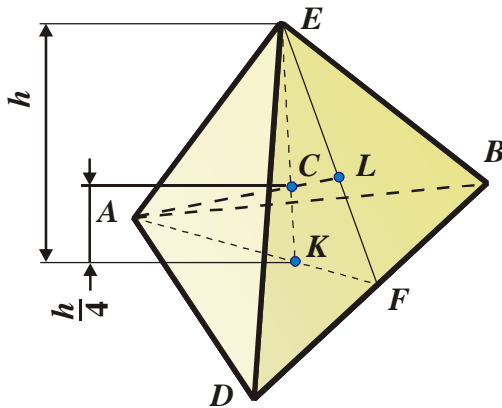


Рис. 2.12

Рассмотрим правильную треугольную пирамиду (тетраэдр)  $ABDE$  высотой  $h$  (рис. 2.12).

Разобьём пирамиду плоскостями, параллельными основанию  $ABD$ , на бесчисленное множество тонких треугольных пластинок. Центры масс таких пластинок лежат на прямой  $EK$ , соединяющей вершину  $E$  пирамиды с центром масс  $K$  её основания.

Следовательно, на прямой  $EK$  будет лежать и центр масс пирамиды. Аналогично, центр масс

пирамиды должен лежать на прямой  $AL$ , соединяющей вершину  $A$  пирамиды с центром масс  $L$  грани  $BED$ .

Следовательно, центр масс пирамиды находится в точке  $C$  пересечения прямых  $EK$  и  $AL$ . Найдём положение точки  $C$ . Так как по свойству медиан

треугольника  $KF = \frac{1}{3}AF$  и  $LF = \frac{1}{3}EF$ , то стороны угла  $AFE$  делятся на пропорциональные части и  $KL \parallel AE$ . Из этого следует, что  $\triangle ACE \sim \triangle KCL \Rightarrow$ ,

следовательно:

$$\frac{CK}{EC} = \frac{KL}{AE} = \frac{1}{3}, \quad EC = 3CK, \quad EK = EC + CK = 4CK, \quad \Rightarrow CK = \frac{1}{4}EK = \frac{1}{4}h.$$

Полученный результат можно применить и к любой многоугольной пирамиде и в пределе для прямого кругового конуса (рис. 2.13).

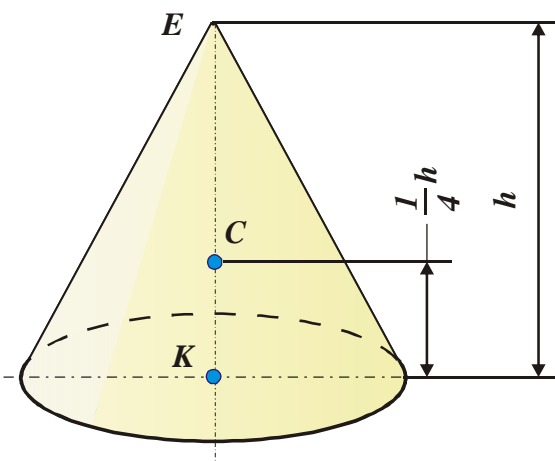


Рис. 2.13

*Центры масс правильной пирамиды и прямого конуса лежат на отрезке, соединяющем вершину пирамиды с центром масс основания, на расстоянии одной четверти длины этого отрезка от*

центра масс основания:

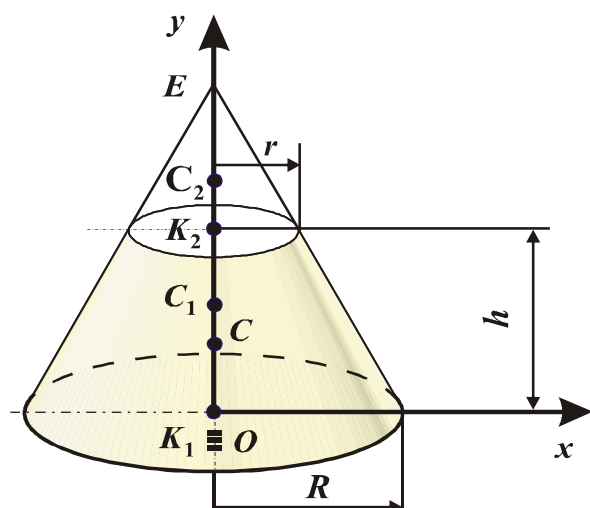
$$CK = \frac{1}{4}h. \quad (2.25)$$

### Центр масс усечённого правильного кругового конуса

Применим способ отрицательных масс, представив массу усечённого конуса высотой  $h$  и радиусами оснований  $r$  и  $R$  в виде разности масс полного конуса высотой  $EK_1 = h + EK_2 = \frac{hR}{R-r}$  и полного конуса высотой  $EK_2 = \frac{hr}{R-r}$  (рис. 2.14).

Объёмы этих полных конусов, соответственно, составляют:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 EK_1 = \frac{1}{3}\frac{\pi R^3 h}{R-r}, \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 EK_2 = \frac{1}{3}\frac{\pi r^3 h}{R-r}.$$



Ординаты центров масс:

$$y_{C_1} = \frac{1}{4}EK_1 = \frac{1}{4}\frac{hR}{R-r},$$

$$y_{C_2} = \frac{1}{4}EK_2 + h = \frac{1}{4}\frac{hr}{R-r} + h.$$

Используя формулы (2.17), получаем ординату центра масс усечённого конуса:

Рис. 2.14

$$y_c = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{hR}{R-r} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^3 h}{R-r} - \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{hr}{R-r} + h \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi r^3 h}{R-r}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^3 h}{R-r} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi r^3 h}{R-r}} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(R^4 - r^4 - r^3(R-r))h}{(R^3 - r^3)(R-r)}. \quad (2.26)$$

### Центр масс сферического сегмента

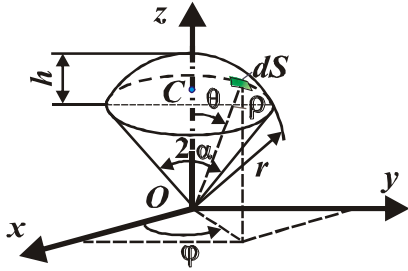


Рис. 2.15

По теореме Паппа–Гюльдена (2.18) о поверхности вращения площадь сферической оболочки радиусом  $r$  с центральным углом  $2\alpha$  (рис. 2.15)

$$S = 2\pi r h,$$

где  $h = r(1 - \cos \alpha)$  – высота сегмента.

Величина элементарной площади, представленная в сферических координатах  $\rho, \theta, \varphi$ , составляет

$$dS = \rho^2 \sin \theta d\varphi \cdot d\theta = r^2 \sin \theta d\varphi \cdot d\theta.$$

Используя формулу (2.11), получаем координату центра масс сферического сегмента

$$z_c = \frac{\int_{(S)} z dS}{S} = \frac{\int_0^{2\pi} r d\varphi \int_0^\alpha r \cos \theta \cdot r \sin \theta d\theta}{2\pi r^2 (1 - \cos \alpha)} = \frac{1}{2} r (1 + \cos \alpha). \quad (2.27)$$

### Центр масс шарового сектора

По теореме Паппа–Гюльдена (2.19) об объёме тела вращения объём шарового сектора радиусом  $r$  с центральным углом  $2\alpha$  (рис. 2.16)  $V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$ , где  $h = r(1 - \cos \alpha)$  — высота сегмента.

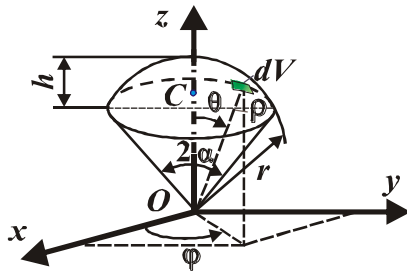


Рис. 2.16

Величина элементарного объема, представленная в сферических координатах  $\rho, \theta, \varphi$ , составляет:

$$dV = \rho^2 d\varphi \cdot d\theta \cdot d\rho \cdot \sin \theta .$$

Используя формулу (2.9), определяем координату центра масс шарового сектора:

$$z_c = \frac{\int z dV}{V} = \frac{\int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta}{\frac{2}{3} \pi r^3 (1 - \cos \alpha)} = \frac{3}{8} r (1 + \cos \alpha). \quad (2.28)$$

### Центр масс шарового сегмента

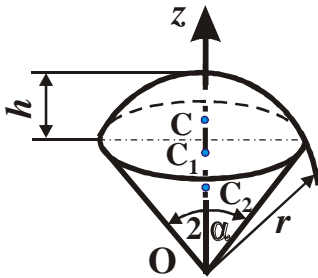


Рис. 2.17

Применим способы симметрии и отрицательных масс. Массу шарового сегмента высотой  $h$  с центральным углом  $2\alpha$  и радиусом  $r$  (рис.2.17) представим как разность масс шарового сектора и прямого кругового конуса. Объёмы и координаты центров масс этих тел, соответственно, составляют:

$$V_1 = \frac{2}{3} \pi r^3 (1 - \cos \alpha), \quad V_2 = \frac{1}{3} \pi r^3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha,$$

$$z_{c_1} = \frac{3}{8} r (1 + \cos \alpha), \quad z_{c_2} = \frac{3}{4} r \cos \alpha.$$

Используя формулу (2.17), получаем координату центра масс шарового сегмента:

$$z_c = \frac{z_{c_1} V_1 - z_{c_2} V_2}{V_1 - V_2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{3}{8}r(1+\cos\alpha) \cdot \frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\alpha) - \frac{3}{4}r\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{3}\pi r^3\cos\alpha}{\frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\alpha) - \frac{1}{3}\pi r^3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha} = \\
&= \frac{\frac{3}{4}r\sin^4\alpha}{2(1-\cos\alpha) - \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha}. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

В частности, центр масс полушара  $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$  находится в точке с координатой

$$z_c = \frac{3}{8}r.$$

Формулы для координат центров масс и некоторых других однородных тел приведены в работах [4,5].

## 2.4. Определение центров масс однородных тел сложной формы

### Пример 1

Определить положение центра масс однородной пластины, изображенной на рис. 2.18, если известны ее размеры,  $a = 0,2$  м.

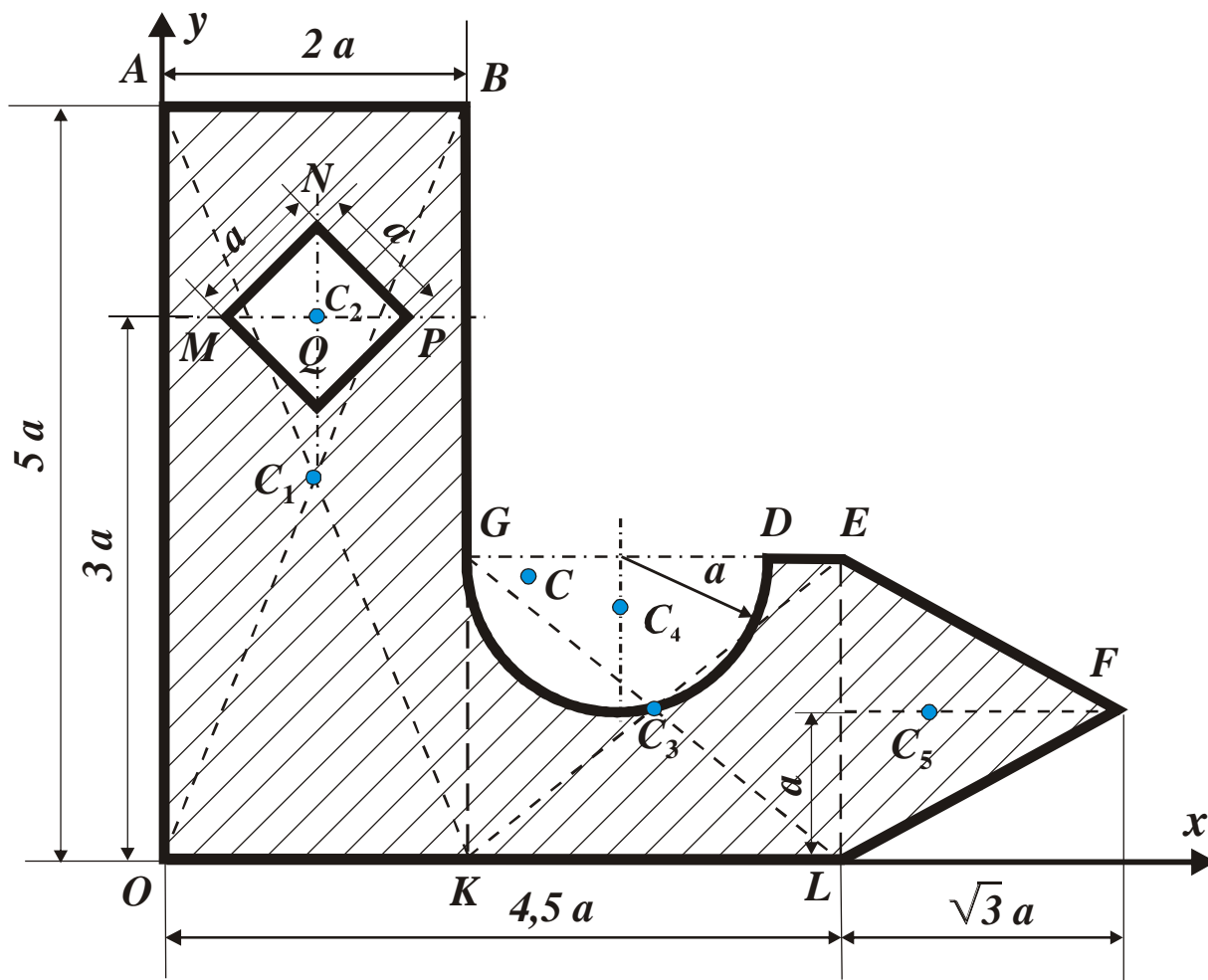


Рис. 2.18

Решение

Воспользуемся способом отрицательных масс. Площадь  $S$  пластины будем рассматривать как площадь фигуры, составленной из таких частей: прямоугольника  $OABK$  с площадью  $S_1$ , из которого вырезан квадрат  $MNPQ$  с площадью  $S_2$ ; прямоугольника  $KGEL$  с площадью  $S_3$ , из которого вырезан полукруг радиуса  $a$  площади  $S_4$ ; треугольника  $EFL$  с площадью  $S_5$ . Центры масс каждой из частей обозначим, соответственно,  $C_i$ ,  $i = \overline{1,5}$ .

Площади и координаты центров масс частей пластины сведем в табл. 1.

Таблица 1

№ части $i$	1	2	3	4	5
$S_i, \text{м}^2$	$10a^2 = 0,4$	$a^2 = 0,04$	$5a^2 = 0,2$	$0,5\pi a^2 \approx$ $\approx 0,063$	$\sqrt{3}a^2 \approx$ $\approx 0,069$
$x_{c_i}, \text{м}$	$a = 0,2$	$a = 0,2$	$4,25a = 0,85$	$3a = 0,6$	$\frac{9}{4}a + \frac{1}{\sqrt{3}}a \approx$ $\approx 1,02$
$y_{c_i}, \text{м}$	$2,5a = 0,5$	$3a = 0,6$	$a = 0,2$	$2a - \frac{4a}{3\pi} \approx$ $\approx 0,32$	$a = 0,2$

Используя формулы (2.15), получаем координаты центра масс пластины:

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{x_{c_1} S_1 - x_{c_2} S_2 + x_{c_3} S_3 - x_{c_4} S_4 + x_{c_5} S_5}{S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5} = \\
 &= \frac{0,2 \cdot 0,4 - 0,2 \cdot 0,04 + 0,85 \cdot 0,2 - 0,6 \cdot 0,063 + 1,02 \cdot 0,069}{0,4 - 0,04 + 0,2 - 0,063 + 0,069} = 0,49 \text{ м}, \\
 y_c &= \frac{y_{c_1} S_1 - y_{c_2} S_2 + y_{c_3} S_3 - y_{c_4} S_4 + y_{c_5} S_5}{S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5} = \\
 &= \frac{0,5 \cdot 0,4 - 0,6 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,2 - 0,32 \cdot 0,063 + 0,2 \cdot 0,069}{0,4 - 0,04 + 0,2 - 0,063 + 0,069} = 0,38 \text{ м}.
 \end{aligned}$$

## Пример 2

Определить положение центра масс однородной детали, состоящей из прямого кругового конуса высотой  $h$  с радиусом основания  $R$  и прямоугольного параллелепипеда размерами  $a \times b \times c$  с общей осью симметрии  $Oz$ , если в ней сделан вырез в виде полуцилиндра радиуса  $r$  (рис. 2.19).

При расчетах принять:

$$\begin{aligned}
 h &= 0,35 \text{ м}; \quad R = 0,14 \text{ м}; \quad a = 0,5 \text{ м}; \quad b = 0,4 \text{ м}; \\
 c &= 0,6 \text{ м}; \quad d = 0,26 \text{ м}; \quad r = 0,11 \text{ м}.
 \end{aligned}$$

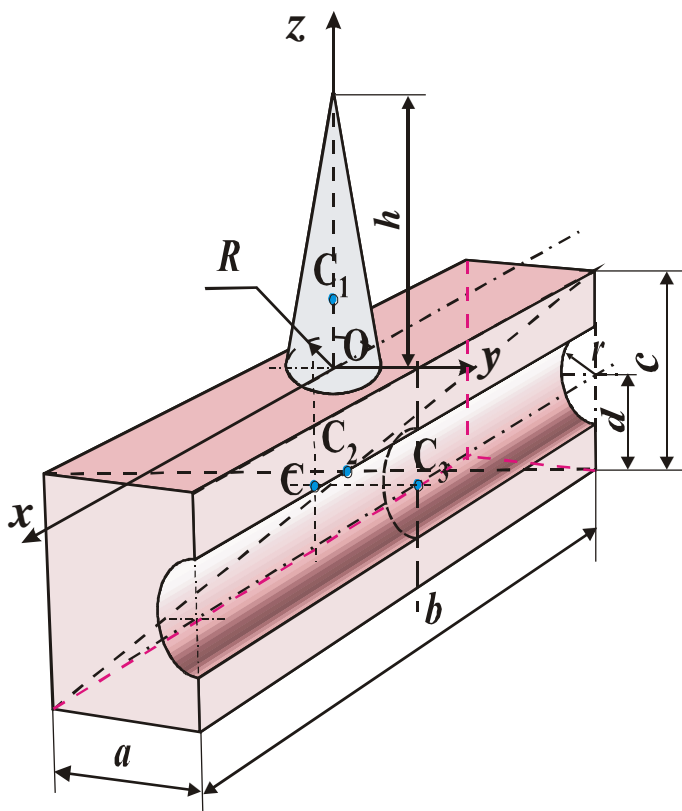


Рис. 2.19

Решение

Воспользуемся способом отрицательных масс. Объем  $V$  детали будем рассматривать как объем тела, составленного из прямого кругового конуса объемом  $V_1$  и прямоугольного параллелепипеда, объемом  $V_2$ , из которого вырезан полукруглый цилиндр объемом  $V_3$ .

Центры масс каждой из частей обозначим, соответственно,  $C_i, i = \overline{1,3}$ .

Объемы и координаты центров масс частей тела сведем в таблицу 2.

Таблица 2

№ части $i$	1	2	3
$V_i, \text{м}^3$	$\frac{1}{3} \pi R^2 h = 0,0072$	$abc = 0,12$	$\frac{\pi r^2 b}{2} = 0,0076$
$x_{C_i}, \text{м}$	0	0	0
$y_{C_i}, \text{м}$	0	0	$\frac{a}{2} - \frac{4r}{3\pi} = 0,2$
$z_{C_i}, \text{м}$	$0,25 h = 0,088$	$-0,5 c = -0,3$	$-(c - d) = -0,34$



Используя формулы (2.15), получаем координаты центра масс детали:

$$x_c = \frac{x_{c_1} V_1 + x_{c_2} V_2 - x_{c_3} V_3}{V_1 + V_2 - V_3} = \frac{0}{0,0072 + 0,12 - 0,0076} = 0,$$

$$y_c = \frac{y_{c_1} V_1 + y_{c_2} V_2 - y_{c_3} V_3}{V_1 + V_2 - V_3} = \frac{-0,2 \cdot 0,0076}{0,0072 + 0,12 - 0,0076} = -0,013 \text{ м},$$

$$z_c = \frac{z_{c_1} V_1 + z_{c_2} V_2 - z_{c_3} V_3}{V_1 + V_2 - V_3} = \frac{0,088 \cdot 0,0072 - 0,3 \cdot 0,12 - 0,34 \cdot 0,0076}{0,0072 + 0,12 - 0,0076} = -0,31 \text{ м}.$$

### 3. Моменты инерции

Как уже говорилось, анализ динамики материальных объектов невозможен без определения их инертных свойств. Для материальных точек мерой инертности является масса. Поэтому первой характеристикой механической системы, о которой говорилось выше, были масса и центр масс. Опыт показывает, что если материальный объект совершает не поступательное движение (вращательное, плоское и др.), то для определения инерционных свойств объекта одной массы недостаточно. Важнейшее свойство материального объекта – распределение массы в пространстве.

Так, при вращательном движении двух палочек с одинаковой массой под действием одной и той же пары сил с моментом  $M$ , но разными длинами около центральной оси угловое ускорение короткой палочки будет выше, чем у длинной палочки.

Следовательно, удалённость точек системы от оси вращения – важное свойство, определяющее её инерционные свойства при вращательном движении (рис. 3.1 и 3.2).

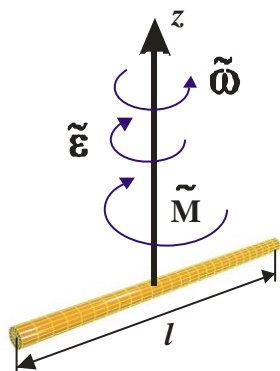


Рис. 3.1

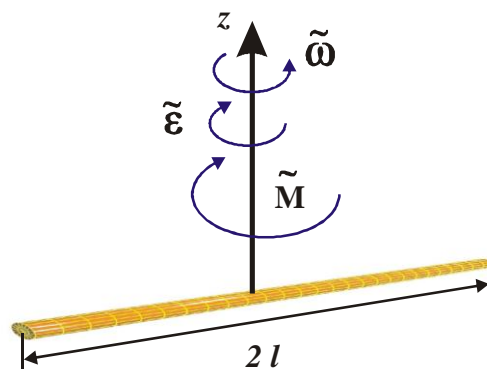


Рис. 3.2

Не только удалённость точек системы от оси определяет динамические свойства объекта.

Рассмотрим вращательное движение двух круглых пластинок около оси, проходящей через центр однородной круглой пластины (рис. 3.3 и 3.4).

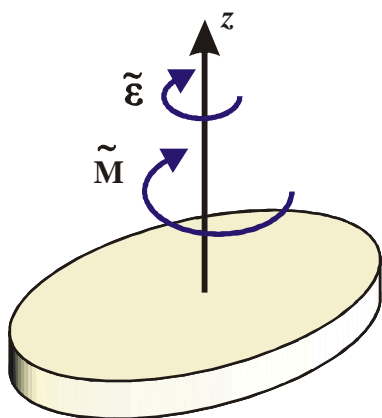


Рис. 3.3

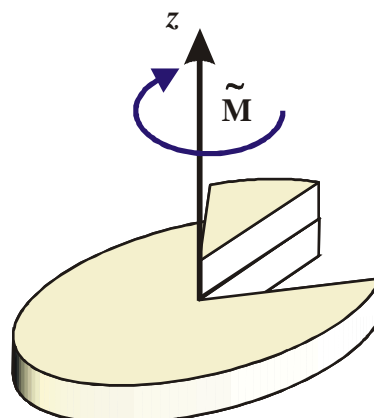


Рис. 3.4

У первой и второй пластины одинаковы массы и радиус. Первая пластина – однородный сплошной диск, а у второй вырезан сектор и переложен на другую часть пластины, как показано на рис. 3.4.

Ясно, что у тел не только одинаковы массы, но и удалённость частичек от оси  $z$ . Динамические же свойства этих тел различны. Отсюда можно сделать вывод о том, что симметричность распределения массы тела по квадрантам также важная геометрическая и массовая характеристики материальных объектов.

Для определения распределения массы объекта в пространстве вводят величины, являющиеся однородными функциями координат точек механической сис-

темы. Все эти величины, называемые моментами, равны сумме произведений массы точек системы на однородные функции координат:

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k^\alpha y_k^\beta z_k^\gamma,$$

где сумма показателей степеней  $e = \alpha + \beta + \gamma$  определяет порядок момента.

### 3.1. Статические моменты инерции

Момент первого порядка 
$$\vec{S}_O = \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \quad (3.1)$$

называют статическим моментом точек (механической системы) относительно центра  $O$ .

В формуле (3.1)  $\vec{r}_k$  – радиус-вектор  $k$ -той точки относительно центра  $O$ .

Используя формулу (1.2) для определения положения центра масс, получаем:

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{S}_O}{M}, \quad M \vec{r}_c = \vec{S}_O. \quad (3.2)$$

Проектируя (3.1) и (3.2) на оси декартовой системы координат, записываем:

$$x_c = \frac{S_{Oyz}}{M}, \quad y_c = \frac{S_{Oxz}}{M}, \quad z_c = \frac{S_{Oxy}}{M}. \quad (3.3)$$

Выражения  $\sum m_k x_k = S_{Oyz}$ ,  $\sum m_k y_k = S_{Oxz}$ ,  $\sum m_k z_k = S_{Oxy}$  называют статическими моментами инерции системы относительно координатных плоскостей:

$$M \cdot x_c = S_{Oyz}, \quad M \cdot y_c = S_{Oxz}, \quad M \cdot z_c = S_{Oxy}. \quad (3.4)$$

Для тел с непрерывным распределением массы суммы в равенствах (3.1 – 3.4) превратятся в интегралы по массе тела.

$$\begin{aligned} \vec{S}_O &= \lim_{\Delta m_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{r}_k (\Delta m_k), \\ \vec{S}_O &= \int_{(M)} \vec{r} dm, \\ S_{Oxy} &= M \cdot z_c = \int_{(M)} z dm, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$S_{Oxz} = M \cdot y_c = \int_{(M)} y dm, \quad (3.6)$$

$$S_{Oyz} = M \cdot x_c = \int_{(M)} x dm.$$

Если тело однородно ( $\rho = \text{const}$ ),

$$dm = \rho \cdot dV, \quad M = \rho \cdot V,$$

где  $dV$  – объём элементарной частицы;  $V$  – объём тела.

В формулах (3.5) и (3.6) интегралы можно брать по объёму тела:

$$\vec{S}_O = \int_{(V)} \vec{r} dV,$$

$$S_{Oxy} = \int_{(V)} z dV.$$

Для однородной поверхности:

$$\vec{S}_O = \int_{(S)} \vec{r} dS,$$

$$S_{Oxy} = \int_{(S)} z dS,$$

так как  $dm = \rho_1 dS$ ,  $M = \rho_1 S$ .

Здесь  $dS$  – площадь поверхности элементарной частицы;

$S$  – площадь всей поверхности;

$\rho_1$  – поверхностная плотность, кг/м<sup>2</sup>.

Для однородной линии:

$$dm = \rho_2 dl, \quad M = \rho_2 l,$$

где  $\rho_2$  – линейная плотность, кг/м;

$dl$  – длина элементарной частицы;

$l$  – длина всей линии.

$$\vec{S}_O = \int_{(l)} \vec{r} dl,$$

$$S_{Oxy} = \int_{(l)} z dl.$$

Относительно центра масс  $C$  и относительно координатных плоскостей, проходящих через центр масс, статические моменты инерции равны нулю.

$$\vec{S}_C = \sum m_k \vec{\rho}_k = M \vec{\rho}_C = 0.$$

Здесь:  $\vec{\rho}_k$  – радиус-векторы точек системы относительно этого же центра масс.

$$S_{Oxy} = \sum m_k z_k = M \cdot z_C = 0, \text{ так как } z_C = 0.$$

### 3.2. Осевые и полярные моменты инерции

Моменты второго порядка выражаются либо через квадраты координат, либо через их попарные произведения. Они называются моментами инерции.

Моментом инерции точки относительно центра  $O$  (*полярным моментом инерции*) называют произведение массы точки на квадрат расстояния от точки до центра  $O$ :

$$I_O = m \cdot r^2. \quad (3.7)$$

Осевым моментом инерции точки относительно оси  $l$  называют произведение массы точки на квадрат расстояния от точки до оси  $l$ :

$$I_l = m \cdot h^2. \quad (3.8)$$

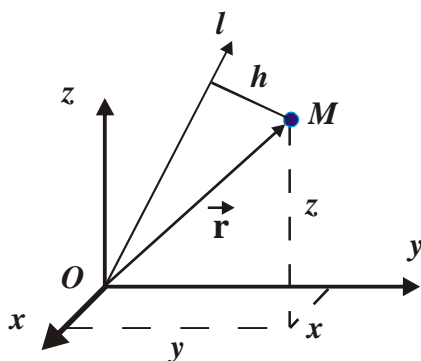


Рис. 3.5

Осевые моменты инерции точки относительно осей прямой декартовой системы координат составляют:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= m(y^2 + z^2), \\ I_y &= m(x^2 + z^2), \\ I_z &= m(x^2 + y^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Сложив осевые моменты инерции в (3.9), получим:

$$I_x + I_y + I_z = 2 \cdot m(x^2 + y^2 + z^2), \quad 2I_O = I_x + I_y + I_z. \quad (3.10)$$

Так как полярный момент инерции не зависит от направления осей системы координат, то сумма осевых моментов инерции точки и любого объекта инвариантна к положению осей в пространстве.

Для механической системы и материальных точек с массами  $\{m_k\}$  и координатами  $\{x_k, y_k, z_k\}$  можно ввести такие же меры.

Полярный и осевые моменты инерции равны:

$$I_O = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2. \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2), \\ I_y = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2), \\ I_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Аналогично предыдущему

$$2I_O = I_x + I_y + I_z.$$

Если определить моменты инерции системы относительно координатных плоскостей  $Oxy, Oxz, Oyz$  как

$$I_{Oxy} = \sum m_k z_k^2, \quad I_{Oyz} = \sum m_k x_k^2, \quad (3.13)$$

$$I_{Oxz} = \sum m_k y_k^2,$$

то можно получить такие равенства:

$$\left. \begin{array}{l} I_0 = I_{Oxy} + I_{Oxz} + I_{Oyz}, \\ I_x = I_{Oxz} + I_{Oxy}, \\ I_y = I_{Oyz} + I_{Oxy}, \\ I_z = I_{Oyz} + I_{Oxz}. \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

Для тел с непрерывным распределением массы осевые моменты инерции определяются интегралами по массе:

$$I_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm. \quad (3.15)$$

Для осевых моментов инерции справедливы также следующие неравенства:

$$I_x + I_y > I_z > \pm I_x \mp I_y, \quad I_x + I_z > I_y > \pm I_x \mp I_z, \\ I_y + I_z > I_x > \pm I_y \mp I_z.$$

Момент инерции относительно любой координатной оси меньше суммы моментов инерции относительно двух других осей, но меньше их разности. Это соотношение можно назвать правилом треугольника. Осевые моменты инерции обладают свойствами сторон треугольника.

Исключение составляет момент инерции плоской фигуры относительно оси, перпендикулярной плоскости фигуры. Он равен сумме моментов инерции фигуры относительно взаимно перпендикулярных осей в этой плоскости.

Единица измерения осевых моментов инерции –  $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Осевые моменты инерции не зависят от симметричности расположения массы по квадрантам, так как знаки координат в них не учитываются.

### 3.3. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции

Центробежные моменты инерции (*произведения инерции*) учитывают знаки координат.

$$\text{Для точки: } I_{yx} = I_{xy} = mxy, \quad I_{xz} = I_{zx} = mxz, \quad I_{yz} = I_{zy} = myz. \quad (3.16)$$

где  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$  – центробежные моменты инерции точки относительно соответствующих осей.

Для механической системы точек с массами  $\{m_k\}$ , координатами

$$\{x_k, y_k, z_k\}_1^n:$$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k, \quad I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k. \quad (3.17)$$

Для сплошного тела:

$$I_{xy} = \int_{(M)} x y dm, \quad I_{xz} = \int_{(M)} x z dm, \quad I_{yz} = \int_{(M)} y z dm. \quad (3.18)$$

Осевые и полярные моменты инерции могут быть только положительными или равными нулю. Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

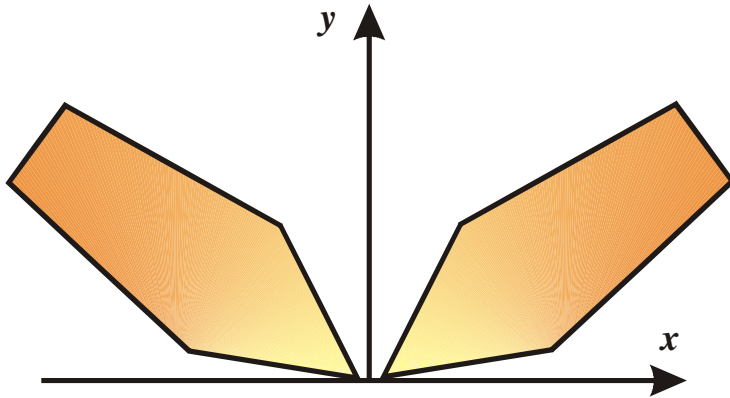


Рис. 3.6

Если тело состоит из частей, симметрично расположенных в первом и втором квадрантах (третьем и четвертом), где произведения координат имеют противоположные знаки, центробежные моменты инерции, содержащие эти координаты, равны нулю.

Для тела, сечение которого изображено выше, (рис. 3.6)  $I_{xy} = 0$ .

Главной осью инерции системы (тела) называют такую ось, для которой оба центробежных момента инерции, содержащие координату вдоль этой оси, равны нулю.

Если  $I_{xz} = I_{yz} = 0$ , то  $z$  – главная ось инерции.

Если  $I_{xy} = I_{xz} = 0$ , то  $x$  – главная ось инерции.

Если  $I_{xy} = I_{yz} = 0$ , то  $y$  – главная ось инерции.

Отсюда можно сделать вывод: если две оси прямоугольной декартовой системы координат – главные оси инерции, то третья ось тоже главная ось инерции.

Положение главной оси инерции системы (тела) необходимо определять. Пути решения этой задачи указаны ниже, но в ряде широко распространённых случаев можно по форме тела сразу указать, какие оси являются главными.

Из всех случаев выделим два:

- ось симметрии тела;
- ось, перпендикулярная плоскости симметрии тела с началом в этой плоскости.



Рассмотрим каждый случай подробнее.

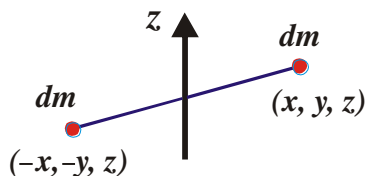


Рис. 3.7

1. Если  $z$  – ось симметрии (рис. 3.7), то тело состоит из попарно симметричных относительно оси частичек одинаковой массы с координатами  $(x, y, z)$  и  $(-x, -y, z)$ .

Центробежные моменты инерции  $I_{xz}$ ,  $I_{yz}$  этих двух частичек:

$$I_{xz} = dm(xz - xz) = 0, \quad I_{yz} = dm(yz - yz) = 0.$$

Следовательно, оба центробежных момента инерции частиц, а значит, и всего тела, равны нулю. **Ось симметрии тела – главная ось инерции.**

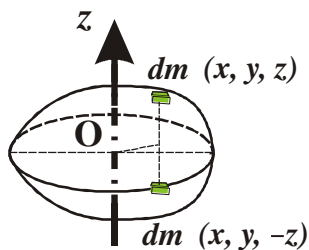


Рис. 3.8

2. Если ось  $z$  – перпендикулярна плоскости симметрии тела и имеет начало в этой плоскости (рис. 3.8), то для двух симметричных частичек тела справедливо:  $I_{xz} = dm(x \cdot z - x \cdot z) = 0$ ,  $I_{yz} = dm(y \cdot z - y \cdot z) = 0$ .

Следовательно, в этом случае можно сделать вывод: **ось, перпендикулярная плоскости симметрии тела и имеющая начало в этой плоскости – главная ось инерции тела.**

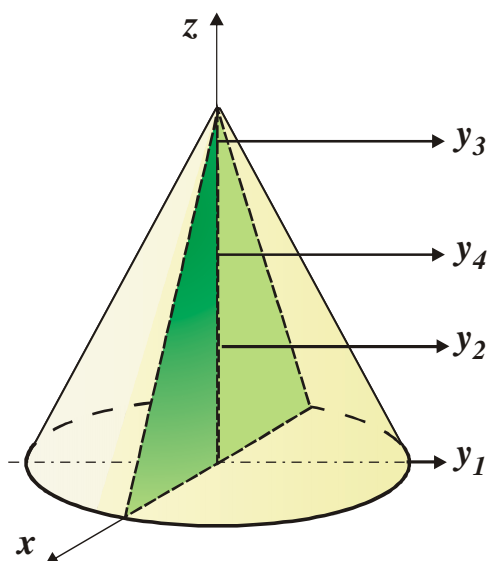


Рис. 3.9

Например, для прямого кругового конуса все изображённые на рисунке 3.9 оси – главные оси инерции.

На рис. 3.9:

$z$  – ось симметрии тела,

$x, y_1, y_2, y_3, y_4$  – оси, перпендикулярные

плоскости симметрии тела с началом в этой плоскости.

Полезно использовать и такое свойство главной оси: *если центр масс лежит на главной оси инерции (главная ось является центральной осью), то она является главной для всех её точек.*

Докажем это утверждение.

Пусть ось  $z$  – главная центральная ось инерции тела. Проведём также две центральные оси  $Cx, Cy$  (рис. 3.10).

Тогда

$$I_{xz} = I_{yz} = 0; \quad x_c = y_c = 0.$$

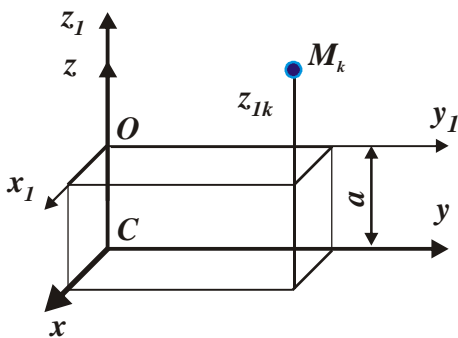


Рис. 3.10

Проведём оси  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  с началом в произвольной точке  $O$  главной центральной оси  $z$ . Покажем, что  $I_{x_1z_1} = I_{y_1z_1} = 0$ , т.е. что ось  $z_1$  также главная ось инерции тела:

$$\begin{aligned} I_{x_1z_1} &= \int_{(M)} x_1 z_1 dm = \int_{(M)} x z_1 dm = \int_{(M)} x(z-a) dm = \\ &= \int_{(M)} x z dm - a \int_{(M)} x dm = I_{xz} - a M \cdot x_c = I_{xz} = 0, \\ I_{y_1z_1} &= \int_{(M)} y_1 z_1 dm = \int_{(M)} y(z-a) dm = I_{yz} - a M \cdot y_c = 0. \end{aligned}$$

### 3.4. Осевые моменты инерции тел простейшей формы

Получим формулы для определения осевых моментов инерции для однородных тел с часто встречающейся формой.

#### 3.4.1. Однородное тонкое кольцо массой $M$ , радиусом $R$

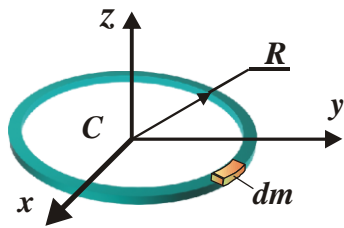


Рис. 3.11

Выделим частицу массой  $dm$ , расстояние от частицы до центральной оси  $z$  равно радиусу. Осевой момент инерции кольца относительно оси  $z$ :

$$I_z = \int_{(M)} R^2 dm = R^2 \int_{(M)} dm = M R^2.$$

Моменты инерции относительно центра  $C$  кольца и оси  $z$  равны между собой:

$$I_z = I_c = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = M R^2. \quad (3.19)$$

Но известно, что

$$2I_c = I_x + I_y + I_z. \quad (3.20)$$

Следовательно,

$$I_x + I_y = I_c = I_z.$$

В силу симметричности тела

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{M R^2}{2}. \quad (3.21)$$

### 3.4.2. Однородный тонкий диск. массой $M$ , радиусом $R$

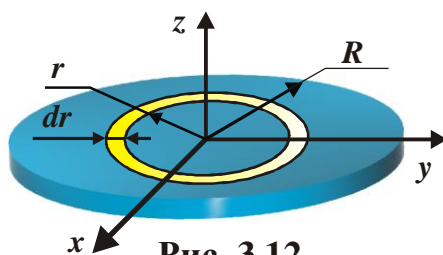


Рис. 3.12

Выделим в теле диска однородное тонкое кольцо текущим радиусом  $r$ , толщиной  $dr$ .

Масса элементарного кольца

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2M}{R^2} r dr.$$

Осевой момент инерции элементарного кольца относительно оси  $z$

$$dI_z = dm r^2 = \frac{2M}{R^2} r^3 dr.$$

Осевой момент инерции всего диска относительно оси  $z$  после интегрирования по  $r$

$$I_z = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}. \quad (3.22)$$

Так же, как и для тонкого кольца будем иметь:

$$\begin{aligned} I_z = I_c = \frac{MR^2}{2}, \quad 2I_c = I_x + I_y + I_z, \\ I_x + I_y = I_c = \frac{MR^2}{2}, \\ I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{MR^2}{4}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.4.3. Тонкий стержень Умассой $M$ , длиной $l$

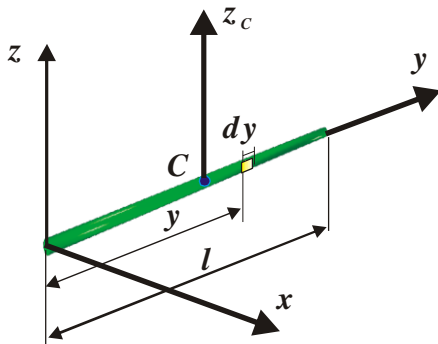


Рис. 3.13

Выделим частицу стержня длиной  $dy$ . Масса частицы

$$dm = \frac{M}{l} dy.$$

Осевые моменты инерции относительно осей  $z$  и  $x$  равны:

$$I_z = I_x = \frac{M}{l} \int_0^l y^2 dy = \frac{M l^2}{3}. \quad (3.24)$$

Подсчитаем моменты инерции стержня относительно центральных осей  $z_c, x_c$ . Считая, что стержень состоит из двух половинок массой  $\frac{M}{2}$ , длиной  $\frac{l}{2}$ , моменты инерции которых относительно этих осей можно считать по формуле (3.24), получим:

$$I_{z_c} = I_{x_c} = 2 \cdot \frac{M}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^2 \frac{1}{3} = \frac{M l^2}{12}. \quad (3.25)$$

#### 3.4.4. Прямоугольная тонкая пластина $U$ массой $M$ , размерами $a \times b$

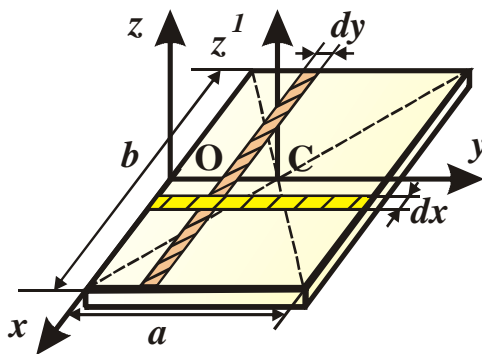


Рис. 3.14

Плотность материала пластины

$$\rho = \frac{M}{a \cdot b}.$$

Выделим элементарную полоску пластины толщиной  $dx$ , параллельную оси  $y$ .

Масса полоски

$$dm = \frac{M}{a \cdot b} \cdot a \cdot dx = \frac{M}{b} dx.$$

Момент инерции полоски относительно оси  $x$  (3.24)

$$dI_x = \frac{dm a^2}{3} = \frac{M a^2}{b \cdot 3} dx.$$

Отсюда для всей пластины:

$$I_x = \frac{M a^2}{3b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx = \frac{M a^2}{3}. \quad (3.26)$$

Для определения момента инерции относительно оси  $y$  выделим полоску толщиной  $dy$ , перпендикулярную оси  $y$ .

Масса полоски

$$dm = \frac{M}{a \cdot b} \cdot b \cdot dy = \frac{M}{a} dy.$$

Момент инерции полоски относительно оси  $y$  (3.25)

$$dI_y = \frac{dm b^2}{12} = \frac{M b^2}{12a} dy.$$

Для всей пластины получим

$$I_y = \frac{M b^2}{12a} \int_0^a dy = \frac{M b^2}{12}. \quad (3.27)$$

Для оси  $z$  будем иметь

$$2I_z = 2I_0 = I_x + I_y + I_z,$$

или

$$I_z = I_x + I_y = M \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} \right). \quad (3.28)$$

Если выделить частицу с координатами  $(x, y)$  площадью  $dx \cdot dy$ , то проинтегрировав по массе пластины получим формулу (3.28) иным путём:

$$I_z = \frac{M}{a \cdot b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^a (x^2 + y^2) dy dx = M \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} \right). \quad (3.29)$$

Используя те же соображения, что и при выводе формулы (3.29), для осевого момента пластины относительно оси  $z'$  получаем

$$I_{z'} = \frac{M}{a \cdot b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) dy dx = \frac{M}{12} (a^2 + b^2). \quad (3.30)$$

3.4.5. Прямой круговой цилиндр  $U$  массой  $M$ , радиусом  $R$ , высотой  $H$

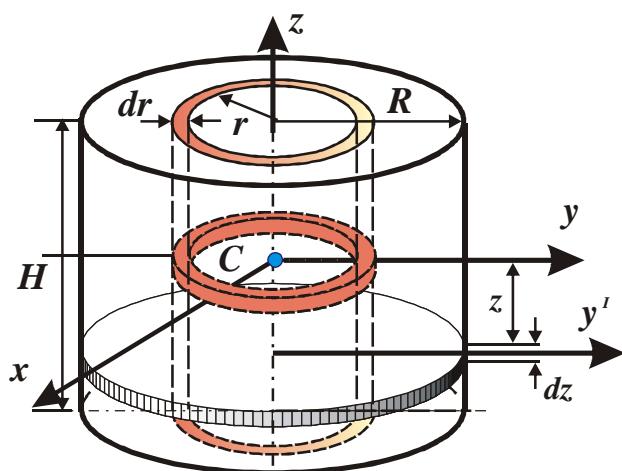


Рис. 3.15

Разбивая цилиндр на элементарные цилиндры радиусом  $r$ , толщиной  $dr$ , момент инерции всего цилиндра (рис. 3.15) относительно продольной оси симметрии  $Cz$  определим по формуле

$$I_z = \int_{(M)} r^2 dm.$$

Плотность материала цилиндра  $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 H}$ , элементарная масса

$$dm = \rho dV = \rho H 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr.$$

После подстановки имеем

$$I_z = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}. \quad (3.31)$$

Выделим в цилиндре множество элементарных дисков радиусом  $R$ , толщиной  $dz$ .

Для каждого элементарного диска осевой момент инерции относительно оси  $Cy$  найдется по теореме Гюйгенса–Штейнера (3.49) как сумма момента инерции относительно центральной оси  $y'$  и произведения его массы на квадрат расстояния между осями  $y$  и  $y'$ :  $dI_y = dI_{y'} + z^2 dm$ , где  $dI_{y'}$  подсчитывается по формуле (3.23)

$$dI_{y'} = dm \frac{R^2}{4}$$

Для всего цилиндра

$$I_y = \int_{(M)} z^2 dm + \int_{(M)} \frac{R^2}{4} dm, \text{ где } dm = \rho \pi R^2 dz = \frac{M}{H} dz;$$

Откуда

$$I_x = I_y = \frac{M}{H} \int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz + \frac{M}{4H} R^2 \int_{-H/2}^{H/2} dz = M \left( \frac{H^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right).$$

Момент инерции однородного Уполого цилиндра массой  $M$  с внешним радиусом  $R$  и внутренним  $R_0$  относительно оси  $Cz$  представим как разность моментов инерции сплошных цилиндров радиусами  $R$  и  $R_0$ .

С учётом формулы (3.31) будем иметь

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z(R)} - I_{z(R_0)} = M(R) \frac{R^2}{2} - M(R_0) \frac{R_0^2}{2} = \\ &= \frac{\pi \rho H}{2} (R^4 - R_0^4) = \frac{1}{2} \rho \pi H (R^2 - R_0^2)(R^2 + R_0^2) = \frac{1}{2} M (R^2 + R_0^2), \end{aligned}$$

где  $\rho \pi H (R^2 - R_0^2) = M$  – масса полого цилиндра;  $M(R_0) = \rho \pi H R_0^2$  – масса цилиндра-отверстия;  $M(R) = \rho \pi H R^2$  – масса сплошного цилиндра;  $\rho$  – плотность его материала.

### 3.4.6. Шар

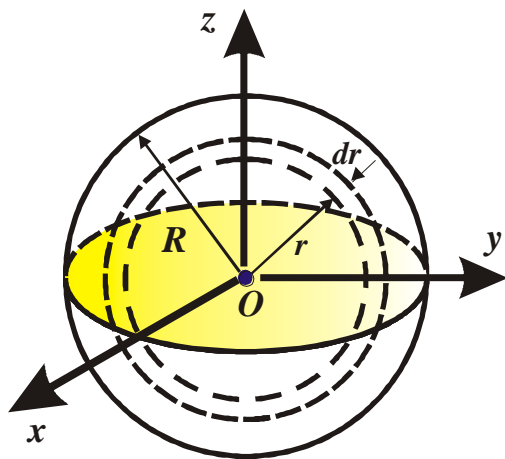


Рис. 3.16

Момент инерции однородного шара, масса которого  $M$  и радиус  $R$  (рис. 3.16), относительно любой оси одинаков в силу его симметрии, т.е.  $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} I_0$ . Полярный момент инерции

$$I_0 = \int_{(M)} r^2 dm,$$

где  $dm$  – масса элементарной полой сферы радиусом  $r$  толщиной  $dr$ ,



$$dm = \rho 4\pi r^2 dr; \quad \rho = M/V = 3M/(4\pi R^3).$$

Итак,  $dm = \frac{3M}{R^3} r^2 dr$ , откуда

$$I_0 = \frac{3M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} MR^2.$$

Следовательно,

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} MR^2.$$

Для полого шара с внешним  $R$  и внутренним  $R_0$  радиусами имеем

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z_{(R)}} - I_{z_{(R_0)}} = \frac{2}{5} \rho (V_{(R)} R^2 - V_{(R_0)} R_0^2) = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho (R^5 - R_0^5) = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - R_0^5}{R^3 - R_0^3}, \end{aligned}$$

где  $M = \frac{4}{3} \pi \rho (R^3 - R_0^3)$  – масса полого шара,  $V_{(R)} = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$ ,  $V_{(R_0)} = \frac{4}{3} \pi \rho R_0^3$

Для тонкой сферической оболочки массы  $M$ , радиусом  $R$  предельным переходом получаем

$$I_0 = MR^2, \quad I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} MR^2. \quad (3.32)$$

### 3.5. Радиус инерции

*Момент инерции тела сложной формы относительно любой оси, например, оси  $z$ , можно представить в виде произведения массы  $M$  тела на квадрат линейной величины  $\rho_z$ , называемой радиусом инерции тела относительно этой оси:*

$$I_z = M \rho_z^2.$$

Согласно последней формуле радиус инерции тела относительно оси определяет расстояние от оси до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела, чтобы ее момент инерции оказался равным моменту инерции тела.

Таким образом, зная радиус инерции тела относительно оси, можно определить момент инерции его относительно этой оси и наоборот.

Так, радиус инерции цилиндра относительно его продольной оси  $z$  равен

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \frac{mR^2/2}{m} = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ [м]}.$$

Радиус инерции тела сложной формы относительно какой либо оси можно либо вычислить, либо определить экспериментально. Например, период малых колебаний такого тела относительно горизонтальной оси определит радиус инерции относительно оси вращения. Более подробно по этому поводу можно посмотреть в [10].

Для тел сложной формы, широко распространенных в практике, существуют таблицы радиусов или осевых моментов инерции обычно относительно центральных осей.

### 3.6. Моменты инерции однородных тел вращения

Воспользуемся цилиндрической системой координат (рис. 3.17). Сечение тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения  $Oz$ , ограничено кривой  $L$ , уравнения которой на участках  $AA'A_1$ ,  $AA''A_1$  имеют вид:

$$r_1 = f_1(z), \quad r_2 = f_2(z).$$

Момент инерции тела массой  $M$  относительно оси вращения  $Oz$

$$I_z = \int_{(M)} r^2 dm = \rho \int_{(V)} r^2 dV.$$

Элементарный объём тела вращения

$$dV = r dr d\varphi dz,$$

Тогда

$$I_z = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \rho \frac{\pi}{2} \int_{z_1}^{z_2} [f_2^4(z) - f_1^4(z)] dz.$$

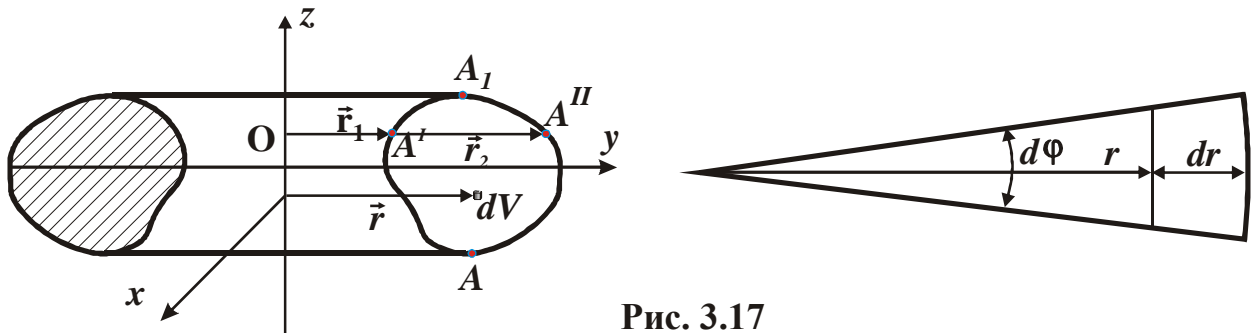


Рис. 3.17

Объём тела вращения

$$V = \int_{(V)} dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r_1}^{r_2} r dr = \pi \int_{z_1}^{z_2} [f_2^2(z) - f_1^2(z)] dz.$$

Окончательно находим:

$$I_z = \frac{M}{2} \frac{\int_{z_1}^{z_2} [f_2^4(z) - f_1^4(z)] dz}{\int_{z_1}^{z_2} [f_2^2(z) - f_1^2(z)] dz}. \quad (3.33)$$

Из условия симметрии  $\int_{(M)} x^2 dm = \int_{(M)} y^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{2} I_z$ , сле-

довательно,

$$\begin{aligned}
 I_x = I_y &= \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm = \\
 &= \int_{(M)} z^2 dm + \frac{1}{2} I_z,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

где

$$\int_{(M)} z^2 dm = \frac{\pi M}{V} \int_{z_1}^{z_2} z^2 [f_2^2(z) - f_1^2(z)] dz. \tag{3.35}$$

Для определения момента инерции однородного прямого кругового конуса массой  $M$  относительно оси  $Oz$  (рис. 3.18) запишем уравнения прямых, ограничивающих тело вращения (треугольник  $OAB$ ):

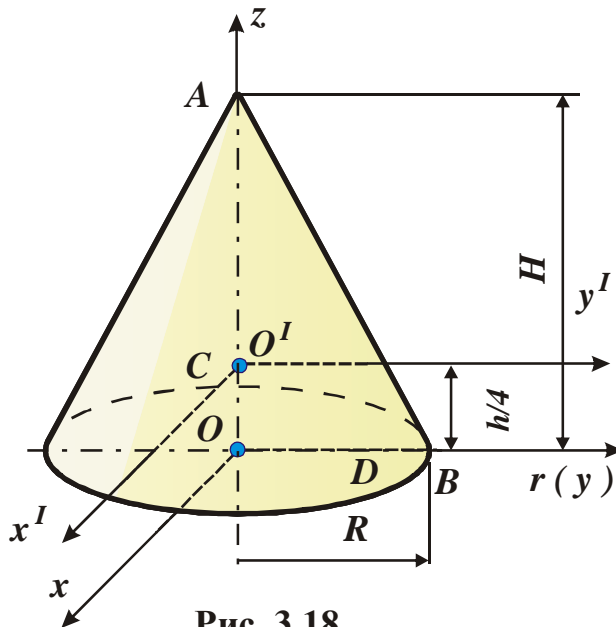


Рис. 3.18

$$r_1 = 0, r_2 = f_2(z) = R \left( 1 - \frac{z}{H} \right),$$

$$z_1 = 0, z_2 = H.$$

Для формулы (3.33) имеем: интеграл в числителе

$$\int_0^H R^4 \left( 1 - \frac{z}{H} \right)^4 dz = \frac{R^4 H}{5},$$

в знаменателе –

$$\int_0^H R^2 \left( 1 - \frac{z}{H} \right)^2 dz = R^2 \frac{H}{3} = \frac{V}{\pi},$$

(объем конуса  $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$ ).

Получим

$$I_z = 0,3MR^2.$$

**Замечание.** Момент инерции конуса относительно оси  $Oz$  можно вычислить и другим способом. Выделим в конусе множество элементарных полых цилиндров высотой  $h$ , радиусом  $r$ , толщиной стенок  $dr$  (рис. 3.19).

Момент инерции элементарного цилиндра  $dI_z = r^2 dm$ , масса элементарного цилиндра

$$dm = 2\pi r h \rho dr.$$

Из подобия треугольников  $EDB$  и  $OAB$  имеем  $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ .

Тогда  $dm = 2\pi\rho \frac{H}{R}(R-r)rdr$ .

Для всего цилиндра  $I_z = \int_{(M)} r^2 dm$ .

Следовательно,  $I_z = 2\pi\rho H \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^3 dr = 2\pi\rho H \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{5}\right) = 0,1\pi\rho HR^4$ .

Или  $I_z = 0,3MR^2$ ,

где  $M = \rho\pi R^2 H/3$  – масса конуса.

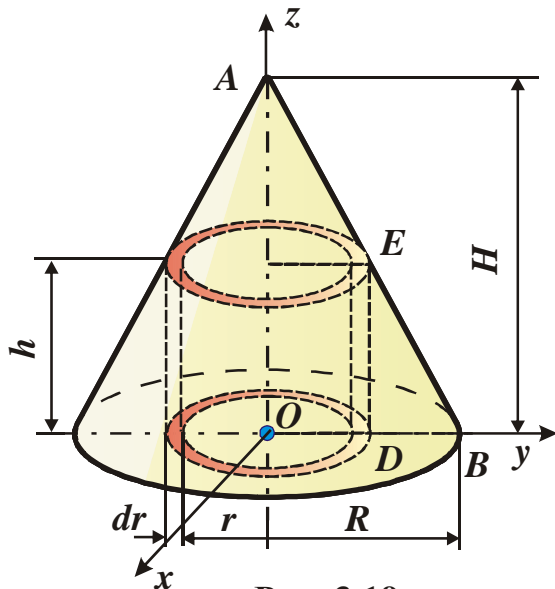


Рис. 3.19

Согласно (3.34) и (3.35),

$$I_x = I_y = \int_{(M)} z^2 dm + \frac{1}{2} I_z,$$

$$\int_{(M)} z^2 dm = \frac{\pi M}{V} \int_0^H R^2 z^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 dz = \frac{\pi M R^2 H^3}{V \cdot 30}.$$

Таким образом,

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} + \frac{\pi\rho R^2 H^3}{30} = (0,15R^2 + 0,1H^2).$$

### 3.7. Примеры

**Пример 1.** Определить момент инерции однородного треугольника относительно оси  $Ox$  (рис. 3.20).

*Решение*

Момент инерции  $I_x = \int_{(M)} y^2 dm$ ,

где  $dm = \rho l_y dy$ ;  $\rho = M/S$ ;  $l_y = \frac{a}{h}(h-y)$ ; ( $\rho, S$  – плотность материала и площадь треугольника соответственно).

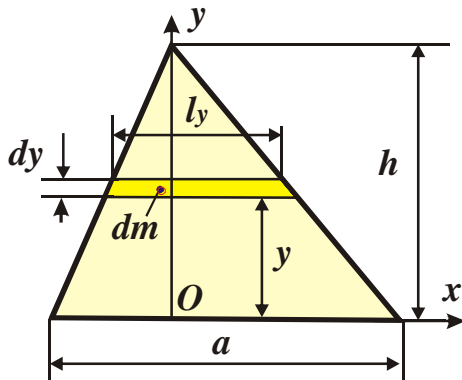


Рис. 3.20

После подстановки имеем:

$$dm = \frac{M}{S} \frac{a}{h} (h-y) dy,$$

$$I_x = \frac{M}{S} \frac{a}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy =$$

$$= \frac{M}{S} \frac{ah^3}{12}, \quad S = \frac{ah}{2}.$$

Откуда находим

$$I_x = \frac{Mh^2}{6}.$$

**Пример 2.** Определить моменты инерции прямоугольного параллелепипеда относительно координатных осей (рис. 3.21).

*Решение*

Момент инерции относительно оси  $Oz$

$$I_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm, \quad \text{где } dm = \rho c dx dy, \rho = M/(abc).$$

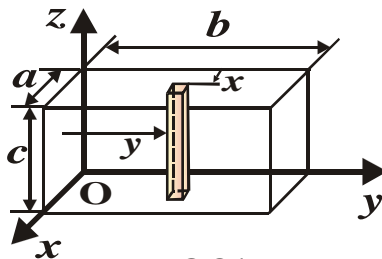


Рис. 3.21

После подстановки получим

$$I_z = \frac{M}{ab} \int_0^b dy \int_0^a (x^2 + y^2) dx = \frac{M}{3} (a^2 + b^2)$$

Аналогично находим:

$$I_x = \frac{M}{3} (b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{M}{3} (a^2 + c^2).$$

**Пример 3.** Определить момент инерции однородного тора относительно оси симметрии  $Oz$  (рис. 3.22).

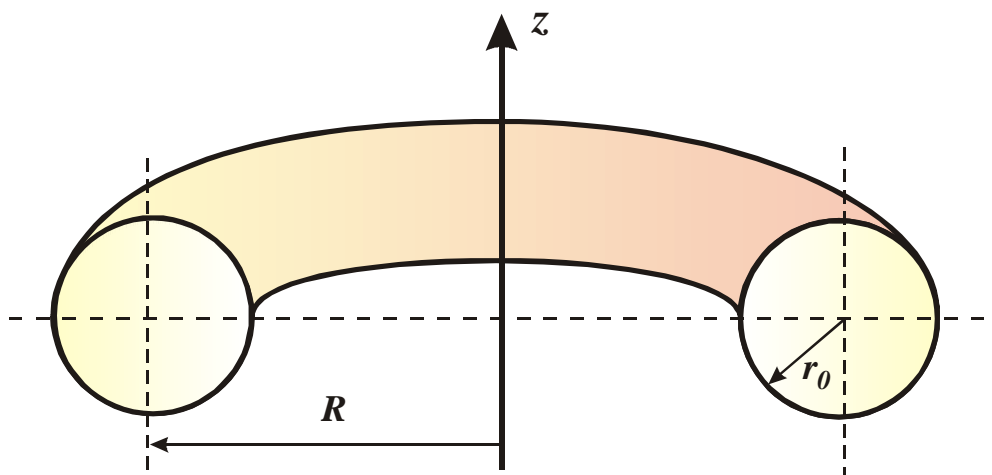


Рис. 3.22

*Решение*

Воспользуемся формулой (3.33), в которой  $f_1(z) = R - \sqrt{r_0^2 - z^2}$ ,  
 $f_2(z) = R + \sqrt{r_0^2 - z^2}$ .

Вычислим интегралы в числителе и знаменателе (3.33), используя подстановку  $z = r_0 \cos \varphi$ :

$$I_1 = \int_{-r_0}^{r_0} 8R(R^2 + r_0^2 - z^2) \sqrt{r_0^2 - z^2} dz = 8Rr_0^2 \int_0^\pi (R^2 + r_0^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = \\ = \pi Rr_0^2 (4R^2 + 3r_0^2),$$

$$I_2 = 4R \int_{-r_0}^{r_0} \sqrt{r_0^2 - z^2} dz = 4R \int_0^\pi r_0^2 \sin^2 \varphi d\varphi = 2\pi Rr_0^2.$$

Окончательно имеем

$$I_z = \frac{M}{2} \frac{\pi R r_0^2 (4R^2 + 3r_0^2)}{2\pi R r_0^2} = M \left( R^2 + \frac{3}{4} r_0^2 \right).$$

### 3.8. Представление тензора инерции в векторной форме

Как видно из изложенного выше, 6 геометрических характеристик материального объекта характеризуют распределение его массы в пространстве. Это – 3 осевых момента и 3 центробежных момента инерции. Для оценки распределения массы объекта в целом вводят понятие тензора инерции объекта в точке  $O$ , начале системы координат  $Oxyz$ :

$$I_O = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \text{ – симметричная матрица.}$$

Вычисление каждого из этих моментов инерции относительно любых осей и любых систем координат можно упростить, если представить тензор инерции в векторном виде.

#### а) Тензор инерции материальной точки.

**Тензор инерции материальной точки** в системе координат  $Oxyz$  (рис. 3.23) в соответствии с формулами для осевых и центробежных моментов инерции в координатной форме

$$I_O = \begin{pmatrix} (y^2 + z^2) & -xy & -xz \\ -yx & (x^2 + z^2) & -yz \\ -zx & -zy & (x^2 + y^2) \end{pmatrix} m \quad (3.36)$$



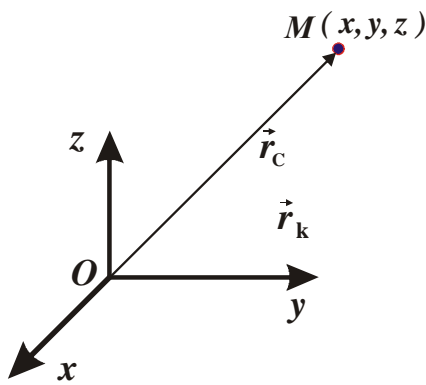


Рис. 3.23

В нём на главной диагонали находятся осевые моменты инерции точки  $I_x, I_y, I_z$ , на побочных диагоналях – центробежные моменты инерции со знаком «-» ( $-I_{xy}, -I_{xz}, -I_{yz}$ ).

Напомним (3.9) и (3.16), что

$$I_x = m(y^2 + z^2), I_y = m(x^2 + z^2),$$

$$I_z = m(x^2 + y^2), I_{xy} = I_{yx} = m x \cdot y;$$

$$I_{xz} = I_{zx} = m x \cdot z, I_{yz} = I_{zy} = m y \cdot z.$$

Построим диадное произведение радиус-вектора точки  $\vec{r}$  на себя самого. Определение диадного произведения дано в приложении 1:

$$\vec{r}\vec{r} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Введём единичный тензор (матрицу):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Скалярное произведение радиус-вектор  $\vec{r}$  самого на себя и на матрицу (3.38)

$$\vec{r}^2 E = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2) & 0 & 0 \\ 0 & (x^2 + y^2 + z^2) & 0 \\ 0 & 0 & (x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Разница между матрицами (3.39) и (3.37), умноженная на массу точки, даёт тензор инерции точки (3.36):

$$I_O = m (\vec{r}^2 E - \vec{r} \vec{r}). \quad (3.40)$$

Здесь будем обозначать:

$$(x^2 + y^2 + z^2) = (\vec{r}, \vec{r}) = \vec{r}^2 - \text{скалярное произведение векторов,}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix} = \vec{r} \vec{r} - \text{диадное произведение векторов.}$$

б) Тензор инерции системы материальных точек и твёрдого тела.

Тензор инерции системы материальных точек с массами  $\{m_k\}_n$  из равенства (3.40) запишется в виде

$$I_O = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{r}_k^2 E - \vec{r}_k \vec{r}_k). \quad (3.41)$$

Для твёрдого тела сумма в (3.41) превратится в интеграл по массе.

$$I_O = \int_{(M)} (\vec{r}^2 E - \vec{r} \cdot \vec{r}) dm. \quad (3.42)$$

### 3.9. Преобразование тензора инерции при параллельном переносе системы координат

Пусть тензор инерции тела или системы в центральных осях системы координат  $Sx_1y_1z_1$  (рис. 3.24) задан:

$$I_C = \begin{pmatrix} I_{x_1} & -I_{x_1y_1} & -I_{x_1z_1} \\ -I_{y_1x_1} & I_{y_1} & -I_{y_1z_1} \\ -I_{z_1x_1} & -I_{z_1y_1} & I_{z_1} \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

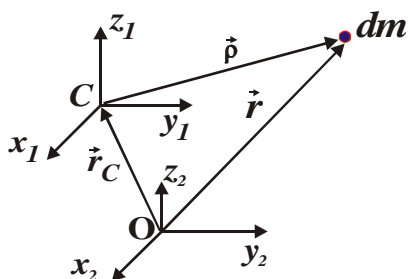
Найдём составляющие тензора инерции в осях системы координат  $Ox_2y_2z_2$ , полученной параллельным переносом из точки  $C$  в точку  $O$ .

Если обозначить радиус-вектор частицы тела относительно центра масс –  $\vec{\rho}$ , а относительно точки  $O$  –  $\vec{r}$ , то тензор инерции тела в точке  $C$  равен:

$$I_C = \int_{(M)} (\vec{\rho}^2 E - \vec{\rho} \cdot \vec{\rho}) dm, \quad (3.44)$$

а в точке  $O$

$$I_O = \int_{(M)} (\vec{r}^2 E - \vec{r} \cdot \vec{r}) dm. \quad (3.45)$$



Из рисунка видно, что

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{\rho}. \quad (3.46)$$

Подставим (3.46) в (3.45), получим:

**Рис. 3.24**

$$I_O = \int_{(M)} [((\vec{r}_C + \vec{\rho}), (\vec{r}_C + \vec{\rho})) E - (\vec{r}_C + \vec{\rho})(\vec{r}_C + \vec{\rho})] dm.$$

Этот интеграл можно представить в виде суммы 8 интегралов:

$$\int_{(M)} r_C^2 E dm, \quad (a)$$

$$\int_{(M)} (\vec{r}_C, \vec{\rho}) E dm, \quad (б)$$

$$\int_{(M)} (\vec{\rho}, \vec{r}_C) E dm, \quad (в)$$

$$\int_{(M)} \rho^2 E dm, \quad (г)$$

$$-\int \vec{r}_c \vec{r}_c dm, \quad (\text{д})$$

$$-\int \vec{r}_c \vec{\rho} dm, \quad (\text{е})$$

$$-\int \vec{\rho} \vec{r}_c dm, \quad (\text{ж})$$

$$-\int \vec{\rho} \vec{\rho} dm. \quad (\text{з})$$

Четвертый и восьмой интегралы образуют тензор инерции (3.44) в центре масс  $C$ . Во втором, третьем, шестом и седьмом – из под интеграла можно вынести  $\vec{r}_c$  и  $E$ , не зависящие от выбора частицы. Тогда, например, получим:

$$\int_{(M)} (\vec{r}_c, \vec{\rho}) E dm = \left( \vec{r}_c, \int_{(M)} \vec{\rho} dm \right) E,$$

$$\int_{(M)} \vec{r}_c \vec{\rho} dm = \vec{r}_c \cdot \int_{(M)} \vec{\rho} dm.$$

Во всех этих случаях под интегралом остаётся радиус-вектор частицы относительно центра масс  $\vec{\rho}$ .

Как известно,

$$\int_{(M)} \vec{\rho} dm = M \cdot \vec{\rho}_c = 0.$$

Таким образом, слагаемые б), в), е) и ж) равны нулю. Оставшиеся слагаемые а) и з)

$$\int \vec{r}_c^2 E dm - \int \vec{r}_c \cdot \vec{r}_c dm = (\vec{r}_c^2 E - \vec{r}_c \cdot \vec{r}_c) \cdot m.$$

Следовательно, формулу (3.45) можно переписать:

$$I_o = I_c + m(\vec{r}_c^2 E - \vec{r}_c \cdot \vec{r}_c). \quad (3.47)$$

Последнее равенство в краткой форме выражает связь между всеми компонентами тензоров в центре масс  $C$  ( $I_C$ ) и в произвольной точке  $O$  ( $I_o$ ) при параллельном переносе системы координат. Это выражение можно назвать обобщенной теоремой Гюйгенса–Штейнера.

**При параллельном переносе системы координат тензор инерции тела в произвольной точке  $O$  равен сумме тензора инерции его в центре масс и тензора инерции точки с массой системы, помещённой в центр масс, в системе координат с началом в точке  $O$ .**

Второе слагаемое в правой части равенства (3.47) – тензор инерции точки с массой тела, помещенной в центр масс, относительно осей системы координат  $Oxyz$ :

$$m(\vec{r}_c^2 E - \vec{r}_c \cdot \vec{r}_c) = m \begin{pmatrix} (y_c^2 + z_c^2) & -x_c y_c & -x_c z_c \\ -y_c x_c & (x_c^2 + z_c^2) & -y_c z_c \\ -z_c x_c & -z_c y_c & (x_c^2 + y_c^2) \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Сравнивая компоненты тензоров  $I_o$ ,  $I_C$  и тензора (3.48), получаем связь между осевыми и центробежными моментами инерции тела при параллельном переносе системы координат в координатной форме:

$$I_x = I_{xc} + m(y_c^2 + z_c^2), \quad I_y = I_{yc} + m(x_c^2 + z_c^2), \quad I_z = I_{zc} + m(z_c^2 + y_c^2). \quad (3.49)$$

**Момент инерции системы относительно какой-либо оси равен сумме её момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы системы на квадрат расстояния между осями (теорема Гюйгенса–Штейнера).**

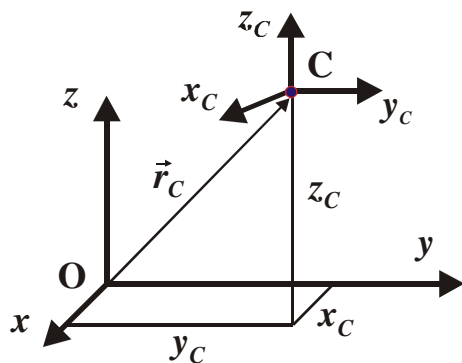


Рис. 3.25

Связь между центробежными моментами инерции тела (системы) определится равенствами:  $I_{xy} = I_{x_c y_c} + m x_c \cdot y_c$ ,  $I_{xz} = I_{x_c z_c} + m x_c \cdot z_c$ ,  $I_{yz} = I_{y_c z_c} + m y_c \cdot z_c$ .

Здесь:  $x_c, y_c, z_c$  – координаты центра масс в системе координат  $Ox_c y_c z_c$  осями, параллельными осям центральной системы координат  $Cx_c y_c z_c$ .

*Центробежный момент инерции системы относительно каких-либо осей равен сумме центробежного момента инерции относительно параллельных осей, проходящих через центр масс и произведения массы системы на координаты центра масс вдоль этих осей.*

### 3.10. Преобразование тензора инерции при повороте системы координат

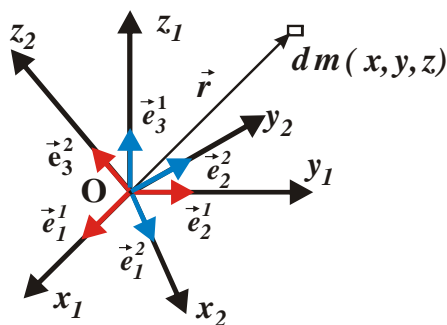


Рис. 3.26

Пусть тензор инерции тела или механической системы  $I_O^1$  в первой системе координат  $Ox_1 y_1 z_1$  («старой») известен.

Найдём составляющие тензора инерции  $I_O^2$  в «новой» системе координат  $Ox_2 y_2 z_2$ , полученной поворотом «старой» системы координат.

Положение «новой» системы координат относительно «старой» можно задать матрицей направляющих косинусов:

$$\Pi^{21} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1^2, \vec{e}_1^1) & (\vec{e}_1^2, \vec{e}_2^1) & (\vec{e}_1^2, \vec{e}_3^1) \\ (\vec{e}_2^2, \vec{e}_1^1) & (\vec{e}_2^2, \vec{e}_2^1) & (\vec{e}_2^2, \vec{e}_3^1) \\ (\vec{e}_3^2, \vec{e}_1^1) & (\vec{e}_3^2, \vec{e}_2^1) & (\vec{e}_3^2, \vec{e}_3^1) \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

(см. Приложение 1).

Здесь: в каждой строке – косинусы углов между одной из «новых» осей и «старыми» осями. Орты «новой» системы координат обозначены  $\vec{e}_1^2$  (ось  $x_2$ ),  $\vec{e}_2^2$  (ось  $y_2$ ),  $\vec{e}_3^2$  (ось  $z_2$ ), а «старой» –  $\vec{e}_1^1$  ( $x_1$ ),  $\vec{e}_2^1$  ( $y_1$ ),  $\vec{e}_3^1$  ( $z_1$ ).

Если радиус-вектор частиц тела в «старой» системе координат обозначить  $\vec{r}^1$ , а в «новой» –  $\vec{r}^2$ , то связь между этими векторами определится соотношением:

$$\vec{r}^2 = \Pi^{21} \vec{r}^1. \quad (3.52)$$

Тензор инерции тела в «старой» системе координат в векторном виде равен:

$$I_o^1 = \int_{(M)} \left[ (\vec{r}^1)^2 E - \vec{r}^1 \cdot \vec{r}^1 \right] dm, \quad (3.53)$$

а в «новой» системе координат –

$$I_o^2 = \int_{(M)} \left[ (\vec{r}^2)^2 E - \vec{r}^2 \cdot \vec{r}^2 \right] dm. \quad (3.54)$$

Здесь  $E$  – единичный тензор 2-го ранга. В первом слагаемом под интегралом используется скалярное произведение радиус-вектора частицы, а во втором слагаемом – диадное произведение.

Подставляя равенство (3.52) в (3.54), получаем соотношение между двумя тензорами:

$$\begin{aligned} I_o^2 &= \int_{(M)} \left[ (\Pi^{21} \vec{r}^1, \Pi^{21} \vec{r}^1) E - \Pi^{21} \vec{r}^1 \cdot \Pi^{21} \vec{r}^1 \right] dm, \\ I_o^2 &= \int_{(M)} \left[ \Pi^{21} (\vec{r}^1, \vec{r}^1) \Pi^{12} E - \Pi^{21} \vec{r}^1 \cdot \vec{r}^1 \Pi^{12} \right] dm, \\ I_o^2 &= \Pi^{21} \int_{(M)} \left[ (\vec{r}^1, \vec{r}^1) E - \vec{r}^1 \cdot \vec{r}^1 \right] dm \Pi^{12}, \end{aligned}$$

или

$$I_O^2 = \Pi^{21} I_O^1 \Pi^{12}. \quad (3.55)$$

Здесь:  $\Pi^{12} = (\Pi^{21})^T = (\Pi^{21})^{-1}$ , (Приложение 1).

Равенство (3.55) компактно и позволяет пересчитать сразу все компоненты тензора инерции в «новой» системе координат после поворота «старой» системы. Использование такого равенства удобно в математических пакетах, в которых определены матричные операции. Пример применения пакета MathCad для решения более полной задачи – определение составляющих тензора инерции в новом центре при повороте системы координат и определение положения главных осей инерции см. в Приложении 4.

Зачастую поворот системы координат происходит только около одной из «старых» осей  $x_1, y_1, z_1$ .

Матрицы перехода при повороте вокруг каждой из осей против хода часовой стрелки (рис. 3.27–3.29) будут такими:

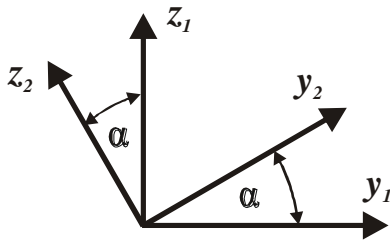


Рис. 3.27

$$\Pi_{\alpha}^{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

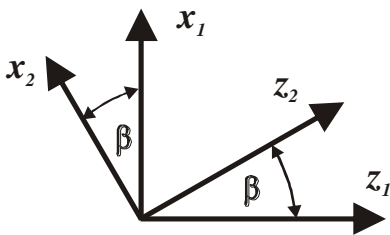


Рис. 3.28

$$\Pi_{\beta}^{21} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

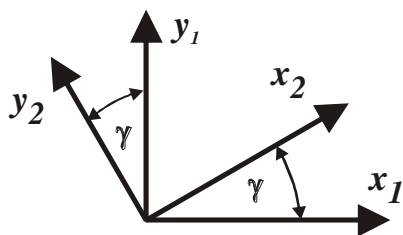


Рис. 3.29

$$\Pi_{\gamma}^{21} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Формулы для перерасчёта осевых и центробежных моментов инерции для каждого из этих случаев приведены в Приложении 4. Если поворот системы координат получен в результате последовательных поворотов около разных осей, то матрица перехода от одной системы координат к другой получится перемножением матриц поворота около каждой из осей. Порядок поворотов и порядок сомножителей в этом случае имеют значение. Например, последовательный поворот около осей  $x$  на угол  $\alpha$  и  $z$  на угол  $\gamma$  приведёт к следующей матрице поворота:

$$\Pi^{21} = \Pi_{\alpha}^{21} \cdot \Pi_{\gamma}^{21}.$$

Переставлять сомножители в этом произведении, как известно, нельзя. Порядок сомножителей должен соответствовать последовательности поворотов.

### 3.11. Осевой момент инерции тела относительно пучка осей

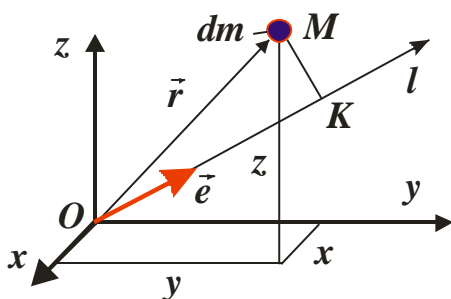


Рис. 3.30

Определим осевой момент инерции тела относительно произвольной оси  $l$  с направляющими косинусами:

$$\begin{aligned} \cos(l, x) &= \alpha; \quad \cos(l, y) = \beta; \\ \cos(l, z) &= \gamma. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Считаем известными все составляющие тензора инерции тела  $I_O$  в осях  $Oxyz$ .

Выделим частицу тела массой  $dm$ ,  $\vec{r}$  – радиус-вектор частицы относительно начала системы координат. Осевой момент инерции частицы относительно оси  $l$ :

$$dI_l = dm \cdot (MK)^2. \quad (3.57)$$

Из рисунка 3.30:

$$(MK)^2 = (\vec{r})^2 - (OK)^2,$$

или

$$(MK)^2 = (\vec{r})^2 - (\vec{r})_l^2. \quad (3.58)$$

$$\text{Здесь } r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2), \quad (3.59)$$

$$(\vec{r})_l - \text{проекция вектора } \vec{r} \text{ на ось } l, \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = 1.$$

Проекция вектора на орт  $\vec{l}$  (орт оси  $l$ ) равна сумме произведений одноимённых проекций векторов:

$$(\vec{r})_l = x \cdot \alpha + y \cdot \beta + z \cdot \gamma. \quad (3.60)$$

Подставим (3.59) и (3.60) в (3.58):

$$MK^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2. \quad (3.61)$$

Раскроем выражение (3.61):

$$\begin{aligned} MK^2 = & (y^2 + z^2)\alpha^2 + (x^2 + z^2)\beta^2 + (x^2 + y^2)\gamma^2 - \\ & - 2xy \cdot \alpha \cdot \beta - 2xz \cdot \alpha \cdot \gamma - 2yz \cdot \beta \cdot \gamma. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Возьмем интеграл по телу  $(A)$  от (3.57), используя выражение (3.62). Получим осевой момент инерции тела относительно произвольной оси  $l$ , проходящей через начало системы координат:

$$\begin{aligned} I_l = & \int_{(A)} (MK^2) \cdot dm, \\ I_l = & \alpha^2 \int_{(A)} (y^2 + z^2) dm + \beta^2 \int_{(A)} (x^2 + z^2) dm + \gamma^2 \int_{(A)} (x^2 + y^2) dm - \\ & - 2\alpha \cdot \beta \int_{(A)} xy dm - 2\alpha \cdot \gamma \int_{(A)} xz dm - 2\beta \cdot \gamma \int_{(A)} yz dm. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что первые три интеграла – осевые моменты инерции тела, а последние три – центробежные моменты инерции, получаем известное выражение:

$$I_l = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \cdot \beta - 2I_{xz} \alpha \cdot \gamma - 2I_{yz} \beta \cdot \gamma. \quad (3.63)$$

Итак, все составляющие тензора инерции в точке  $O$  определяют осевой момент инерции относительно произвольной оси.

В главных осях инерции  $x', y', z'$  выражение (3.63) будет таким:

$$I_l = I_{x'} \alpha^2 + I_{y'} \beta^2 + I_{z'} \gamma^2. \quad (3.64)$$

Покажем, что есть несколько свойств тензора инерции, которые не зависят от направления осей системы координат  $Oxyz$ .

### 3.12. Эллипсоид инерции тела в точке $O$

Построим поверхность, точки которой удалены от начала системы координат на расстояние

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_l}}. \quad (3.65)$$

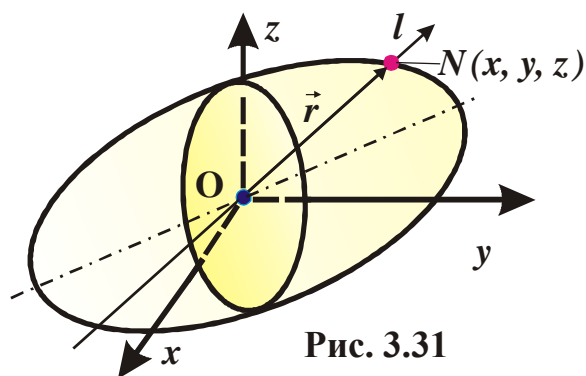


Рис. 3.31

Здесь  $I_l$  – осевой момент инерции тела относительно оси  $l$ , проходящей через начало системы координат,  $N$  – точка поверхности, лежащая на этой оси. Найдём уравнение этой поверхности.

Направляющие косинусы оси  $l$  можно выразить через координаты точки  $N$ :

$$\alpha = x/ON = x \cdot \sqrt{I_l}, \quad \beta = y/ON = y \cdot \sqrt{I_l}, \quad \gamma = z/ON = z \cdot \sqrt{I_l}. \quad (3.66)$$

Подставим выражения (3.66) в (3.63):

$$I_l = I_x x^2 I_l + I_y y^2 I_l + I_z z^2 I_l - 2I_{xy} xy I_l - 2I_{xz} xz I_l - 2I_{yz} yz I_l,$$

или

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{xz} xz - 2I_{yz} yz = 1. \quad (3.67)$$

Здесь  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  – осевые и центробежные моменты инерции тела.

Уравнение (3.67) – уравнение поверхности второго порядка. Эта поверхность замкнута и не вырождена, если  $I_l \neq 0$ . Известно, что такой поверхностью является поверхность эллипсоида.

В осях симметрии  $Ox'y'z'$  уравнение эллипсоида будет таким:

$$I_{x'} x'^2 + I_{y'} y'^2 + I_{z'} z'^2 = 1. \quad (3.68)$$

Следовательно, оси симметрии эллипсоида инерции являются главными осями инерции тела в точке  $O$  ( $I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0$ ).

Эллипсоид имеет не менее 3-х взаимно перпендикулярных осей симметрии. Это говорит о том, что через любую точку тела можно провести не менее 3-х главных осей инерции.

Рассмотрим два случая симметрии эллипсоида

а) Пусть два осевых момента инерции относительно главных осей равны, например,  $I_{x'} = I_{y'}$ . Эллипсоид принимает форму эллипсоида вращения относительно третьей оси. Этот случай можно назвать «**цилиндрической**» симметрией.

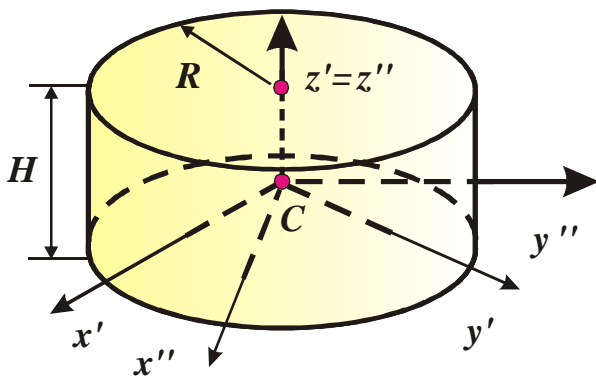


Рис. 3.32

Например, у однородного цилиндра радиусом  $R$  и высотой  $H$  центральные оси  $Cx', Cy', Cz'$  – оси симметрии, и, следовательно, главные оси инерции.

Известно, что

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{H^2}{3} \right), I_{z'} = \frac{mR^2}{2}.$$

Эллипсоид инерции цилиндра в точке  $C$  и всех других точках оси  $z'$  – поверхность вращения около оси  $z'$ . В этом случае все оси, перпендикулярные оси  $z$ , – главные оси инерции, моменты инерции тела относительно любых таких осей одинаковы:

$$I_{x'} = I_{y'} = I_{x''} = I_{y''} = \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{H^2}{3} \right).$$

Тензор инерции цилиндра в таких осях имеет диагональный вид:

$$I_C = \begin{pmatrix} \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} m.$$

б) Пусть все три момента инерции относительно главных осей равны:

$$I_{x'} = I_{y'} = I_{z'}.$$

Это – случай «шаровой» симметрии.

Эллипсоид инерции – сфера радиусом  $R_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\sqrt{I_{x'}}}$ . Следовательно, осевые моменты инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр такого эллипсоида, равны.

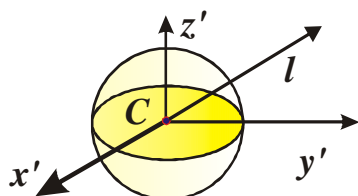


Рис. 3.33

Любая ось  $l$ , проходящая через т.  $C$  – главная ось инерции. Это видно из того, что уравнение эллипсоида в любых взаимно - перпендикулярных осях  $Cx'y'z'$  будет таким:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R_{\mathcal{E}}^2$$

или  $I_{x'}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 1$ .

Это означает, что все центробежные моменты инерции тела с таким эллипсоидом равны нулю:  $I_{x'y'} = I_{y'z'} = I_{x'z'} = 0$ .

Построим тензор инерции однородного куба в центральных осях  $Cx'y'z'$  (рис. 3.34).

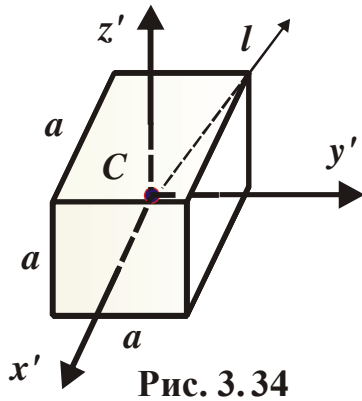


Рис. 3.34

Известно (см. выше), что осевые моменты инерции куба равны:

$$I_{x'} = I_{y'} = I_{z'} = m \frac{a^2}{6}.$$

Так как оси  $x'y'z'$  – оси симметрии тела, они – главные оси инерции тела в точке  $C$ . Следовательно, моменты инерции тела относительно трёх главных осей инерции равны. Эллипсоид инерции куба в его

центре масс – сфера с центром в точке  $C$ , радиусом  $R_{\mathcal{I}} = \frac{1}{\sqrt{I_{x'}}}$ .

Расстояния от всех точек сферы до точки  $C$  равны. Поэтому осевые моменты инерции куба относительно любой оси, проходящей через его центр масс, одинаковы:

$$I_{x'} = I_{y'} = I_{z'} = I_l.$$

*Любая ось куба, проходящая через его центр масс, – главная ось инерции.*

В двух описанных случаях  $(I_{x'} = I_{y'})$  и  $(I_{x'} = I_{y'} = I_{z'})$  тело имеет бесчисленное количество главных осей инерции.

В самом общем случае, когда все три момента инерции тела относительно главных осей инерции разные  $(I_{x'} \neq I_{y'} \neq I_{z'})$ , тело имеет только три главные оси инерции. Эти три оси занимают единственное положение, которое чаще всего необходимо находить.

### 3.13. Определение положения главных осей инерции

Пусть известны компоненты тензора инерции тела в точке  $O$  в осях системы координат  $Oxyz$ .

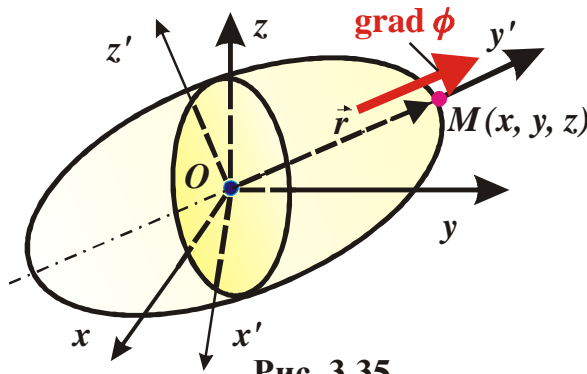


Рис. 3.35

Уравнение эллипсоида в этой точке

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{xz} xz - 2I_{yz} yz = 1.$$

Исследуем функцию, являющуюся уравнением эллипсоида:

$$\varphi(x, y, z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{xz} xz - 2I_{yz} yz - 1 = 0. \quad (3.69)$$

Введём вектор, равный градиенту этой функции в точке:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.70)$$

Известно, что градиент скалярной функции  $\varphi(x, y, z)$  – вектор, направленный по нормали к поверхности, описанной этой функцией в точке с координатами  $(x, y, z)$ .

Если точка лежит на главной оси инерции тела (оси симметрии эллипсоида инерции), то радиус - вектор точки параллелен градиенту функции  $\varphi(x, y, z)$ .

Пусть векторы  $\vec{r}$  и  $\text{grad } \varphi$  отличаются друг от друга скалярным множителем  $2I$ .

Тогда

$$2I \cdot \vec{r} = \text{grad } \varphi. \quad (3.71)$$

Проектируя (3.71) на оси системы координат  $Oxyz$ , получаем систему уравнений:

$$2I_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad 2I_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad 2I_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3.72)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 2I_x x - 2I_{xy} y - 2I_{xz} z, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2I_{yx} x + 2I_y y - 2I_{yz} z, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -2I_{zx} x - 2I_{zy} y - 2I_z z. \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

В уравнениях (3.72) и равенствах (3.73)  $x, y, z$  – координаты точки  $M$ , лежащей на главной оси инерции.

Подставляя (3.73) в (3.72), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно координат точки на главной оси инерции тела:

$$\left. \begin{aligned} (I_x - I)x - I_{xy} \cdot y - I_{xz} \cdot z &= 0 \\ -I_{yx} \cdot x + (I_y - I)y - I_{yz} \cdot z &= 0 \\ -I_{zx} \cdot x - I_{zy} \cdot y + (I_z - I)z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.74)$$

Поскольку главные оси существуют, а система однородных уравнений (3.74) имеет тривиальное решение, если определитель этой системы равен нулю, то справедливо уравнение

$$\begin{vmatrix} (I_x - I) & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & (I_y - I) & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & (I_z - I) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.75)$$

Получили кубическое вековое уравнение тензора инерции, или уравнение собственных значений тензора инерции:

$$I^3 - a_1 I^2 + a_2 I - a_3 = 0. \quad (3.76)$$

Здесь

$$a_1 = I_x + I_y + I_z, \quad (3.77)$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I_x & -I_{xz} \\ -I_{zx} & I_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{zy} & I_z \end{vmatrix}, \quad (3.78)$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{vmatrix}, \quad (3.79)$$

$a_1$  – сумма диагональных элементов (след матрицы) тензора инерции,



$a_2$  – сумма главных миноров второго порядка тензора инерции,

$a_3$  – определитель тензора инерции.

Поскольку эллипсоид инерции тела в точке  $O$  единственен, то единственным является и уравнение (3.76), определяющее условие разрешимости системы (3.74).

Следовательно, коэффициенты векового уравнения (3.76) не должны зависеть от положения осей системы координат  $Oxyz$ .

Можно сделать вывод о том, что коэффициенты векового уравнения – инварианты тензора инерции в точке  $O$  по отношению к положению системы координат  $Oxyz$ . Такие инварианты есть у любого тензора. Это связано с тем, что тензор – физическая величина, отражающая свойства пространства в окрестности точки  $O$ .

Так, например, в сопротивлении материалов для определения напряжённого состояния тела в точке строится тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – нормальные напряжения,  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – касательные напряжения.

Инварианты тензора напряжений:

$$a_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} -$$

определяют напряжённое состояние тела в точке. С помощью этих величин строятся критерии прочности.

Определим, чем являются корни векового уравнения (3.76)  $I_1, I_2, I_3$ . Пусть точка  $M$  с координатами  $(x, 0, 0)$  лежит на главной оси  $x'$ . Тогда из системы уравнений (3.74) видно, что  $(I_{x'} - I)x = 0$ . Так как  $x \neq 0$ , то  $I_1 = I_{x'}$ .

Аналогично, если точка  $M$  лежит на главной оси  $y'$  и  $z'$ , получим:

$$\begin{aligned}(I_{y'} - I)y &= 0; & I_2 &= I_{y'}. \\ (I_{z'} - I)z &= 0; & I_3 &= I_{z'}.\end{aligned}$$

Таким образом, корни векового уравнения тензора инерции в точке  $O$  – осевые моменты инерции тела относительно главных осей, проходящих через точку  $O$ .

В произвольном случае три корня различны. В случае сферической симметрии они равны:  $I_1 = I_2 = I_3$ . Тогда все оси, проходящие через точку  $O$  – главные оси инерции. Осевые моменты инерции тела относительно всех осей, проходящих через точку  $O$ , равны.

Таким случаем, например, в гидродинамике, является модель идеальной несжимаемой жидкости. Здесь давление на любую площадку, проходящую через точку  $O$ , одинаково.

Если определитель системы уравнений (3.74) равен нулю, то уравнения линейно зависимы. Поэтому любые два уравнения из этих трёх определяют связь между координатами точки на главной оси инерции.

Пусть эллипсоид инерции имеет три разных полуоси, т.е. корни векового уравнения различны. ( $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ ).

При  $I = I_1$  из первых двух уравнений системы (3.74)

$$\begin{aligned}(I_x - I_1)x - I_{xy}y - I_{xz}z &= 0, \\ -I_{yx}x + (I_y - I_1)y - I_{yz}z &= 0\end{aligned}\tag{3.80}$$

получим бесчисленное множество решений для координат точки на главной оси, относительно которой момент инерции тела равен  $I_1$ . Для отношений координат этой точки имеем единственное решение.

Координату  $y$  точки на главной оси считаем известной:

$$\begin{aligned}(I_x - I_1)x - I_{xz}z &= I_{xy}y, \\ -I_{yx}x - I_{yz}z &= -(I_y - I_1)y.\end{aligned}\tag{3.81}$$

По правилу Крамера получим

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} I_{xy} & -I_{xz} \\ -(I_y - I_1) & -I_{yz} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (I_x - I_1) & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yz} \end{vmatrix}} \cdot y. \quad (3.82)$$

Обозначим  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  – алгебраические дополнения элементов последней строки матрицы в левой части векового уравнения:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -I_{xy} & -I_{xz} \\ (I_y - I) & -I_{yz} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = - \begin{vmatrix} (I_y - I) & -I_{xz} \\ -I_{yx} & -I_{yz} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (I_x - I) & -I_{xy} \\ -I_{yx} & (I_y - I) \end{vmatrix}.$$

Получим из (3.82) 
$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y.$$

Аналогично для координаты  $z$ :

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} (I_x - I_1) & I_{xy} \\ -I_{yx} & -(I_y - I_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (I_x - I_1) & -I_{xz} \\ -I_{yx} & -I_{yz} \end{vmatrix}} \cdot y = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \cdot y. \quad (3.83)$$

То есть

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3}. \quad (3.84)$$

Уравнение (3.84), как известно, – уравнение прямой, проходящей через начало системы координат и точку  $M(x, y, z)$  на главной оси инерции.

Соотношения (3.81) – (3.84) справедливы для всех корней векового уравнения  $I_1, I_2, I_3$ . Так мы получили уравнения всех трёх главных осей инерции. Полученные соотношения справедливы, если корни  $I_1, I_2, I_3$  разные.

Найдём направляющие косинусы главных осей инерции  $x', y', z'$  в системе координат  $Oxyz$  (рис. 3.36):

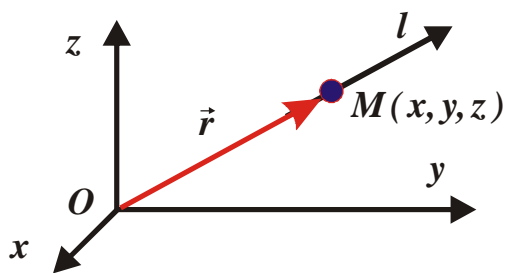


Рис. 3.36

$$\left. \begin{aligned} \cos(l, x) &= \frac{x}{r}, \quad \cos(l, y) = \frac{y}{r}, \\ \cos(l, z) &= \frac{z}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

Из формул (3.84) получим:

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot x, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \cdot x.$$

Следовательно,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \left( 1 + \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} + \frac{\Delta_3^2}{\Delta_1^2} \right) x^2, \quad (3.86)$$

$$r^2 = \frac{x^2}{\Delta_1^2} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2).$$

Подставив (3.86) в (3.85), получим:

$$\cos(l, x) = \frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}. \quad (3.87)$$

Уравнения (3.85) дают также следующие соотношения:

$$x = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot y, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \cdot y, \quad r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{y^2}{\Delta_2^2} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2), \quad (3.88)$$

или

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta_3} \cdot z, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \cdot z, \quad r^2 = \frac{z^2}{\Delta_3^2} (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2). \quad (3.89)$$

Подставляя (3.88) и (3.89) в (3.85), получим два других косинуса:

$$\cos(l, y) = \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}, \quad (3.90)$$

$$\cos(l, z) = \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}. \quad (3.91)$$

Из свойства эллипсоида инерции при разных корнях векового уравнения видно, что главные оси инерции тела, соответствующие разным значениям корней, взаимно перпендикулярны.

### 3.14. Положение главных осей инерции в плоском случае

Выше показано, что ось является главной осью инерции, если она – ось симметрии тела или перпендикулярна его плоскости симметрии и имеет начало в этой плоскости. В первом случае любые оси, перпендикулярные оси симметрии – главные оси инерции. Это тривиальный случай.

Проанализируем второй случай. Пусть ось, перпендикулярная плоскости симметрии тела и имеющая начало в этой плоскости, –  $x$ .

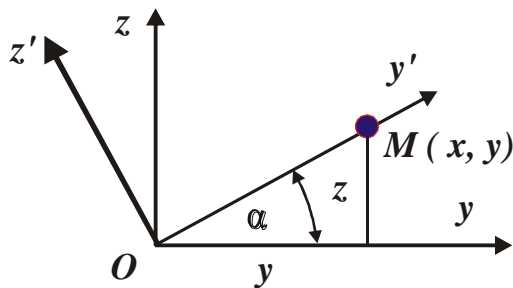


Рис. 3.37

Найдём положение двух других главных осей инерции  $y'$  и  $z'$  (рис. 3.37).

Так как ось  $x$  – главная ось инерции, то  $I_x = I_1$ , в системе уравнений (3.80) неизвестно только одно уравнение.

Первое уравнение  $(I_x - I_1)x - I_{xy}y - I_{xz}z = 0$  вырождается, так как  $I_x = I_1$ ,  $I_{xy} = I_{xz} = 0$ .

Второе уравнение:  $(I_y - I_2)y - I_{yz}z = 0$ .

Здесь, как уже говорилось,  $y, z$  – координаты точки  $M$  на главной оси инерции. Из этого уравнения получим

$$\frac{y}{z} = \text{ctg } \alpha = \frac{I_{yz}}{I_y - I_2}. \quad (3.92)$$

Таким образом, если известны моменты инерции тела относительно главных осей  $y'$  и  $z'$ , получим известные в сопротивлении материалов и теоретической механике формулы:

$$\text{ctg } \alpha_1 = \frac{I_{yz}}{I_y - I_2}, \quad (3.93)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{I_{yz}}{I_y - I_3}, \quad (3.94)$$

определяющие положение двух взаимно перпендикулярных главных осей инерции  $y', z'$ .

Главные моменты инерции зачастую не известны, в этом случае необходимо определять положение главных осей инерции по известным компонентам тензора инерции в точке  $O$ .

Вернёмся к формуле (3.63), определяющей осевой момент инерции относительно произвольной оси  $l$ :

$$I_l = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \beta - 2I_{xz} \alpha \gamma - 2I_{yz} \beta \gamma. \quad (3.95)$$

В ней через  $\alpha, \beta, \gamma$  обозначены направляющие косинусы оси  $l$  в системе координат  $Oxyz$ .

В нашем случае, (рис. 3.37) для главной оси  $y'$  направляющие косинусы будут такими:

$$\begin{aligned} \cos(y', x) &= \alpha' = \cos(90^\circ) = 0, \\ \cos(y', y) &= \beta' = \cos \alpha, \\ \cos(y', z) &= \gamma' = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, для оси  $y'$  получим из (3.95)

$$I_{y'} = I_y \beta'^2 + I_z \gamma'^2 - 2I_{yz} \beta' \gamma',$$

или

$$I_{y'} = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - 2I_{yz} \sin \alpha \cdot \cos \alpha. \quad (3.96)$$

Если положение оси  $y'$  считать неизвестным (неизвестен угол  $\alpha$ ), то из формулы (3.96) можно найти угол между осями  $y'$  и  $y$ .

Воспользуемся тем, что главная ось инерции тела – ось симметрии эллипсоида инерции. При неравных моментах инерции тела относительно главных осей  $y', z'$  (неравных корнях векового уравнения  $I_2$  и  $I_3$ ) моменты инерции относительно главных осей будут иметь экстремальные значения ( $I_{\max}$  или  $I_{\min}$ ).

Найдём, при каком угле  $\alpha$  момент инерции в формуле (3.96) принимает экстремальное значение.

Продифференцируем правую часть равенства (3.96) по углу  $\alpha$ , приравняем производную нулю.

Получим:

$$\begin{aligned} -2I_y \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 2I_z \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2I_{yz} \cos^2 \alpha + 2I_{yz} \sin^2 \alpha &= 0, \\ (I_z - I_y) \sin 2\alpha &= 2I_{yz} \cos 2\alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

При этом угле  $\alpha$  один из главных моментов инерции будет наибольшим, а другой – наименьшим.

Повторим вышесказанное о том случае, когда два главных момента инерции  $I_2$  и  $I_3$  равны (нет экстремума у функции (3.69)). Эллипсоид инерции принимает форму эллипсоида вращения вокруг оси  $(x')$ , относительно которой момент инерции равен  $I_1$ . Любая ось, перпендикулярная  $x'$ , – главная ось инерции тела.

Полученная формула (3.97) широко применяется не только в теоретической механике, но и в сопротивлении материалов.

Определим осевые моменты инерции относительно главных осей инерции  $y', z'$ , если известно, что ось  $x'$  – главная.

Формулу (5) перепишем так:

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha. \quad (3.98)$$

Для оси  $z'$  имеем:  $\alpha' = \cos(90^\circ) = 0,$

$$\beta' = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\gamma' = \cos \alpha,$$

$$I_{z'} = I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + 2I_{yz} \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad (3.99)$$

или

$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha. \quad (3.100)$$

Учитывая, что

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{I_z - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{I_{yz}}{\sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}},$$

получаем выражение для моментов инерции тела относительно главных осей  $y', z'$  (главных моментов инерции)  $I_2$  и  $I_3$  через известные нам компоненты тензора инерции в осях системы координат  $Oxyz$ :

$$I_{2,3} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}. \quad (3.101)$$

Плюс соответствует максимальному, а минус – минимальному главному моменту инерции. Определение того, какой оси соответствует  $I_{\max}$  или  $I_{\min}$ , иногда возможно из рисунка тела. Если это затруднительно, необходимо применить формулы (3.93), (3.94).

Итак, выше показано, как определять положение главных осей инерции и осевые моменты инерции относительно этих главных осей. Наиболее просто это делается, если положение одной из главных осей инерции (например,  $x'$ ) известно.

### 3.15. Определение геометрических характеристик составного тела

Для пластины, изображённой на рис.3.38, найти:

а) составляющие тензора инерции в центре масс (точка  $C$ ) в системе координат с осями, параллельными  $Ox$  и  $Oy$ ;

б) определить положение главных центральных осей инерции пластины.



Решение

Разобьем тело на те же 5 частей, что и в разделе 2.4. – сплошной прямоугольник  $OABK$ ; квадрат  $MNPQ$  – отверстие (тело с отрицательной массой); сплошной прямоугольник  $KGLE$ ; полукруглое отверстие радиусом  $a$  (отрицательная масса); треугольник  $EFL$  (рис. 3.38).

Плотность пластины на единицу площади  $\rho$  одинакова у всех фигур, поэтому все геометрические и массовые характеристики фигур определяются их площадью и размерами сечения.

Найдём осевые моменты инерции каждой фигуры относительно собственных центральных осей системы координат  $C_1x_1y_1$ ,  $C_2x_2y_2$ ,  $C_3x_3y_3$ ,  $C_4x_4y_4$ ,  $C_5x_5y_5$ .

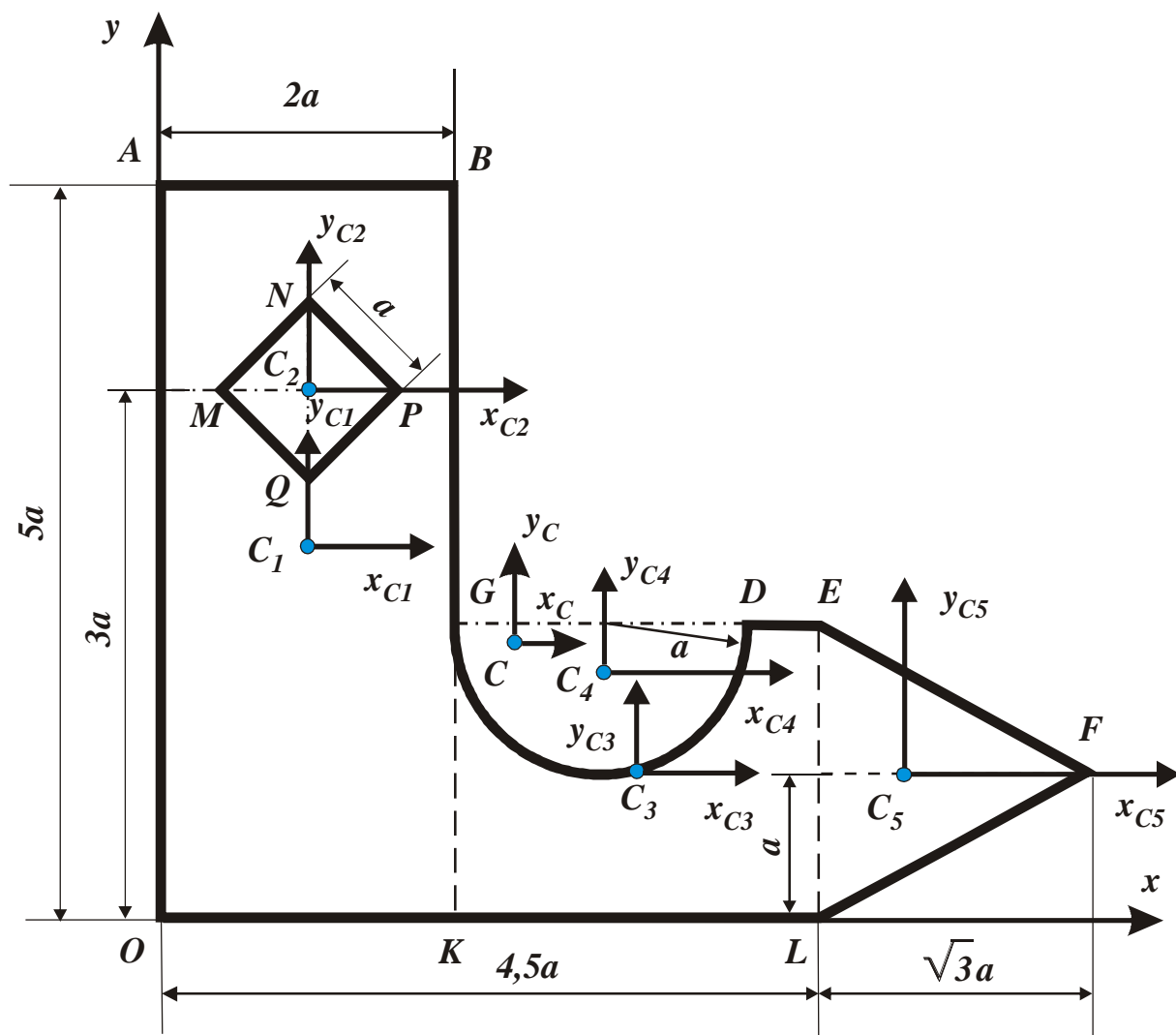


Рис. 3.38

Положение центров масс этих фигур определено выше в разделе 2.4. (см. также таблицу 1 приложения 5)

Для первой фигуры (прямоугольник  $OABK$ ):

$$I_{x_{c_1}} = S_1 \cdot \frac{(5a)^2}{12} = 3,30 \text{ см}^4; \quad I_{y_{c_1}} = S_1 \cdot \frac{(2a)^2}{12} = 5,33 \text{ см}^4.$$

Для второй фигуры (квадратное отверстие):

$$I_{x_{c_2}} = I_{y_{c_2}} = S_2 \cdot \frac{a^2}{12} = -1,33 \text{ см}^4.$$

Для третьей (прямоугольник  $KGDL$ ):

$$I_{x_{c_3}} = S_3 \cdot \frac{(2a)^2}{12} = 26,7 \text{ см}^4; \quad I_{y_{c_3}} = S_3 \cdot \frac{(2,5a)^2}{12} = 41,7 \text{ см}^4.$$

Для четвертой (полукруглый вырез) –

$$I_{y_{c_4}} = S_4 \cdot \frac{a^2}{4} = 6,28 \text{ см}^4.$$

Чтобы найти осевой момент инерции полукруглого диска относительно оси  $x_{c_4}$  (рис. 3.39), воспользуемся теоремой Гюйгенса–Штейнера.

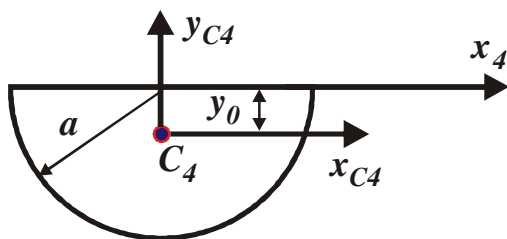


Рис. 3.39

Зная осевой момент инерции относительно оси  $x_4$  и расстояние между осями  $x_4$  и  $x_{c_4}$ , можно подсчитать осевой момент инерции относительно центральной оси (3.23) и (2.23):

$$I_{x_4} = S_4 \frac{a^2}{4}, \quad y_0 = \frac{4a}{3\pi},$$

$$I_{x_4} = I_{x_{c_4}} + S_4 \cdot y_0^2, \quad \text{где } I_{x_{c_4}} = S_4 \frac{a^2}{4} + S_4 \cdot y_0^2.$$

Для пятой фигуры (треугольная пластина) (рис. 3.40) имеем (пример 1 в параграфе 3.6)

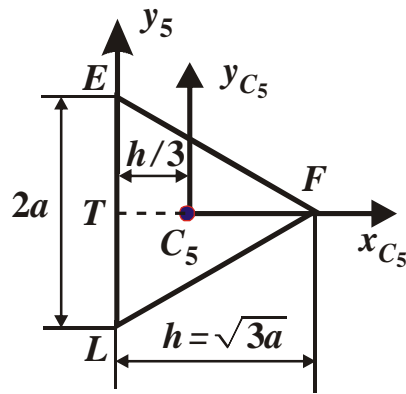


Рис. 3.40

$$I_{y_5} = \frac{S_5 h^2}{6}.$$

$I_{y_{C_5}}$  найдём по формуле Гюйгенса–Штейнера:

$$\begin{aligned} I_{y_{C_5}} &= I_{y_5} - S_5 \left( \frac{h}{3} \right)^2 = \\ &= \frac{S_5 h^2}{6} - \frac{S_5 h^2}{9} = \frac{S_5 h^2}{18} = 4,62 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Определим осевой момент инерции треугольной пластины  $LEF$  относительно оси  $x_{C_5}$ . Эта ось проходит по основанию прямоугольного треугольника высотой  $a$  (половины пластины). Поэтому момент инерции всего треугольника равен двум моментам инерции прямоугольного треугольника  $LTF$  и может быть рассчитан по формуле:

$$I_{x_{C_5}} = 2 \frac{S_5}{2} \frac{a^2}{6} = S_5 \frac{h^2}{3 \cdot 6} = I_{y_{C_5}} = 4,62 \text{ см}^4.$$

Центробежные моменты инерции каждой фигуры относительно собственных центральных осей равны нулю, так как одна из этих осей – ось симметрии фигуры:

$$I_{x_{C_1} y_{C_1}} = I_{x_{C_2} y_{C_2}} = I_{x_{C_3} y_{C_3}} = I_{x_{C_4} y_{C_4}} = I_{x_{C_5} y_{C_5}} = 0.$$

Подсчитаем осевые моменты фигур относительно центральных для всей пластины осей. Для этого опять воспользуемся теоремой Штейнера–Гюйгенса для параллельного переноса системы координат из центра масс тела.

Расстояния между осями найдём, используя решение примера 1 в разделе 2.4:

$$\begin{aligned} I_{x_C} &= I_{x_{C_1}} + S_1 (y_C - y_{C_1})^2 - I_{x_{C_2}} - S_2 (y_C - y_{C_2})^2 + \\ &+ I_{x_{C_3}} + S_3 (y_C - y_{C_2})^2 - I_{x_{C_4}} - S_4 (y_C - y_{C_4})^2 + \\ &+ I_{x_{C_5}} + S_5 (y_C - y_{C_5})^2 = 470 \text{ см}^4, \\ I_{y_C} &= I_{y_{C_1}} + S_1 (x_C - x_{C_1})^2 - I_{y_{C_2}} - S_2 (x_C - x_{C_2})^2 + \end{aligned}$$

$$+I_{y_{C_3}} + S_3(x_C - x_{C_2})^2 - I_{y_{C_4}} - S_4(x_C - x_{C_4})^2 + \\ + I_{y_{C_5}} + S_5(x_C - x_{C_5})^2 = 840 \text{ см}^4.$$

Центробежные моменты инерции пластины относительно осей  $x_c$  и  $y_c$  найдём, используя теорему Штейнера-Гюйгенса для центробежных моментов инерции:

$$I_{x_c y_c} = S_1(x_C - x_{C_1})(y_C - y_{C_1}) - S_2(x_C - x_{C_2})(y_C - y_{C_2}) + \\ + S_3(x_C - x_{C_3})(y_C - y_{C_3}) - S_4(x_C - x_{C_4})(y_C - y_{C_4}) + \\ + S_5(x_C - x_{C_5})(y_C - y_{C_5}) = -300 \text{ см}^4.$$

Таким образом, первая часть задачи решена. Определение положения главных центральных осей  $x'_c$ ,  $y'_c$  возможно по формуле (3.97) из раздела 3.14, так как ось  $z_0$  перпендикулярна плоскости симметрии тела и уже является главной осью инерции тела:

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = 1,68; \quad \alpha = 29,6^\circ.$$

Если необходимо определить осевые моменты инерции относительно главных осей  $x'_c$ ,  $y'_c$ , можно воспользоваться формулой (3.101) того же раздела 3.14:

$$I_{2,3} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{x_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^2}; \\ I_2 = I_{\max} = 1010 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = 300 \text{ см}^4.$$

### *Библиографический список*

1. Балк, М. Б., Геометрия масс./ М. Б. Балк, В. Г. Болтянский– М.: Наука, 1987.–159 с.
2. Дронг В.И., Курс теоретической механики: учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.И. Ильин и др.; под общ. ред. К.С. Колесникова.– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.– 736 с. Серия «Механика в техническом университете». – Т.1.
3. Феодосьев, В.И. Соппротивление материалов: учебник для вузов / В.И. Феодосьев. –10-е изд., пер. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.– 592 с. Серия «Механика в техническом университете». – Т. 2.
4. Яблонский, А. А., Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М.: Высшая школа, 1966.–Т.1.– 478 с.
5. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц– М.: Наука, 1970.– Т.1.– 240 с.
6. Ачеркан, Н. С. Справочник машиностроителя / Н. С. Ачеркан.– М.: ГНТИ, 1960.–591 с.
7. Фаворин, М. В. Моменты инерции / М. В. Фаворин. – М.: Наука, 1977.– Т.1.– 511 с.
8. Лойцянский, Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье.–6-е изд., перераб. и доп. – М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.–Т.2.– 640 с.
9. Дьяконов, В. П. MathCad 2000: учебный курс / В. П. Дьяконов. – СПб. Питер, 2000.–592 с. с ил.
10. Гернет, М.М., Ратобольский В.Ф. Определение моментов инерции / М.М. Гернет, В.Ф. Ратобольский.– М.: Машиностроение, 1989.– 247 с.

## 4. Приложения

### 4.1. Приложение 1

#### Сведения из векторной алгебры и алгебры тензоров

Все приведённые ниже соотношения могут использоваться не только в 3-мерном пространстве, но и распространяются на  $n$ -мерные пространства.

1. Любой вектор можно представить в виде суммы:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты осей декартовой системы координат.

Обозначим:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{e}_1; & \vec{j} &= \vec{e}_2; & \vec{k} &= \vec{e}_3; \\ a_x &= a_1; & a_y &= a_2; & a_z &= a_3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \\ \vec{a} &= \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i. \end{aligned} \quad (\text{П. 1.1})$$

2. Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равно сумме произведений одноимённых проекций векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (\text{П. 1.2})$$

Докажем, что скалярное произведение векторов равно произведению модулей векторов на косинус угла между ними (рис. П. 1.1):

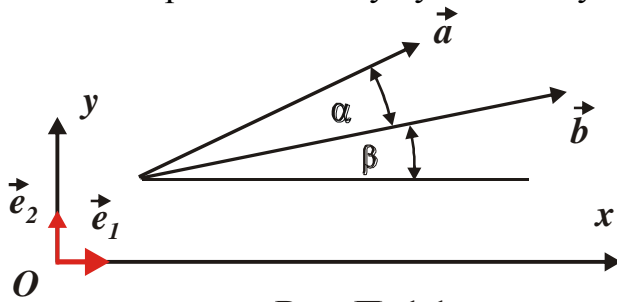


Рис. П. 1.1

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 = \\ &= a \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot b \cdot \cos \beta + \\ &+ a \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot b \cdot \sin \beta = \\ &= a \cdot b \cdot \cos(\alpha + \beta - \beta) = a \cdot b \cdot \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Итак, скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos(\alpha). \quad (\text{П. 1.3})$$

Ставя в соответствие вектору матрицу-столбец:

$$\vec{a} \rightarrow \underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} \rightarrow \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

получаем выражение для скалярного произведения векторов в скалярном виде:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \underline{a}^T \underline{b} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (\text{П. 1.4})$$

Здесь  $\underline{a}$  и  $\underline{b}$  – матрицы=столбцы,  $\underline{a}^T$  – транспонированная матрица-столбец (матрица-строка).

Следовательно,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \underline{a}^T \underline{b} = (\vec{b}, \vec{a}) = \underline{b}^T \underline{a}. \quad (\text{П. 1.5})$$

**3. Векторное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  равно вектору  $\vec{c}$ , составляющему с ними правую тройку векторов. Модуль вектора  $\vec{c}$  равен произведению модулей векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на синус угла между ними:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}; \quad c = a \cdot b \cdot \sin \alpha. \quad (\text{П. 1.6})$$

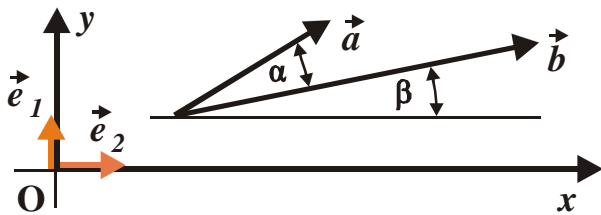


Рис. П 1.1

Вводя матрицу

$$\underline{\tilde{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}, \quad \underline{\tilde{a}} \underline{b} = -\underline{\tilde{b}} \underline{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{П. 1.7})$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П. 1.8})$$

Или в векторном виде:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \\ &+ \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned} \quad (\text{П. 1.9})$$

**4. Диадное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .** Наряду со скалярным произведением векторов  $(\vec{a}, \vec{b}) = \underline{a}^T \underline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$  существует и диадное произведение векторов или диада векторов  $\vec{a}\vec{b} = \underline{a}\underline{b}^T$ :

$$\vec{a}\vec{b} = \underline{a}\underline{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{П. 1.10})$$

Так, диадное произведение радиус-вектора точки трёхмерного пространства на самого себя составляет:

$$\vec{r}\vec{r} = \underline{r}\underline{r}^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (x \quad y \quad z) = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & y^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{П. 1.11})$$

### 5. Преобразование вектора при повороте системы координат

Орты «старого» базиса  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  и «нового» базиса  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= (\vec{e}'_1, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{e}'_1, \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}'_1, \vec{e}_3)\vec{e}_3; \\ \vec{e}'_2 &= (\vec{e}'_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{e}'_2, \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}'_2, \vec{e}_3)\vec{e}_3; \\ \vec{e}'_3 &= (\vec{e}'_3, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{e}'_3, \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}'_3, \vec{e}_3)\vec{e}_3, \end{aligned} \quad (\text{П.1.12})$$

или в сокращенной форме

$$\vec{e}'_k = \sum_{i=1}^3 t_{ki} \vec{e}_i. \quad (\text{П. 1.13})$$

Здесь  $t_{ki} = (\vec{e}'_k, \vec{e}_i)$  – косинус угла между  $k$  – тым ортом «новой» системы координат и  $i$  – м ортом «старой» системы координат.

Координаты вектора  $\vec{a}$  в «старой» и «новой» системах координат обозначим, соответственно:  $a_1, a_2, a_3$  и  $a'_1, a'_2, a'_3$ .



Тогда

$$\bar{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = a'_1 \vec{e}'_1 + a'_2 \vec{e}'_2 + a'_3 \vec{e}'_3,$$

или

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i = \sum_{k=1}^3 a'_k \vec{e}'_k. \quad (\text{П. 1.14})$$

Подставив в (П. 1.14) вместо  $\vec{e}'_k$  их выражения из (П. 1.13), получим

$$\bar{a} = \sum_{k=1}^3 a'_k \sum_{i=1}^3 t_{ki} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{k=1}^3 a'_k t_{ki} \right) \vec{e}_i, \quad (\text{П. 1.15})$$

или

$$a_i = \sum_{k=1}^3 a'_k t_{ki}. \quad (\text{П. 1.16})$$

В координатной форме:

$$\begin{aligned} a_1 &= t_{11} a'_1 + t_{21} a'_2 + t_{31} a'_3; \\ a_2 &= t_{12} a'_1 + t_{22} a'_2 + t_{23} a'_3; \\ a_3 &= t_{31} a'_1 + t_{23} a'_2 + t_{33} a'_3. \end{aligned} \quad (\text{П. 1.17})$$

Введя матрицу перехода к «новой» системе координат  $\prod^{12} = \|t_{ki}\|_1^3$ , формулу (П. 1.15) можно представить в матричном виде:

$$\underline{a} = T^{12} \underline{a}'. \quad (\text{П. 1.18})$$

Основные свойства матрицы  $T^{12}$  :

а) определитель матрицы  $|T^{12}| = 1$ ;

б)  $\sum_{k=1}^3 (t_{kj})^2 = 1$ ;

в) обратная матрица  $(T^{12})^{-1} = T^{21}$  совпадает с транспонированной

$$(T^{12})^T = (T^{12})^{-1} = T^{21}.$$

Из (П. 1.18) получим

$$\underline{a}' = (T^{12})^{-1} \underline{a} = T^{21} \underline{a}. \quad (\text{П. 1.19})$$

**6. Преобразование вектора при повороте системы координат** определено формулой (П. 1.19). При таком преобразовании компоненты вектора обладают

инвариантностью по отношению к «новому» базису. Так, сумма квадратов компонентов вектора не зависит от базиса (длина вектора).

**Таким образом, есть такие матрицы, которые переводят вектор из одного пространства в другое, но физические свойства вектора при этом сохраняются.**

Назовём тензором второго ранга такую матрицу  $\|t_{ki}\|_1^3$ , которая переводит вектор  $\vec{a}$  в вектор  $\vec{b}$  по формуле:

$$b_i = \sum_{k=1}^3 t_{ik} a_k; \quad \vec{b} = T \vec{a},$$

где тензор  $T$  определяется матрицей

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

**Компоненты тензора зависят от выбора базиса, но вся совокупность компонентов отражает физическую величину, имеющую объективный смысл. Поэтому существует ряд независимых от выбора базиса аналитических соотношений, связывающих эти компоненты тензора.**

## 7. Основные свойства тензора

а. Компоненты тензора при повороте системы координат преобразуются по формулам:

$$t'_{ps} = \sum_{q=1}^3 \sum_{r=1}^3 \alpha_{pq} \alpha_{sr} t_{qr}. \quad (\text{П. 1.20})$$

Здесь  $\alpha_{pq} = (\vec{e}'_p, \vec{e}_q)$  – направляющий косинус орта «нового» базиса в «старом» базисе.

При обратном переходе от «нового» базиса к «старому» компоненты тензора второго ранга определяются так:

$$t_{qr} = \sum_{t=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{tq} \alpha_{sr} t'_{ts}. \quad (\text{П. 1.21})$$

Следовательно, компоненты тензора при переходе к другому базису преобразуются так же, как и произведения координат при таком же переходе.

б. Операции сложения и вычитания тензоров, умножения их на скаляр такие же, что и у векторов.

Компоненты суммы (разности) тензоров равны сумме (разности) соответствующих компонент слагаемых:

$$(P \pm Q)_{ik} = P_{ik} \pm Q_{ik},$$

$$(\lambda P)_{ik} = \lambda P_{ik} \quad (i=1,2,3; k=1,2,3).$$

в. Произведение тензора на вектор справа есть вектор, определяемый по формулам:

$$P \vec{a} = \vec{b},$$

$$b_k = (P \vec{a})_k = P_{k1} a_1 + P_{k2} a_2 + P_{k3} a_3, \quad (\text{П. 1.22})$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$\underline{b} = \underline{P} \cdot \underline{a}.$$

г. Произведение вектора на тензор слева – тоже вектор, определяемый по формулам:

$$\vec{c} = \vec{a} P,$$

$$C_k = (\vec{a} P)_k = a_1 P_{1k} + a_2 P_{2k} + a_3 P_{3k} = \sum_{s=1}^3 a_s P_{sk}, \quad (\text{П. 1.23})$$

или

$$P \vec{a} = \vec{a} P^T, \quad (\text{П. 1.24})$$

$$P^T \vec{a} = \vec{a} P. \quad (\text{П. 1.25})$$

Здесь  $P$  и  $P^T$  – сопряженные (транспонированные) тензоры:

$$P_{ik} = P_{ki}.$$

д. Скалярное произведение

$$(P \vec{a}, P \vec{a}) = P(\vec{a}, \vec{a}) P^T. \quad (\text{П. 1.26})$$

е. Диадное произведение

$$P \vec{a} \cdot P \vec{a} = P \vec{a} \cdot \vec{a} P^T. \quad (\text{П. 1.27})$$

***Последние два свойства нами используются для преобразования компонентов тензора инерции при повороте системы координат.***

## 4.2. Приложение 2

### *Кинетический момент и кинетическая энергия твёрдого тела в сферическом движении*

Покажем, что две основные динамические меры движения – кинетический момент относительно неподвижного центра и кинетическая энергия тела не могут быть определены без знания всех компонент тензора инерции тела в этой точке.

Пусть твёрдое тело совершает вращательное движение около неподвижной точки  $O$  (рис. П. 2.1). Известны мгновенная угловая скорость тела  $\vec{\omega}$  и все компоненты тензора инерции тела в точке  $O$ .

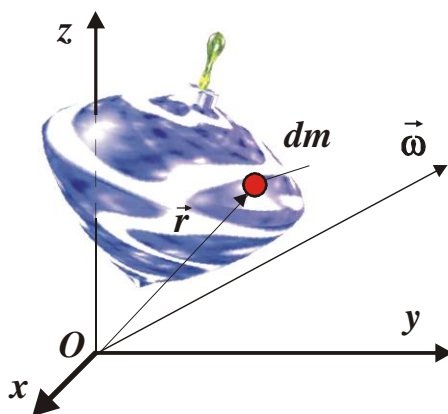


Рис. П. 2.1

Найдём сумму моментов количеств движения частиц тела относительно центра  $O$  – кинетический момент тела относительно этой точки  $O$ :

$$\vec{K}_0 = \int_{(V)} [\vec{r}, \vec{V}] dm. \quad (\text{П. 2.1})$$

Здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор частицы относительно точки  $O$ ;

$\vec{V}$  – скорость частицы;

$dm$  – масса частиц.

В кинематике известна формула Эйлера, определяющая скорость точки тела в сферическом движении:

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (\text{П. 2.2})$$

Подставим (П. 2.2) в (П. 2.1):

$$\vec{K}_0 = \int_{(j)} [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] dm.$$

Найдём компоненты вектора в подынтегральном выражении:

$$\begin{aligned} [\vec{\omega}, \vec{r}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \vec{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \vec{k}(\omega_x y - \omega_y x), \\ [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ (\omega_y z - \omega_z y) & (\omega_z x - \omega_x z) & (\omega_x y - \omega_y x) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]_x &= (y^2 + z^2)\omega_x - x y \omega_y - x z \omega_z, \\ [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]_y &= -y x \omega_x + (x^2 + z^2)\omega_y - y z \omega_z, \\ [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]_z &= -z x \omega_x - z y \omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z. \end{aligned} \quad (\text{П. 2.3})$$

Здесь  $x, y, z$  – координаты частицы;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции угловой скорости тела на соответствующие оси.

Используя понятия осевых и центробежных моментов инерции тела, имеем:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm, & I_{xy} &= \int x y dm, \\ I_y &= \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm, & I_{xz} &= \int x z dm, \\ I_z &= \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm, & I_{yz} &= \int y z dm. \end{aligned}$$

При подстановке (П.2.3) в (П.2.1) получим:

$$\begin{aligned} (\vec{K}_0)_x &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\ (\vec{K}_0)_y &= -I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \end{aligned} \quad (\text{П. 2.4})$$

$$\left(\vec{K}_0\right)_z = -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z.$$

Если тензором инерции тела  $I_O$  назвать матрицу

$$I_O = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix},$$

то формулу (П. 2.4) можно получить, если умножить тензора  $I_O$  на вектор  $\vec{\omega}$  справа:

$$\vec{K}_O = I_O \cdot \vec{\omega} \quad (\text{П. 2.5})$$

Получим выражение для кинетической энергии такого тела. Кинетическая энергия частицы тела равна

$$dT = \frac{dmV^2}{2}.$$

Следовательно, 
$$T = \frac{1}{2} \int V^2 dm.$$

Подставляя формулу Эйлера (П.2.2), получаем

$$T = \frac{1}{2} \int (\vec{V}, [\vec{\omega}, \vec{r}]). \quad (\text{П. 2.6})$$

В смешанном произведении, входящем в (П. 2.6), сомножители можно переставить в круговом порядке:

$$(\vec{V}, [\vec{\omega}, \vec{r}]) = (\vec{r}, [\vec{V}, \vec{\omega}]) = (\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{V}]).$$

Поэтому

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} (\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{V}]) dm.$$

Вынесем  $\vec{\omega}$  за знак интеграла:

$$T = \frac{1}{2} \left( \vec{\omega}, \int_{(M)} [\vec{r}, \vec{V}] dm \right).$$

Последний интеграл – кинетический момент тела относительно центра  $O$ .

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{K}_o), \quad (\text{П. 2.7})$$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} I_o \vec{\omega}. \quad (\text{П. 2.8})$$

В координатной форме (П. 2.7) можно записать:

$$T = \frac{1}{2}(\omega_x k_x + \omega_y k_y + \omega_z k_z); \quad (\text{П. 2.9})$$

$$T = \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{xz} \omega_x \omega_z - 2I_{yz} \omega_y \omega_z).$$

В главных осях инерции последнее выражение упрощается:

$$T = \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2). \quad (\text{П. 2.10})$$

Формулы П. 2.5 и П. 2.8 показывают, что для анализа динамики вращательного движения тела около неподвижной точки или оси необходимо знать компоненты тензора инерции в неподвижной точке.

### 4.3 Приложение 3

#### Моменты инерции тела при повороте системы координат на произвольный угол

Ось поворота	Угол поворота	Моменты инерции относительно координатных осей		
		$I_{x_1x_1}$	$I_{y_1y_1}$	$I_{z_1z_1}$
$x$	$\alpha_1$	$I_x$	$I_y \cos^2 \alpha_1 + I_z \sin^2 \alpha_1 + I_{yz} \sin 2\alpha_1$	$I_y \sin^2 \alpha_1 + I_z \cos^2 \alpha_1 - I_{yz} \sin 2\alpha_1$
$y$	$\alpha_2$	$I_x \cos^2 \alpha_2 + I_z \sin^2 \alpha_2 + I_{zx} \sin 2\alpha_2$	$I_y$	$I_x \sin^2 \alpha_2 + I_z \cos^2 \alpha_2 - I_{zx} \sin 2\alpha_2$
$z$	$\alpha_3$	$I_x \cos^2 \alpha_3 + I_y \sin^2 \alpha_3 - I_{xy} \sin 2\alpha_3$	$I_x \sin^2 \alpha_3 + I_y \cos^2 \alpha_3 + I_{xy} \sin 2\alpha_3$	$I_z$
Ось поворота	Угол поворота	Центробежные моменты инерции		
		$I_{y_1z_1}$	$I_{z_1x_1}$	$I_{x_1y_1}$
$x$	$\alpha_1$	$I_{y \cdot z} \cos 2\alpha_1 + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha_1$	$I_{z \cdot x} \cos \alpha_1 - I_{x \cdot y} \sin \alpha_1$	$I_{z \cdot x} \sin \alpha_1 + I_{x \cdot y} \cos \alpha_1$
$y$	$\alpha_2$	$I_{y \cdot z} \cos \alpha_2 + I_{x \cdot y} \sin \alpha_2$	$I_{z \cdot x} \cos 2\alpha_2 + \frac{I_z - I_x}{2} \sin 2\alpha_2$	$-I_{y \cdot z} \sin \alpha_2 + I_{x \cdot y} \cos \alpha_2$
$z$	$\alpha_3$	$I_{y \cdot z} \cos \alpha_3 - I_{z \cdot x} \sin \alpha_3$	$I_{y \cdot z} \sin \alpha_3 + I_{z \cdot x} \cos \alpha_3$	$I_{x \cdot y} \cos 2\alpha_3 + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_3$



#### 4.4. Приложение 4

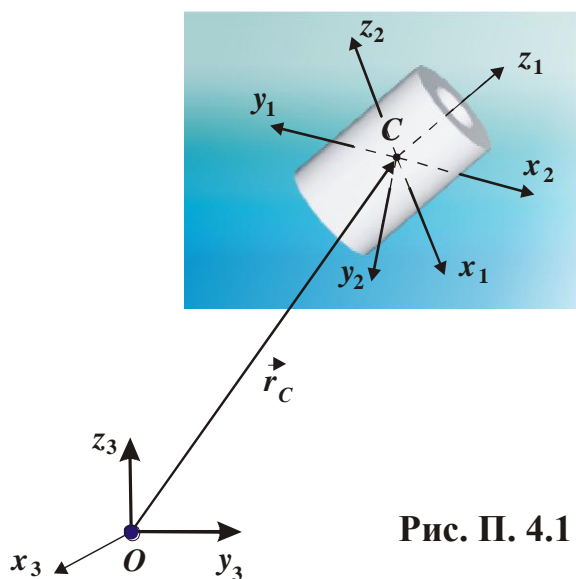
##### *Построение и преобразование тензора инерции в пакете MathCad*

###### *Задача*

Задан цилиндр с отверстием вдоль оси (рис. П. 4.1).  $R$  – радиус цилиндра,  $r$  – радиус отверстия,  $H$  – высота.

Построить тензор инерции тела в главных центральных осях инерции  $C x_1 y_1 z_1$ . Найти составляющие тензора инерции при повороте системы координат  $C x_1 y_1 z_1$  (система координат  $C x_2 y_2 z_2$ ) и параллельном переносе системы координат  $C x_2 y_2 z_2$  из центра масс в точку  $O$  (система координат  $O x_3 y_3 z_3$ ). Найти положение главных осей инерции тела в произвольной точке тела  $O$ .

Поворот системы координат  $C x_1 y_1 z_1$  осуществляется последовательно на угол  $30^\circ$  вокруг осей  $C x_1, C y_1, C z_1$ . Координаты точки  $C$  в пространстве  $O x_3 y_3 z_3 - (3, 5, 5)$ .



*Решение в пакете MathCad*

**ORIGIN:= 1**

Масса:  $m := 50 \text{ кг};$   
 $R := 10 \text{ м};$

Высота цилиндра:  $H := 10 \text{ м};$   
 $r := 5 \text{ м}.$

Плотность материала:  $\rho = \frac{m}{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot H} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \rho = 0,021 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}.$

Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей (центральных осей симметрии  $C x_1 y_1 z_1$ ):

$$I_{x_1} := \pi \cdot \left( \frac{R^2 + r^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \cdot m \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{y_1} = I_{x_1} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_{z_1} := \pi \cdot \frac{R^2 + r^2}{2} \cdot m \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тензор инерции цилиндра (рис. П. 4.2) в главных центральных осях имеет диагональный вид:

$$\Theta_{C_1} := \text{diag} \left( \begin{pmatrix} I_{x_1} \\ I_{y_1} \\ I_{z_1} \end{pmatrix} \right); \quad \Theta_{C_1} = \begin{pmatrix} 6,218 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 6,218 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 9,817 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

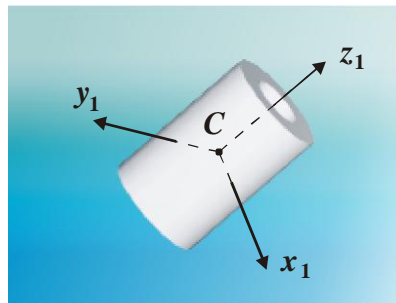


Рис. П. 4.2

Построим тензор инерции тела в центральных осях, полученных поворотом вокруг оси  $x_1$  на угол  $\alpha = 30^\circ$  (рис П. 4.3):

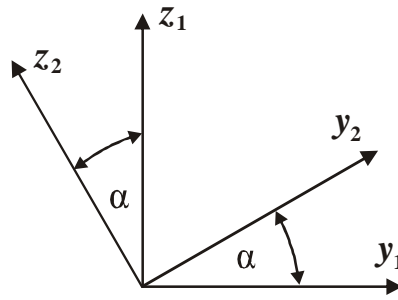


Рис. П. 4.3

Матрица поворота вокруг оси  $x_1$  на угол  $\alpha$  (против хода часовой стрелки):

$$\alpha := 30 \cdot \frac{\pi}{180};$$

$$P_{21x} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}; \quad P_{21x} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,866 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,866 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы:

$$|P_{21x}| = 1.$$

Считаем тензор инерции тела после поворота на угол  $\alpha$  вокруг оси  $x_1$ :

$$\Theta_{C_2x} := [P_{21x} \cdot \Theta_{C_1} \cdot (P_{21x}^T)];$$

$$\Theta_{C_1} = \begin{pmatrix} 6,218 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 6,218 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 9,817 \times 10^3 \end{pmatrix};$$

$$\Theta_{C_2x} = \begin{pmatrix} 6,218 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 7,118 \times 10^3 & 1,559 \times 10^3 \\ 0 & 1,559 \times 10^3 & 8,918 \times 10^3 \end{pmatrix}.$$

Осевые моменты инерции  $I_x, I_y, I_z$  относительно новых осей  $x_2, y_2, z_2$  после поворота:

$$\begin{aligned}
I_{x_2} &:= \Theta_{C_2} x_{1,1}; & I_{y_2} &:= \Theta_{C_2} x_{2,2}; & I_{z_2} &:= \Theta_{C_2} x_{3,3}; \\
I_{x_1} &:= 6,218 \times 10^3; & I_{y_1} &:= 6,218 \times 10^3; & I_{z_1} &:= 9,817 \times 10^3; \\
I_{x_2} &:= 6,218 \times 10^3; & I_{y_2} &:= 7,118 \times 10^3; & I_{z_2} &:= 8,918 \times 10^3; \\
|\Theta_{C_2} x| &= 3,795 \times 10^{11}; & \cos(\alpha) &= 0,866; & \alpha &= 30 \text{ deg}.
\end{aligned}$$

Матрица поворота вокруг оси  $y_1$  (против хода часовой стрелки) на угол  $\beta = 30^\circ$  (рис. П. 4.4) :

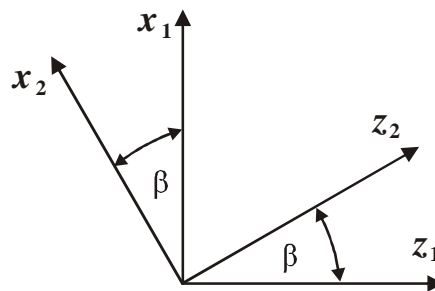


Рис. П. 4.4

$$\beta := 30 \cdot \frac{\pi}{180};$$

$$P_{21y} := \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}; \quad P_{21y} := \begin{pmatrix} 0,866 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,866 \end{pmatrix}; \quad |P_{21y}| = 1.$$

Матрица поворота вокруг оси  $z_1$  (против хода часовой стрелки) на угол  $\gamma = 30^\circ$  (рис. П. 4.5):

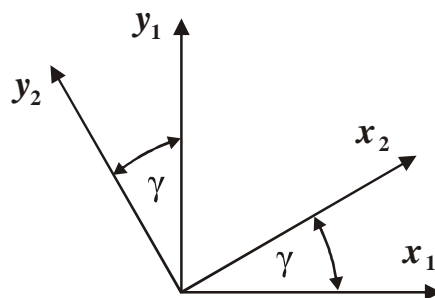


Рис. П. 4.5

$$\gamma := 30 \cdot \frac{\pi}{180};$$

$$P_{21z} := \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{pmatrix}; \quad P_{21z} := \begin{pmatrix} 0,866 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,866 \end{pmatrix}; \quad |P_{21z}| = 1.$$

После трёх последовательных поворотов получим следующую матрицу поворота:

$$P_{21} := P_{21x} \cdot P_{21y} \cdot P_{21z}.$$

$$\text{Определим матрицу поворота: } P_{21} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & -0,886 \\ 0,433 & 0,866 & 0,25 \\ 0,75 & -0,5 & 0,433 \end{pmatrix}, \text{ определитель}$$

матрицы:  $|P_{21}| = 1$ .

Ортогональность строк матрицы доказывают равенства:

$$\sum_{i=1}^3 (P_{21_{1,i}} \cdot P_{21_{2,i}}) = 0; \quad \sum_{i=1}^3 (P_{21_{3,i}} \cdot P_{21_{2,i}}) = 0.$$

Считаем тензор инерции тела после всех трёх поворотов:

$$\Theta_{C_2} := [P_{21} \cdot \Theta_{C_1} \cdot (P_{21}^T)].$$

Сравним тензор инерции в главных центральных осях и тензор, полученный после трёх последовательных поворотов на  $30^\circ$ :

$$\Theta_{C_1} = \begin{pmatrix} 6,218 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 6,218 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 9,817 \times 10^3 \end{pmatrix};$$

$$\Theta_{C_2} = \begin{pmatrix} 8,918 \times 10^3 & -779,367 & -1,35 \times 10^3 \\ -779,367 & 6,443 \times 10^3 & 389,683 \\ -1,35 \times 10^3 & 389,683 & 6,893 \times 10^3 \end{pmatrix}.$$

Осевые моменты инерции  $I_x, I_y, I_z$  относительно новых и старых осей

$x_2, y_2, z_2$  и  $x_1, y_1, z_1$  после поворота:

$$\begin{aligned} I_{x_2} &:= \Theta_{C_{2,1,1}}; & I_{y_2} &:= \Theta_{C_{2,2,2}}; & I_{z_2} &:= \Theta_{C_{2,3,3}}; \\ I_{x_1} &:= 6,218 \times 10^3; & I_{y_1} &:= 6,218 \times 10^3; & I_{z_1} &:= 9,817 \times 10^3; \\ I_{x_2} &:= 8,918 \times 10^3; & I_{y_2} &:= 6,443 \times 10^3; & I_{z_2} &:= 6,893 \times 10^3. \end{aligned}$$

Центробежные моменты инерции  $I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$  относительно новых  $x_2, y_2, z_2$  и старых  $x_1, y_1, z_1$  осей после поворота:

$$\begin{aligned} I_{x_1 y_1} &:= 0; & I_{y_1 z_1} &:= 0; & I_{x_1 z_1} &:= 0; \\ I_{x_2 y_2} &:= \Theta_{C_{2,1,2}}; & I_{x_2 z_2} &:= \Theta_{C_{2,1,3}}; & I_{y_2 z_2} &:= \Theta_{C_{2,2,3}}; \\ I_{x_2 y_2} &:= -779,367; & I_{x_2 z_2} &:= -1350; & I_{y_2 z_2} &:= 389,683. \end{aligned}$$

Получим тензор инерции после параллельного переноса системы координат из центра масс  $C$  в точку  $O$  (рис. П. 4.6):

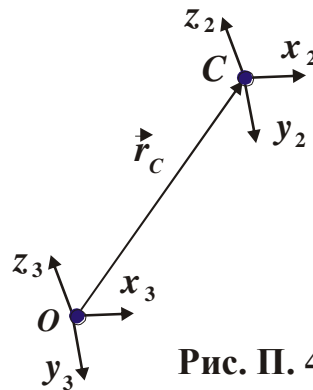


Рис. П. 4.6

Радиус-вектор точки  $C$ :

$$r_C := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Единичный тензор:

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Скалярное произведение:

$$r_C \cdot r_C = 59,$$

Диадное произведение:  $r_C \cdot r_C^T = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 15 \\ 15 & 25 & 25 \\ 15 & 25 & 25 \end{pmatrix}.$

После параллельного переноса тензор инерции:

$$\Theta_{O_3} := \Theta_{C_2} + m \cdot (r_C \cdot r_C \cdot E - r_C \cdot r_C^T)$$

$$\Theta_{O_3} = \begin{pmatrix} 1,142 \times 10^4 & -1,529 \times 10^3 & -2,1 \times 10^3 \\ -1,529 \times 10^3 & 8,143 \times 10^3 & -860,317 \\ -2,1 \times 10^3 & -860,317 & 8,593 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Осевые моменты инерции  $I_x, I_y, I_z$  относительно новых  $x_3, y_3, z_3$  и старых  $x_2, y_2, z_2$  осей после поворота:

$$\begin{array}{lll} I_{x_2} = 8,918 \times 10^3; & I_{y_2} = 6,443 \times 10^3; & I_{z_2} = 6,893 \times 10^3; \\ I_{x_3} := \Theta_{O_{3,1}}; & I_{y_3} := \Theta_{O_{3,2}}; & I_{z_3} := \Theta_{O_{3,3}}; \\ I_{x_3} = 1,142 \times 10^4; & I_{y_3} = 8,143 \times 10^3; & I_{z_3} = 8,593 \times 10^3. \end{array}$$

Центробежные моменты инерции  $I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$  относительно новых  $x_3, y_3, z_3$  и старых  $x_2, y_2, z_2$  осей после поворота:

$$\begin{array}{lll} I_{x_1 y_1} := 0; & I_{x_1 z_1} := 0; & I_{y_1 z_1} := 0; \\ I_{x_2 y_2} = -779,367; & I_{x_2 z_2} = -1,35 \times 10^3; & I_{y_2 z_2} = 389,683; \\ I_{x_3 y_3} := (-\Theta_{O_3})_{1,3}; & I_{x_3 z_3} := (-\Theta_{O_3})_{1,3}; & I_{y_3 z_3} := (-\Theta_{O_3})_{2,3}; \\ I_{x_3 y_3} = 1,529 \times 10^3; & I_{x_3 z_3} = 2,1 \times 10^3; & I_{y_3 z_3} = 860,317. \end{array}$$

Осевые и центробежные моменты инерции  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  можно рассчитать и по формуле Гюйгенса–Штейнера для параллельного переноса системы ко-

ординат:

$$I_{x_3} := \Theta_{C_{2,1}} = m \cdot \left[ (r_{C_2})^2 + (r_{C_3})^2 \right]; \quad I_{x_3} = 1,142 \times 10^4.$$

Здесь  $(r_{C_2})^2 + (r_{C_3})^2$  – квадрат расстояния от оси  $x$  в точке  $C$  до оси  $x$  в точке  $O$  после параллельного переноса из точки  $C$  в точку  $O$ .

$$I_{y_3} := \Theta_{C_{2,2}} + m \cdot \left[ (r_{C_1})^2 + (r_{C_3})^2 \right]; \quad I_{y_3} = 8,143 \times 10^3;$$

$$I_{z_3} := \Theta_{C_{2,3}} + m \cdot \left[ (r_{C_1})^2 + (r_{C_2})^2 \right]; \quad I_{z_3} = 8,593 \times 10^3.$$

$$I_{x_3y_3} := \left( -\Theta_{C_2} \right)_{1,2} + m \cdot r_{C_1} \cdot r_{C_2}; \quad I_{x_3y_3} = 1,529 \times 10^3;$$

$$I_{x_3z_3} := \left( -\Theta_{C_2} \right)_{1,3} + m \cdot r_{C_1} \cdot r_{C_3}; \quad I_{x_3z_3} = 2,1 \times 10^3;$$

$$I_{y_3z_3} := \left( -\Theta_{C_2} \right)_{2,3} + m \cdot r_{C_2} \cdot r_{C_3}; \quad I_{y_3z_3} = 860,317.$$

Определим положение главных осей инерции тела в точке  $O$ , инварианты тензора в точке  $O$ .

Сумма элементов на главной диагонали (след матрицы):

$$A_1 := \left( \Theta_{O_{3,1}} + \Theta_{O_{3,2}} + \Theta_{O_{3,3}} \right); \quad A_1 = 2,815 \times 10^4.$$

Сумма главных диагональных миноров второго порядка:

$$A_2 = \left| \begin{pmatrix} \Theta_{O_{3,1}} & \Theta_{O_{3,1,2}} \\ \Theta_{O_{3,2,1}} & \Theta_{O_{3,2,2}} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \Theta_{O_{3,1}} & \Theta_{O_{3,1,3}} \\ \Theta_{O_{3,3,1}} & \Theta_{O_{3,3,3}} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \Theta_{O_{3,2,2}} & \Theta_{O_{3,2,3}} \\ \Theta_{O_{3,3,2}} & \Theta_{O_{3,3,3}} \end{pmatrix} \right|;$$

$$A_2 = 2,536 \times 10^8.$$

Определитель тензора:

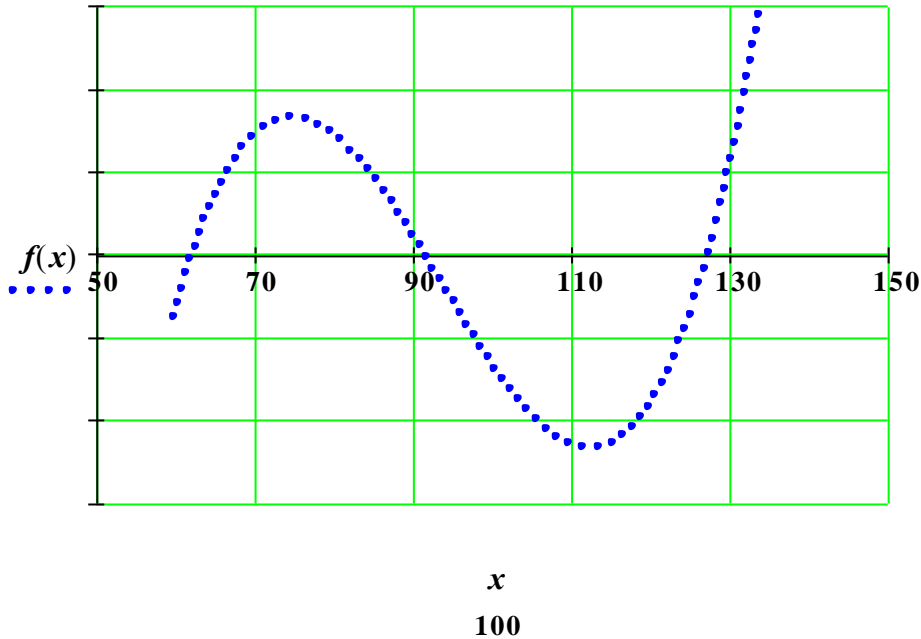
$$A_3 := \left| \Theta_{O_3} \right|; \quad A_3 = 7,289 \times 10^{11}.$$

Вековое уравнение тензора инерции:



$$x^3 - A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot x - A_3 = 0.$$

Построим график функции  $f(x) = x^3 - A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot x - A_3$  и определим корни векового уравнения (рис. П. 4.7):



$$f(x) := x^3 - A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot x - A_3.$$

Рис. П. 4.7

Алгебраическое решение векового уравнения тензора инерции:

$$V := \begin{pmatrix} -A_3 \\ A_2 \\ -A_1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad I := \text{polyroots}(V); \quad I = \begin{pmatrix} 6236,12916 \\ 9167,73546 \\ 12749,08334 \end{pmatrix}.$$

Эти корни – осевые моменты инерции относительно главных осей. После применения функции *polyroots* корни расположены в порядке возрастания, поэтому не всегда понятно относительно какой оси каждый момент инерции.

Найдём положение главных осей инерции. Первый главный момент инерции тела равен  $I_1$ , поэтому вычисление главных миноров  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  выглядит так:

$$\Delta_1 := \begin{bmatrix} -I_{x_3 y_3} & -I_{x_3 z_3} \\ (I_{y_3} - I_1) & I_{y_3 z_3} \end{bmatrix}; \quad \Delta_2 := \begin{bmatrix} -I_{x_3 y_3} & -I_{y_3 z_3} \\ (I_{y_3} - I_1) & -I_{x_3 z_3} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_3 := \begin{bmatrix} (I_{x_3} - I_1) & -I_{x_3 y_3} \\ -I_{x_3 y_3} & (I_{y_3} - I_1) \end{bmatrix}.$$

$$\Delta_1 = 5,319 \times 10^6; \quad \Delta_2 = 4,852 \times 10^6; \quad \Delta_3 = 7,54 \times 10^6.$$

Направляющие косинусы для первой главной оси инерции и осей  $x_3, y_3, z_3$ :

$$\cos \alpha_1 := \frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}; \quad \cos \beta_1 := \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}; \quad \cos \gamma_1 := \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}.$$

$$\cos \alpha_1 = 0,51; \quad \cos \beta_1 = 0,465; \quad \cos \gamma_1 = 0,723.$$

Второй главный момент инерции тела равен  $I_2$ :

$$\Delta_1 := \begin{bmatrix} -I_{x_3 y_3} & -I_{x_3 z_3} \\ (I_{y_3} - I_2) & I_{y_3 z_3} \end{bmatrix}; \quad \Delta_2 := \begin{bmatrix} -I_{x_3 y_3} & -I_{y_3 z_3} \\ (I_{y_3} - I_2) & -I_{x_3 z_3} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_3 := \begin{bmatrix} (I_{x_3} - I_2) & -I_{x_3 y_3} \\ -I_{x_3 y_3} & (I_{y_3} - I_2) \end{bmatrix}.$$

$$\Delta_1 = 2,33 \times 10^6; \quad \Delta_2 = 4,852 \times 10^6; \quad \Delta_3 = -4,645 \times 10^6.$$

Направляющие косинусы для второй главной оси инерции и осей  $x_3, y_3, z_3$ :

$$\cos \alpha_2 := \frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}; \quad \cos \beta_2 := \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}; \quad \cos \gamma_2 := \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}.$$

$$\cos \alpha_2 = 0,328; \quad \cos \beta_2 = 0,628; \quad \cos \gamma_2 = -0,653.$$

Третий главный момент инерции тела равен  $I_3$ :

$$\Delta_1 := \begin{bmatrix} -I_{x_3 y_3} & -I_{x_3 z_3} \\ (I_{y_3} - I_3) & I_{y_3 z_3} \end{bmatrix}; \quad \Delta_2 := \begin{bmatrix} -I_{x_3 y_3} & -I_{y_3 z_3} \\ (I_{y_3} - I_3) & -I_{x_3 z_3} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_3 := \begin{bmatrix} (I_{x_3} - I_3) & -I_{x_3 y_3} \\ -I_{x_3 y_3} & (I_{y_3} - I_3) \end{bmatrix}.$$

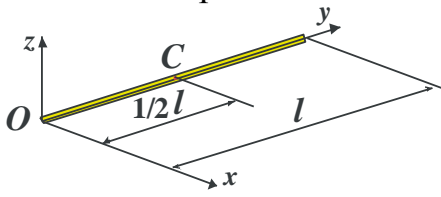
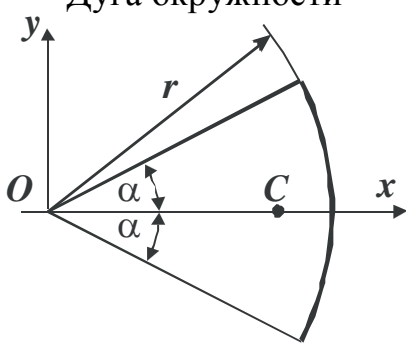
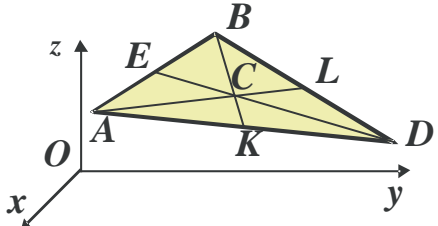
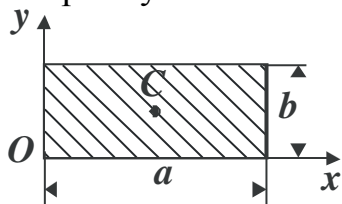
$$\Delta_1 = -8,357 \times 10^6; \quad \Delta_2 = -7,514 \times 10^6; \quad \Delta_3 = 3,795 \times 10^6.$$

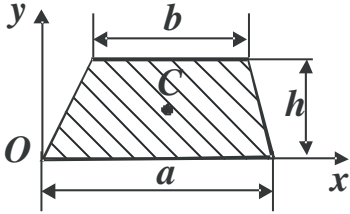
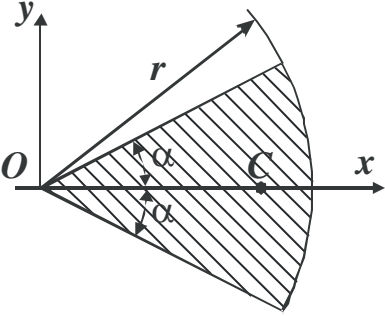
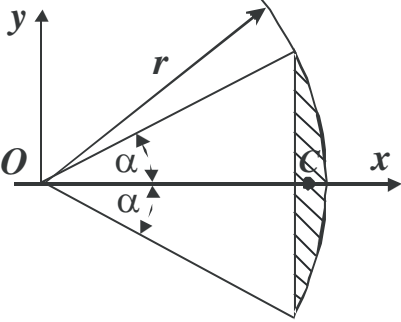
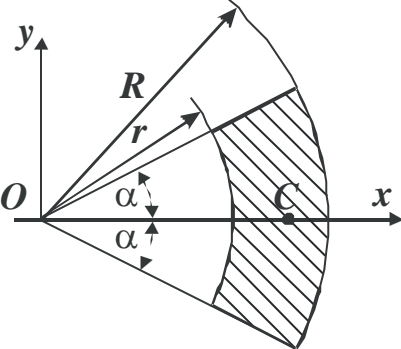
Направляющие косинусы для третьей главной оси инерции и осей  $x_3, y_3, z_3$ :

$$\cos \alpha_3 := \frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}; \quad \cos \beta_3 := \frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}; \quad \cos \gamma_3 := \frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}.$$

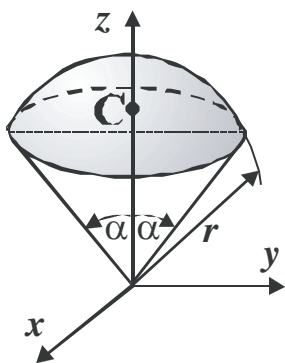
## 4.5. Приложение 5

### Центры масс некоторых однородных тел

Тело	Положение (координаты) точки $C$ - центра масс тела
<p>Тонкий прямолинейный стержень</p> 	$x_C = 0 \quad y_C = \frac{\ell}{2}, \quad z_C = 0,$ <p>где <math>\ell</math> – длина стержня</p>
<p>Дуга окружности</p> 	$x_C = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}, \quad y_C = 0,$ <p>где <math>r</math> – радиус окружности, <math>\alpha</math> – угол в радианах;</p> <p>при <math>\alpha = \frac{\pi}{2}</math> (полуокружность) <math>x_C = \frac{2r}{\pi}</math>,</p> <p>при <math>\alpha = \pi</math> (окружность – тонкое кольцо) <math>x_C = 0</math></p>
<p>Тонкая пластина в форме треугольника</p> 	$\frac{BC}{CK} = \frac{DC}{CE} = \frac{AC}{CL}, \quad x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),$ $y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3),$ $z_C = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3),$ <p>где в скобках соответственно координаты вершин <math>A, B, D</math></p>
<p>Тонкая пластина в форме прямоугольника</p> 	$x_C = \frac{a}{2}, \quad y_C = \frac{b}{2},$ <p>где <math>a, b</math> – размеры сторон прямоугольника</p>

<p>Тонкая пластина в форме трапеции</p> 	$y_C = \frac{h(a + 2b)}{3(a + b)},$ <p>где <math>a, b, h</math> – размеры оснований и высоты трапеции;</p> <p>для равнобокой трапеции <math>x_C = \frac{a}{2}</math></p>
<p>Тонкая пластина в форме кругового сектора</p> 	$x_C = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin \alpha}{\alpha}, \quad y_C = 0,$ <p>где <math>r</math> – радиус дуги сектора, <math>\alpha</math> – угол в радианах;</p> <p>при <math>\alpha = \frac{\pi}{2}</math> (полукруг) <math>x_C = \frac{4r}{3\pi}</math>,</p> <p>при <math>\alpha = \pi</math> (круг – диск) <math>x_C = 0</math></p>
<p>Тонкая пластина в форме кругового сегмента</p> 	$x_C = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}, \quad y_C = 0,$ <p>где <math>r</math> – радиус дуги сегмента, <math>\alpha</math> – угол в радианах</p>
<p>Тонкая пластина в форме части кругового кольца</p> 	$x_C = \frac{2}{3} \cdot \frac{(R^3 - r^3) \sin \alpha}{(R^2 - r^2) \alpha}, \quad y_C = 0,$ <p>где <math>R, r</math> – внешний и внутренний радиусы дуг кольца, <math>\alpha</math> – угол в радианах</p>

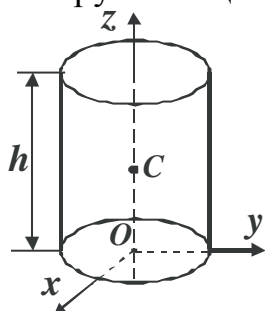
Сферический сегмент



$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad z_C = \frac{1}{2}r(1 + \cos\alpha),$$

где  $r$  – радиус сферы,  $\alpha$  – угол в радианах

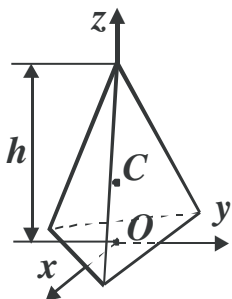
Прямой круговой цилиндр



$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad z_C = \frac{h}{2},$$

где  $h$  – высота цилиндра

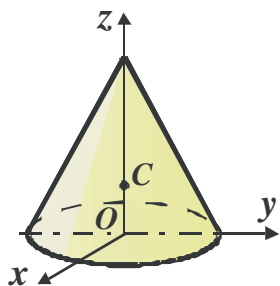
Правильная пирамида  
(тетраэдр)



$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad z_C = \frac{h}{4},$$

где  $h$  – высота пирамиды

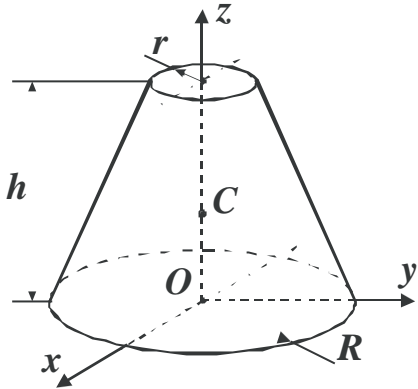
Прямой круговой конус



$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad z_C = \frac{h}{4},$$

где  $h$  – высота конуса

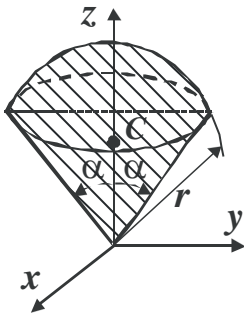
Усеченный прямой круговой конус



$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad z_C = \frac{1}{4} \cdot \frac{[R^4 - r^4 - r^3(R - r)]h}{(R^3 - r^3)(R - r)},$$

где  $R, r, h$  – радиусы оснований и высота конуса

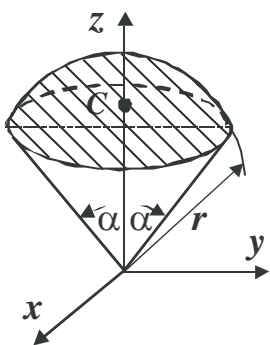
Шаровой сектор



$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad z_C = \frac{3}{8} \cdot r(1 + \cos \alpha),$$

где  $r$  – радиус сферы сектора,  $\alpha$  – угол в радианах

Шаровой сегмент



$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \quad z_C = \frac{r \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cos^2 \alpha \right) \sin^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha) - \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha},$$

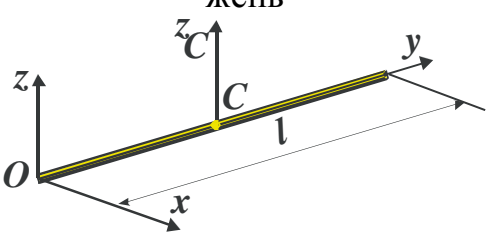
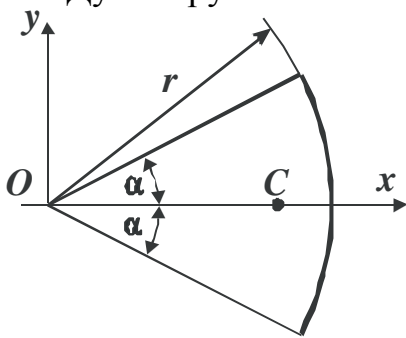
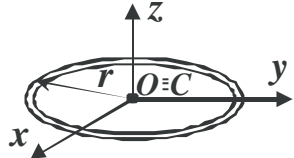
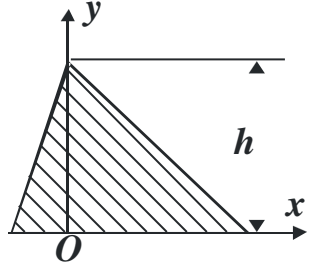
где  $r$  – радиус сферы сегмента,  $\alpha$  – угол в радианах;

при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (полушар)  $z_C = \frac{3}{8}r,$

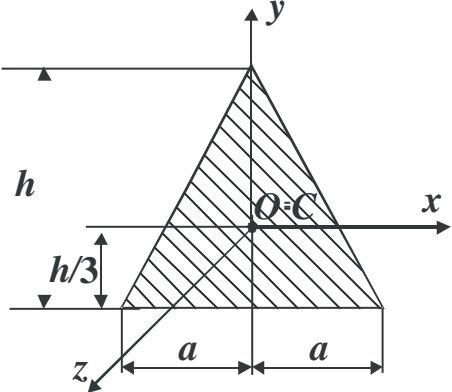
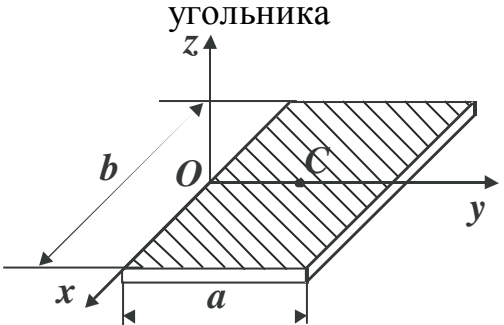
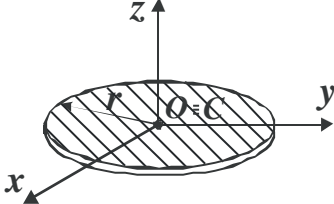
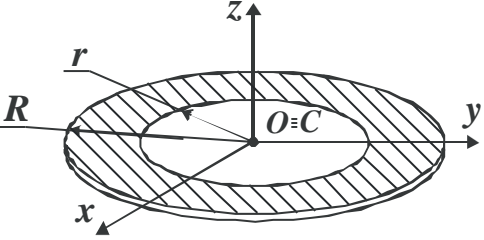
при  $\alpha = \pi$  (шар)  $z_C = 0$

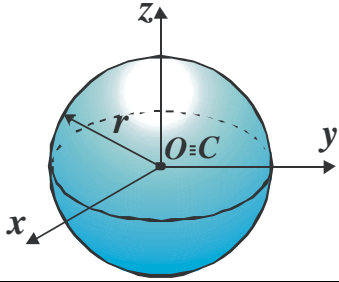
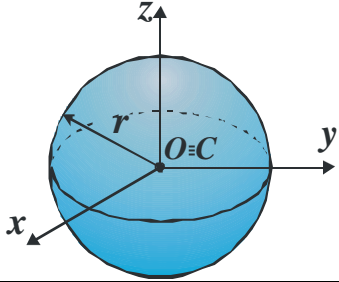
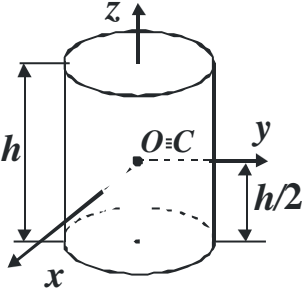
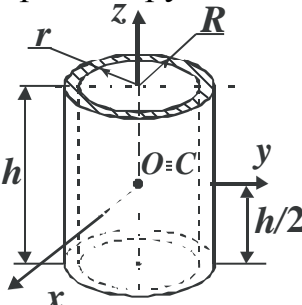
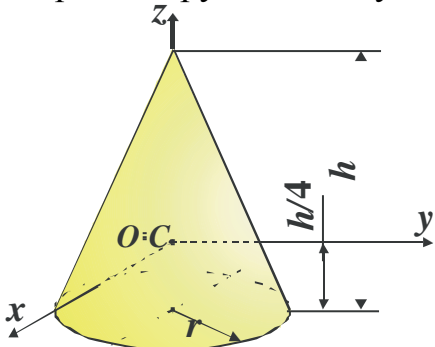
#### 4.6. Приложение 6

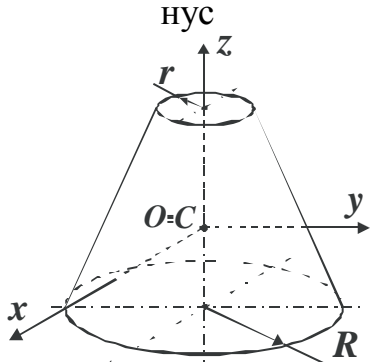
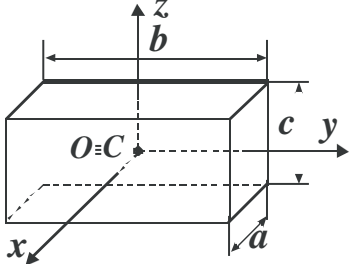
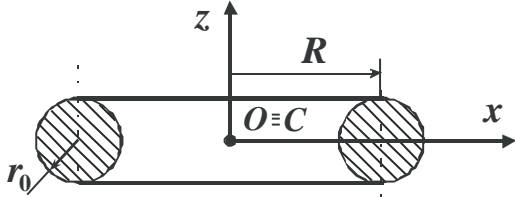
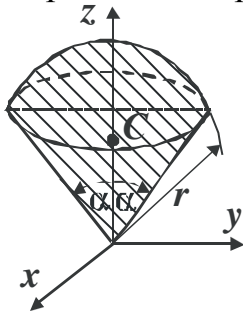
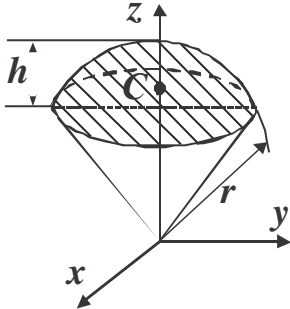
##### Моменты инерции некоторых однородных тел

Тело	Моменты инерции тела массы $M$
<p>Тонкий прямолинейный стержень</p> 	$I_z = I_x = \frac{M\ell^2}{3}, \quad I_y = 0, \quad I_{zC} = I_{xC} = \frac{M\ell^2}{12},$ <p>где <math>\ell</math> – длина стержня</p>
<p>Дуга окружности</p> 	$I_x = \frac{Mr^2}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right), \quad I_y = \frac{Mr^2}{2} \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right),$ <p>где <math>r</math> – радиус окружности, <math>\alpha</math> – угол в радианах</p>
<p>Тонкое кольцо</p> 	$I_x = I_y = \frac{Mr^2}{2}, \quad I_z = Mr^2,$ <p>где <math>r</math> – радиус окружности кольца</p>
<p>Тонкая пластина в форме треугольника</p> 	$I_x = \frac{Mh^2}{6},$ <p>где <math>h</math> – высота треугольника</p>



<p>Тонкая пластина в форме равнобедренного треугольника</p> 	$I_x = \frac{Mh^2}{18}, \quad I_y = \frac{Ma^2}{6}, \quad I_z = \frac{M(3a^2 + h^2)}{18},$ <p>где <math>2a, h</math> – длины основания и высоты треугольника</p>
<p>Тонкая пластина в форме прямоугольника</p> 	$I_x = \frac{Ma^2}{3}, \quad I_y = \frac{Mb^2}{12}, \quad I_z = M\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12}\right),$ <p>где <math>a, b</math> – размеры сторон прямоугольника</p>
<p>Тонкая пластина в форме круга</p> 	$I_x = I_y = \frac{Mr^2}{4}, \quad I_z = \frac{Mr^2}{2},$ <p>где <math>r</math> – радиус круга</p>
<p>Тонкая пластина в форме кругового кольца</p> 	$I_x = I_y = \frac{M(R^2 + r^2)}{4}, \quad I_z = \frac{M(R^2 + r^2)}{2},$ <p>где <math>R, r</math> – внешний и внутренний радиусы дуг кольца</p>

<p>Сферическая поверхность</p> 	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}Mr^2,$ <p>где <math>r</math> – радиус сферы</p>
<p>Шар</p> 	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}Mr^2,$ <p>где <math>r</math> – радиус шара</p>
<p>Прямой круговой цилиндр</p> 	$I_x = I_y = \frac{M}{12}(3r^2 + h^2), \quad I_z = \frac{Mr^2}{2},$ <p>где <math>r, h</math> – радиус и высота цилиндра</p>
<p>Полый прямой круговой цилиндр</p> 	$I_x = I_y = \frac{M}{12}(3R^2 + 3r^2 + h^2),$ $I_z = \frac{M(R^2 + r^2)}{2},$ <p>где <math>R, r, h</math> – внешний, внутренний радиусы и высота цилиндра</p>
<p>Прямой круговой конус</p> 	$I_x = I_y = \frac{3}{20}M \left( r^2 + \frac{h^2}{4} \right); \quad I_z = \frac{3}{10}Mr^2,$ <p>где <math>r, h</math> – радиус основания и высота конуса</p>

<p>Усеченный прямой круговой конус</p> 	$I_z = \frac{3}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3},$ <p>где <math>R, r</math> – радиусы оснований конуса</p>
<p>Прямоугольный параллелепипед</p> 	$I_x = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2);$ $I_y = \frac{1}{12} M (c^2 + a^2); I_z = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2),$ <p>где <math>a, b, c</math> – размеры сторон параллелепипеда</p>
<p>Кольцо круглого сечения (тор)</p> 	$I_z = M \left( R^2 + \frac{3}{4} r_0^2 \right); I_x = M \left( \frac{1}{2} R^2 + \frac{5}{8} r_0^2 \right),$ <p>где <math>R, r_0</math> – размеры тора</p>
<p>Шаровой сектор</p> 	$I_z = \frac{1}{5} M r^2 (1 - \cos \alpha) \cdot (2 + \cos \alpha),$ <p>где <math>r</math> – радиус сферы сектора, <math>\alpha</math> – угол в радианах;  при <math>\alpha = \frac{\pi}{2}</math> (полушар) <math>I_z = \frac{2}{5} M r^2</math></p>
<p>Шаровой сегмент</p> 	$I_z = \frac{1}{10} M h \cdot \frac{20r^2 - 15rh + 3h^2}{3r - h},$ <p>где <math>r, h</math> – радиус сферы, высота сегмента</p>