Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

Южно-Уральский государственный университет

Кафедра теоретической механики и основ проектирования машин

531(07)
П 858

Ю.Г. Прядко, В.Г. Караваев, И.П. Осолотков

ВВЕДЕНИЕ
в
теоретическую механику

Челябинск

Издательство ЮУрГУ

2009

Оглавление

Введение

Данное пособие рассчитано на студентов всех специальностей, приступающих к изучению предмета, который называется «Теоретическая механика» (ТМ).

В курсах физики средних учебных заведений и высшей школы Вы изучали раздел «Механика», где знакомились с простейшими понятиями и законами, вводимыми в ТМ.

Ввиду того, что механическое движение не определяет все физические явления, изучения механики в рамках курса физики недостаточно для всесторонней подготовки бакалавров и специалистов - механиков. В последующем многие из Вас будут осваивать много других дисциплин, опирающихся на знания, которые Вы получите в теоретической механике. Такими дисциплинами будут: сопротивление материалов, теория машин и механизмов, детали машин, строительная механика, механика жидкости и газа, гидравлика и др.

Курс ТМ в высшей школе чаще всего является заключительным в изучении основных закономерностей механического движения материальных объектов (МО).

Последняя встреча с основами механики накладывает на студента и преподавателя определенные обязательства. Студенту требуется ***точно*** освоить основные понятия, законы и методы, что позволит использовать их без изменения и в других областях знаний. Преподавателю же необходимо в доступной форме изложить эти понятия и законы.

В данном пособии сделана попытка определить и уточнить некоторые простейшие положения теоретической механики. В основном это те положения, с которыми студент, приступающий к изучению курса ТМ, уже встречался в курсе физики.

Надеемся на то, что краткое и по возможности доступное изложение основных понятий поможет в дальнейшем быстрее войти в мир теоретической механики. Здание нашей науки возводилось все время существования человека. Строится оно и в настоящее время. Ведь первое явление, с которым человек встречается (наблюдает и осязает) – это перемещение (движение и покой) тел и самого человека в пространстве.

Обращаем Ваше внимание и на то, что кроме изложения основ механики в пособии приведены также элементарные математические сведения, которые, как нам кажется, многим приступающим к изучению теоретической механики часто необходимы, ввиду недостатка знаний по математике.

1. *Основные понятия механики*

1.1 Предмет теоретической механики:

Есть целый ряд дисциплин, в названии которых присутствует слово механика: механика твёрдого тела, механика жидкости и газа, небесная механика, строительная механика и т.д.

Механика, от греческого μηχανική – наука о машинах, искусство построения машин, – наука о механическом движении материальных объектов и происходящем при этом взаимодействии между ними.

Под механическим движением следует понимать изменение с течением времени взаимного положения тел или взаимного положения частиц тела – его деформацию.

В теоретической механике изучаются наиболее общие закономерности механического движения материальных объектов (МО).

Механическое движение – это изменение положения МО в пространстве с течением времени.

Примерами механического движения в природе являются движения небесных тел, воздушные и морские течения, движение капель дождя, и т.п., в технике – движение летательных аппаратов, машин, частей двигателей, машин и механизмов, деформации элементов конструкций и сооружений, движение жидкостей и газов и т.д.

Под взаимодействием следует понимать те действия объектов друг на друга, результатом которых может явиться изменение скоростей точек тел или их деформации, например, взаимные давления соприкасающихся тел, взаимодействия частиц жидкости или газа друг на друга и на движущиеся в них тела, взаимодействия в гравитационных, электростатических и электромагнитных полях и др.

Понятия пространства и времени, их свойства являются базовыми для построения моделей материального мира.

1.2 Пространство

Пространство – первичное понятие, возникшее в ходе практической дея-тельности человека. Возникновение понятия ***пространства*** связано с тем, что материальные объекты (МО) имеют форму, размеры, взаимное положение друг относительно друга. МО находятся близко, далеко, спереди, сзади, (в чем-то, где-то).

Как известно, по теории относительности свойства пространства (расстояния, размеры МО) зависят от движения объекта, на котором находится наблюдатель.

В курсе теоретической механики (ТМ) мы будем находиться в рамках классической механики.

Классическая механика основана на законах Галилея – Ньютона и предметом её изучения является движение любых материальных тел (кроме элементарных частиц) со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Движение тел со скоростями порядка скорости света рассматриваются в теории относительности А. Эйнштейна, а внутриатомные явления и движение элементарных частиц изучаются в квантовой механике.

Пространства, в которых справедливы законы Галилея – Ньютона, называют ***инерциальными.***

И. Ньютон [1] говорил: «***Абсолютное пространство*** по самой своей сущности, безотносительно к чему - либо внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным ».

Таким образом, он признавал независимость пространства от МО и их движения.

Свойства пространства в классической механике:

1.Трехмерность. 2.Однородность. 3.Изотропность.
4. Непрерывность. 5.Открытость. 6. Бесконечность.

Трехмерность пространства означает, что через одну точку пространства можно провести только 3 взаимно перпендикулярные прямые. Этот факт осознан в древности Аристотелем и всей практикой человека, он лежит в основе естествознания.

Так, показано, что в n-мерном пространстве гравитационные силы взаимного притяжения пропорциональны r^{1-n}, где r - расстояние между взаимодействующими частицами.

Поскольку в соответствии с законом всемирного тяготения силы притяжения обратно пропорциональны квадрату расстояния, $F \sim r^{1-3}$, этот факт еще раз подтверждает трехмерность нашего пространства.

Однородность пространства означает одинаковость геометрических свойств его и всех объектов в любом месте пространства.

Изотропность пространства говорит о независимости геометрических свойств его и объектов от направления (ориентации).

Непрерывность пространства означает полную его заполненность, открытость – отсутствие границ, ***бесконечность*** – существование сколь угодно удаленных точек.

Вопрос о конечности пространства до сих пор решается. Существуют модели как конечных, так и бесконечных пространств, например, модель расширяющейся вселенной, теория «большого взрыва».

1.3 Время

Время – также первичное понятие. Возникновение понятия ***времени*** связано с тем, что все наблюдаемые в ходе практической деятельности человека процессы имеют длительность, периодичность, повторяемость.

Таким образом, понятие времени можно применять только при наличии изменяющегося окружающего мира, а, следовательно, и при механическом движении МО.

В неподвижном, неизменном мире понятие о времени не возникнет.

Свойства времени в классической механике:

1.Одномерность. 2.Однородность.
3. Непрерывность.4. Бесконечность.

И. Ньютон в «Математических началах ...» писал: «***Абсолютное, истинное математическое время*** само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему - либо внешнему, протекает равномерно и называется длительностью. Относительное, кажущееся или обыденное время есть … мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного математического времени, как-то: час, день …».

И дальше: «Все движения могут ускоряться или замедляться, течение же абсолютного времени измениться не может».

Следовательно, время в ньютоновской механике – течет непрерывно, равномерно, одинаково в любой период от прошлого к будущему и не зависит от внешних факторов: свойств и движения МО.

Это понимание отличается от существующего в настоящее время представления о времени в специальной теории относительности А. Эйнштейна.

1.4 Модели материальных объектов в теоретической механике.

Для изучения и описания механического движения и взаимодействия реальных объектов в теоретической механике вводятся простейшие модели:

1. Материальная точка. 2. Абсолютно твёрдое тело.
3. Механическая система. 4. Сплошная изменяемая среда.

Материальная точка (М.Т) – геометрическая точка, наделённая конечной или бесконечно малой массой. Материальной точкой моделируются тела, размерами которых пренебрегают, считая их размеры малыми или не важными для решения поставленной задачи. Часто это возможно, если отсутствуют различия в движениях отдельных точек тела или в данной конкретной задаче этими различиями можно пренебречь.

В частности, при поступательном (без поворота) движении тела, его точки движутся с одинаковыми скоростями, их траектории конгруэнтны (одинаковы). Материальной точкой массы ***dm*** представляют также мысленно выделенную сколь угодно малую материальную частицу тела.

Абсолютно твёрдое тело (АТТ) – тело, взаимное положение частиц которого остаётся неизменным. Модель АТТ применима, когда можно пренебречь деформацией тела. Иногда АТТ называют твёрдым телом (ТТ) или просто телом. Следовательно, система двух или нескольких точек, если расстояния между точками не меняется, может быть названа АТТ.

Механическая система (МС) – выбранное по какому либо признаку множество материальных точек и твёрдых тел, взаимодействующих между собой.

По какому признаку материальные объекты можно вводить в состав одной МС? Это могут быть разные части одной машины, механизма, одного объекта. Например, для автомобиля – отдельные подшипники, колеса, кузов, ходовая часть и другие его части. Автомобиль в целом, конечно, также можно считать МС. Для солнечной системы – отдельная планета, несколько планет, отдельная комета, метеоритный дождь и т. д.

Важнейшим свойством объектов в составе МС является их механическое взаимодействие. Все объекты в МС должны взаимодействовать друг с другом. Введение в состав МС отдельных объектов, не взаимодействующих с остальными в этой системе, приведет к невозможности адекватного математического описания их поведения.

Иногда твёрдое тело представляют как геометрически неизменяемую механическую систему материальных точек. Поэтому о любой механической системе можно говорить как о ***механической системе материальных точек*** (МСМТ).

Вопрос о возможности представления тела или МС в виде МТ решается в теоретической механике теоремой о движении центра масс. Доказывается, что когда мы представляем движение тела или системы движением МТ с массой тела или системы, мы следим за движением только одной геометрической точки этих объектов – центра масс.

Сплошная изменяемая среда (СС) – модель изменяемой среды (деформируемое твёрдое тело, жидкость, газ), когда при изучении её движения можно пренебречь молекулярной структурой вещества.

Для такой модели наиболее часто прибегают к таким моделям реальной сплошной среды: идеально упругое тело, пластическое тело, идеальная жидкость, вязкая жидкость, идеальный газ и др.

В соответствии с моделями реальных тел механику разделяют на: механику материальной точки, механику твёрдого тела, механику системы материальных точек и механику сплошной среды. Последнее в свою очередь подразделяется на теорию упругости, теорию пластичности, гидродинамику, аэродинамику, газовую динамику и др. Эти предметы многие из Вас будут изучать в будущем.

В зависимости от условий задачи одно и то же реальное физическое тело может быть представлено различными абстрактными моделями. Так при изучении движения самолёта с чисто геометрической точки зрения (траектория движения, скорость и время полёта из пункта А в пункт В) его можно рассматривать как материальную точку. В большинстве астрономических задач тела, звезды, планеты, кометы и т. д., представляют в виде МТ.

При определении сил, действующих на фюзеляж и оперение самолёта со стороны набегающего воздушного потока в режиме стационарного полёта (подъёмные силы, силы сопротивления воздуха) можно пренебречь сравнительно небольшими деформациями обшивки и считать самолёт твёрдым телом, имеющим определённую форму и размеры.

При определении сил, действующих на элементы самолёта со стороны воздушной среды в режиме маневрирования, когда изменяется взаимное положение отдельных частей (фюзеляж, крылья и изменяющие по отношению к ним своё положение элероны, закрылки, рули высоты и др.) самолёт представляют как механическую систему взаимодействующих тел.

Деформации частей самолёта, мало влияющие на величину сил, могут оказаться определяющими для прочности конструкции. Для расчёта конструкции на прочность и работоспособность, необходимо определять внутренние силы в материале и деформации. Для решения этой задачи следует использовать модель сплошной среды, например модель упругопластического тела.

1.5 Математическое описание положения МО. Координаты, обобщенные координаты. Число степеней свободы. Парциальные движения.

Координаты.

Для аналитического описания положения материальных объектов необходимо ввести систему координат.

Координаты – переменные величины, однозначно определяющие произвольное положение данного объекта и всех его точек.

Выбор системы координат связан с удобством математического описания положения и движения МО. Так, для одной точки хорошо известна простота описания ее положения в пространстве с помощью радиус-вектора $\vec{r}$ относительно начала системы координат или 3-х декартовых координат x, y, z декартовой системы координат (Рис. 1.1).

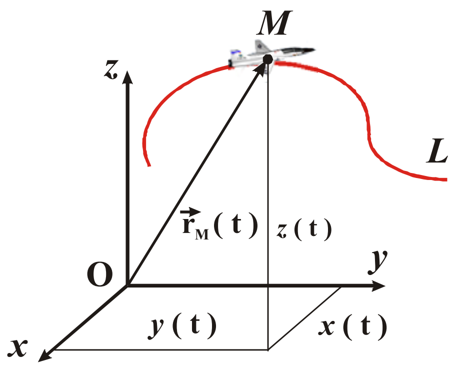


Рис. 1.1

Но если известна траектория точки, удобно описывать положение этой точки на траектории с помощью длины дуги, отсчитываемой от некоторой начальной точки O (Рис. 1.2).

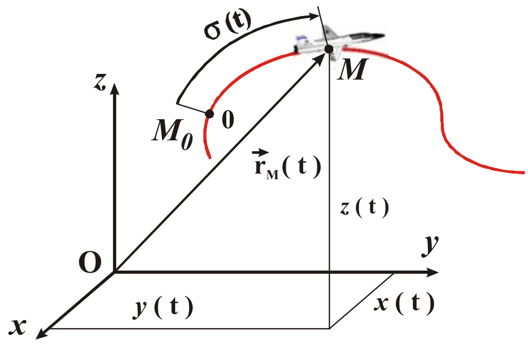


Рис. 1.2

«Правильный, хороший» выбор системы координат быстрее и проще приведет к решению задачи о движении МО.

Выбор координат – неоднозначная задача. Для одного и того же объекта часто известны разные ***системы координат***, введенные разными авторами.

Так для точки широко известны еще и полярные, цилиндрические, сферические, криволинейные координаты.

Обобщенные координаты.

Но ***всегда*** существует один единственный ответ на вопрос о ***минимальном числе координат***, однозначно описывающих положение МО.

Такие координаты называют ***обобщенными координатами***. Число обобщенных координат называют ***числом степеней свободы МО***.

Для примера, рассмотрим произвольное положение свободного АТТ (Рис. 1.3).

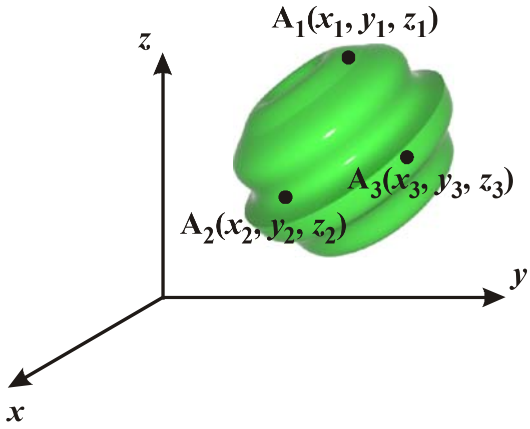


Рис. 1.3

Если ввести 9 декартовых координат трех точек тела A_1, A_2, A_3, не лежащих на одной прямой, эти 9 координат однозначно определят положение АТТ.

Однако на взаимное положение точек наложена связь – расстояние между точками неизменно.

Это может быть отражено тремя уравнениями связей

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = (A_i A_k)^2$$
$$i \neq k, \quad i,k = 1,2,3.$$

Выражая из этих уравнений связи 3 координаты через остальные, получим набор из 6 координат, которые определят положение тела и будут независимы между собой.

Обобщенными координатами МО называются независимые между собой переменные величины $(q_1, q_2, .., q_s)$***, однозначно определяющие его положение в пространстве в любой момент времени.***

Такой набор координат обязательно минимален.

Число обобщенных координат называют числом степеней свободы МО.

Уравнения движения материального объекта.

Движение МО в пространстве считается заданным, если известны зависимости его координат (***обобщенных координат)*** от времени.

$$\sigma_i = \sigma_i(t), i = 1,2,..,n \quad (q_j = q_j(t), j = 1,2,..,S).$$

Зависимости обобщенных координат МО от времени называют уравнениями движения МО (уравнениями движения в обобщенных координатах).

Парциальные движения МО.

Движение МО, при котором изменяется только одна из его обобщенных координат, а остальные неизменны, называется ***парциальным***.

По наличию или отсутствию ***парциальных движений*** проверяется независимость величин, которые предполагается принять за обобщенные координаты. Количеством парциальных движений определяется ***число степеней свободы МО***, равное числу его обобщенных координат.

Знание числа независимых координат, числа степеней свободы, совершенно необходимо для описания движения или покоя объекта. Ведь число независимых координат, уравнений движения или уравнений равновесия МО совпадает с его числом степеней свободы.

1.6 Относительность механического движения. Системы отсчета.

О движении любого объекта можно говорить только тогда, когда определено относительно чего фиксируется это движение.

Например, колесо автомобиля, если автомобиль движется «по прямой», относительно Земли катится параллельно вертикальной плоскости. Это движение в ТМ называют плоскопараллельным.

Рис. 1. 4

Траектории точек на ободе, внутри и вне такого колеса при качении без проскальзывания показаны на рис. 1.5.

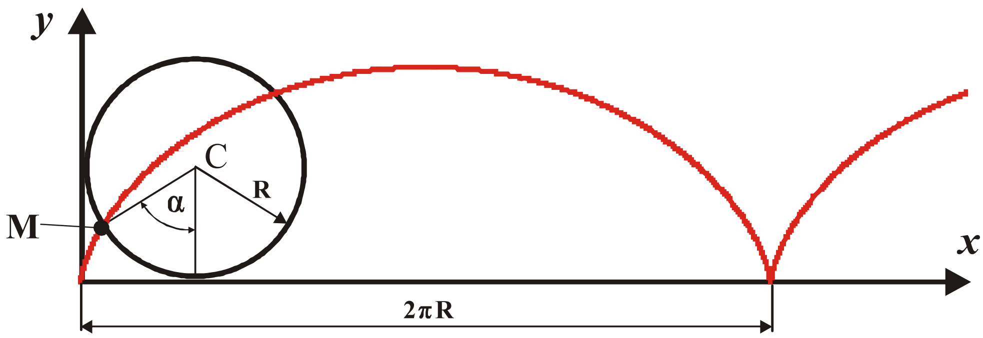


Рис. 1.5а

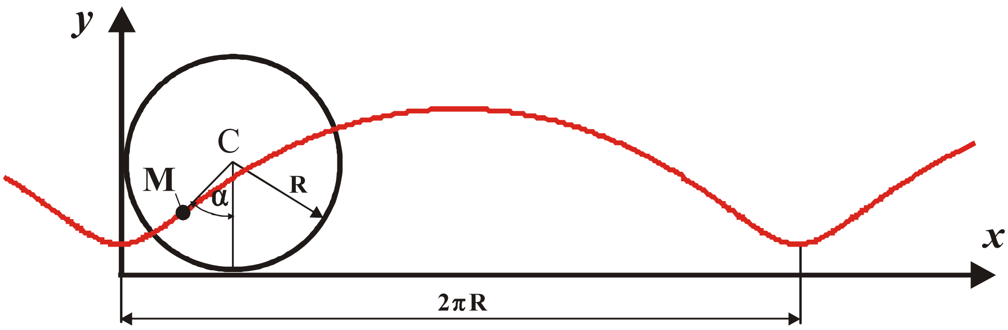


Рис. 1.5б

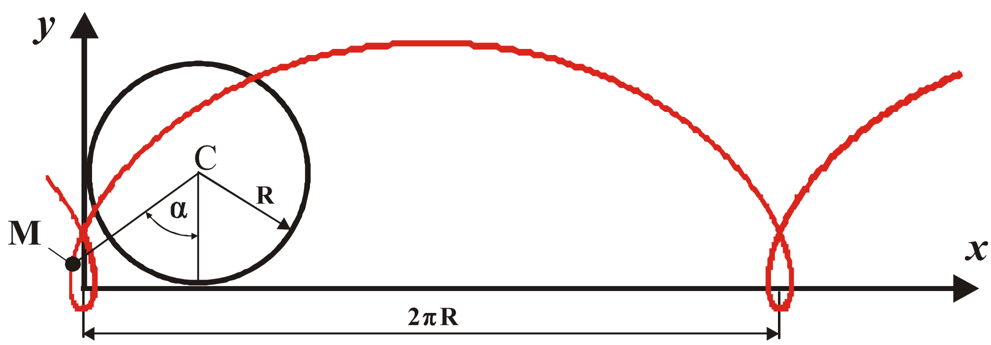


Рис. 1.5в

Центр колеса С движется по прямой, а точки М на колесе – по разным кривым.

Эти кривые называются циклоидами:

обыкновенной циклоидой, если $MC = R$ (Рис. 1.5а);

укороченной циклоидой, если $MC < R$ (Рис. 1.5б);

удлиненной циклоидой, если $MC > R$ (Рис. 1.5в).

В истории механики, а значит и всего естествознания изучение свойств обыкновенной циклоиды сыграло значительную роль.

Так было показано, что если по перевернутой ветви циклоиды движется точка в поле сил тяжести, то период ее колебаний не зависит от амплитуды (отклонения от нижней точки циклоиды).

Рис. 1.6

Период таких колебаний всегда определяется равенством:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

здесь g – ускорение свободного падения, R – радиус производящей циклоиду окружности.

На основании этого свойства в XVIII веке были созданы часы с постоянным периодом колебаний. Что, например, было важно для мореплавателей при определении долготы их местоположения.

Важнейшим свойством циклоиды является также то, что при движении по такой кривой, точка перемещается из одного положения в другое за *кратчайшее время*. Поэтому циклоиду назвали брахистохроной.

Брахистохрона (от греч. βράχιστος — кратчайший и χρόνος — время) — кривая скорейшего спуска.

Среди плоских кривых, соединяющих две данные точки А и В, лежащих в одной вертикальной плоскости (В ниже А), двигаясь по циклоиде под действием только силы тяжести материальная точка достигнет В из А за кратчайшее время.

Этот вывод привел к возникновению такого раздела математики, как вариационное исчисление.

Рассмотрим движение колеса автомобиля в другом пространстве.

Относительно кузова автомобиля ось вращения колеса неподвижна. Поэтому говорят, что относительно кузова колесо совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси.

В этом движении траектории точек – окружности с радиусом, равным расстоянию от точки колеса до оси вращения. Плоскости этих окружностей перпендикулярны оси вращения, центры окружностей находятся на оси.

Такое же движение совершают и стрелка часов относительно своего корпуса и винт вертолета относительно фюзеляжа, Рис. 1.7.

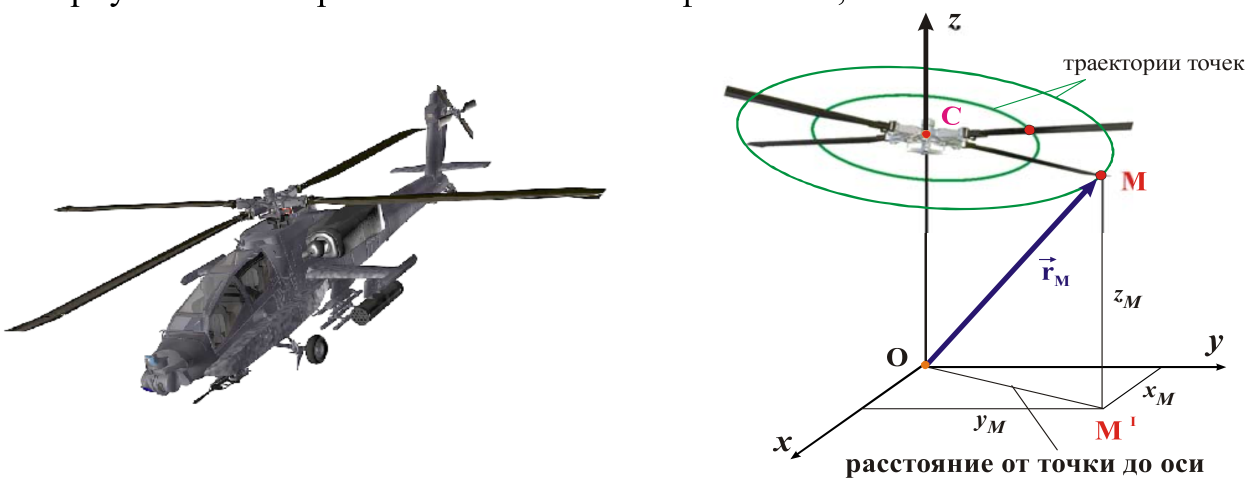


Рис. 1.7

Поставим такой вопрос: « Относительно каких объектов можно определить положение МО и описать их механическое движение, а относительно каких МО этого сделать нельзя?»

Для описания положения точек любого МО необходимо задать положение системы координат.

С одной точкой связать положение трех осей, например, декартовой системы координат невозможно, поэтому систему координат связывают ***только с телом***, которое называют телом отсчета.

Совокупность тела отсчета, системы координат и часов называют системой отсчета.

Принимая за тело отсчета другие тела, можно ввести множество систем отсчета, однако, различными из них будут те, взаимное положение ***тел отсчета*** которых ***по разному*** изменяется с течением времени.

Таким образом, говорить: «Рассмотрим движение точки А относительно точки В» – значит неточно определить систему отсчета, неоднозначно задать систему координат.

Основной признак системы отсчета – тело, с которым жестко связывают систему координат.

Разные системы отсчета отличаются неодинаково двигающимися разными телами отсчета.

Систему отсчета принято называть теми же буквами, которыми обозначены координатные оси, связанные с телом отсчета.

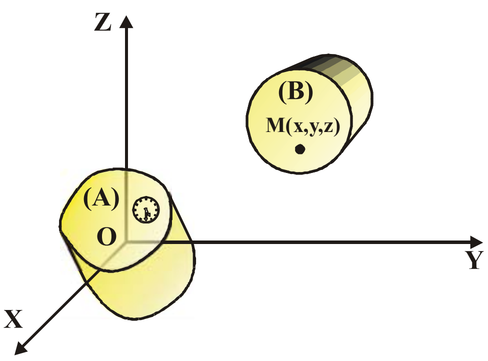


Рис. 1.8

Когда положение МО определяют в системе координат $Oxyz$, связанной с телом А (рис. 1.8), то говорят, что он находится ***в пространстве*** $Oxyz$***,*** связанном с телом А, или, короче – ***в пространстве*** $Oxyz$ ***тела А***.

Следовательно, каждое тело как бы несет с собой бесконечное пространство, относительно которого можно отсчитывать положение любых материальных объектов – МТ, АТТ, МС.

В отличие от ***абсолютного пространства***, о котором выше сказано, эти пространства можно назвать относительными. Такая точка зрения, в какой – то мере близка к специальной и общей теории относительности А. Эйнштейна.

Но в теоретической механике, в отличие от теории относительности

геометрические свойства всех этих пространств, определяющие расстояния между точками, размеры, площади и объемы объектов, одинаковы.

Так, например, длина вектора, проекции вектора на параллельные оси в разных пространствах одинаковы.

Так как у различных пространств разные тела отсчета, они могут отличаться другими (не геометрическими) свойствами объектов, движение которых относительно этих пространств описывается.

К таким свойствам объектов относятся их кинематические и динамические свойства.

Относительные пространства всех тел являются в той или иной степени ***неинерциальными***, это подробно объясняется в курсе ТМ. В то же время существуют относительные пространства, достаточно близкие к инерциальным пространствам по своим свойствам.

Отсутствие таких пространств могло бы привести к невозможности применения теории Галилея – Ньютона. То есть, к тому, что в течение многих лет в курсе физики Вам преподавали ошибочную теорию механики.

Исторически и в инженерной практике важно, что одним из «хороших» пространств (близких к инерциальным) является пространство Земли. Его называют ***геоцентрическим***. В большинстве задач механики анализируется механическое состояние МО (движение, равновесие, покой) в пространстве Земли.

Очень часто пространство, относительно которого проводится анализ, не называется. В этом случае исследуется состояние объекта относительно наблюдателя. Поскольку чаще всего наблюдатель находится на Земле, то система отсчета и пространство отсчета здесь также будут геоцентрическими. В курсе ТМ это пространство мы будем называть пространством основания.

В то же время, в ряде задач механики пространство Земли нельзя считать инерциальным. К таким задачам относятся, например, задача о колебаниях подвешенного на длинной нити тела (маятник Фуко), рис. 1.9, о точности стрельбы из орудия на достаточно большие расстояния (> 1000 км) и много других. Теория движения точки и других МО в неинерциальных пространствах в ТМ является одним из обязательных разделов.

Интересно, что демонстрация поворота плоскости качания маятника Фуко явилась одним из первых доказательств вращения Земли вокруг собственной оси. Объяснение факта вращения плоскости качания возможно с помощью теории движения точки в неинерциальном пространстве.

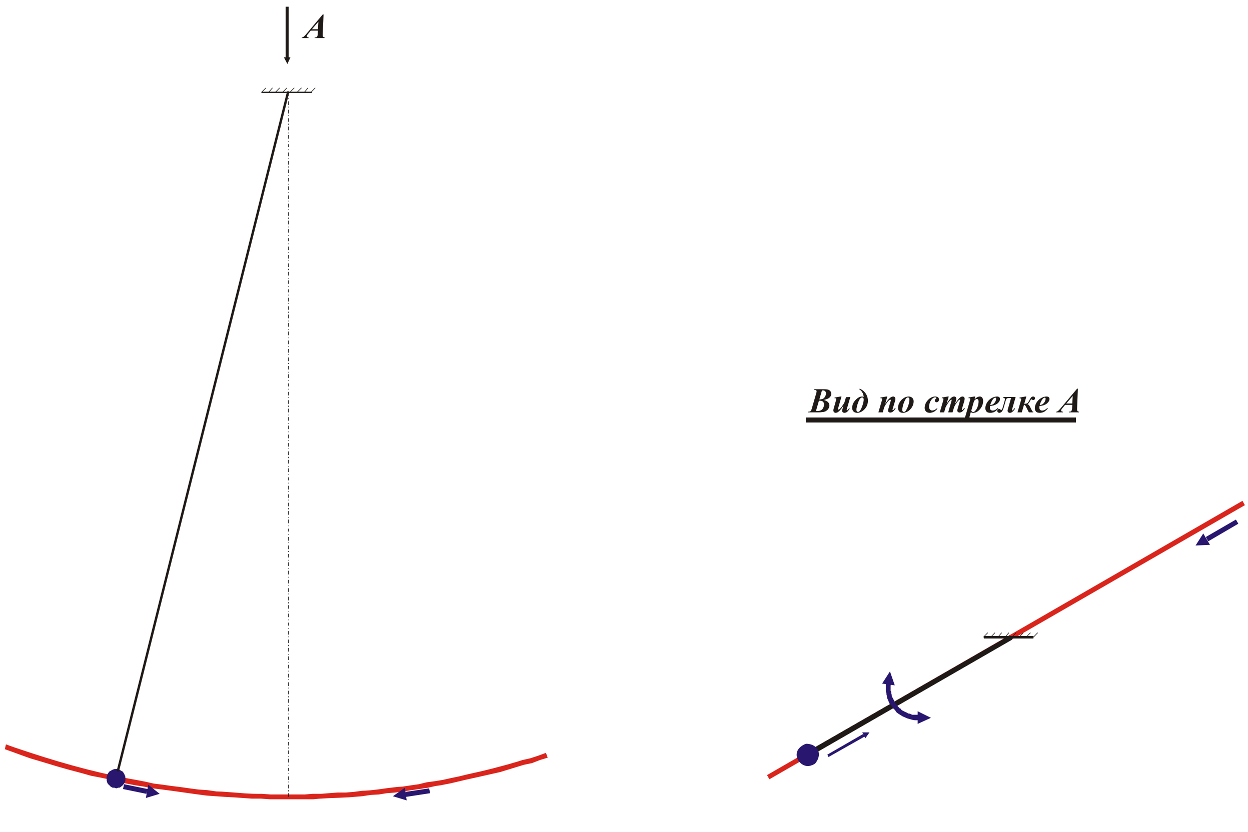


Рис. 1.9

Еще ближе к инерциальному пространству является пространство Солнца (гелиоцентрическое), в котором оси системы координат направлены на почти неподвижные звезды.

Следует, однако, иметь в виду, что гелиоцентрическая система отсчета может считаться инерциальной только для движения внутри Солнечной системы, так как центр масс Солнечной системы движется по криволинейной траектории относительно центра Галактики со скоростью, примерно равной $3{\cdot}10^5$ м$\cdot$с$^{-1}$ и ускорением $3{\cdot}10^{-13}$ м$\cdot$с$^{-2}$.

Вопрос о существовании пространств, в которых справедливы законы Галилея – Ньютона (инерциальных пространств) в ТМ решается положительно. Но при этом ***абсолютное пространство считается априори существующим.***

Исторически, курс теоретической механики для инженеров делится на три раздела:

1. Статика. 2. Кинематика. 3. Динамика.

2 Статика.

Статика изучает законы равновесия МО под действием приложенных к ним сил и способы замены различных систем сил более простыми эквивалентными системами.

Под равновесным состоянием в статике мы всегда будем понимать их покой.

Статику обычно делят на геометрическую и аналитическую статику.

В ***геометрической статике*** решаются две задачи:

1) определение условий равновесия свободного АТТ под действием приложенных к нему сил;
2) замена системы сил, приложенных к АТТ, наиболее простой, эквивалентной исходной системе.

В ***аналитической статике*** изучаются аналитические формы наиболее общих законов равновесия МС широкого класса.

Более подробно вопросы аналитической статики рассматриваются в разделе “***Динамика***”.

К основным понятиям геометрической статики, как видно, можно отнести понятия ***свободного АТТ*** и понятия ***сил и системы сил***.

2.1 Основные понятия геометрической статики: свободное АТТ, связи, реакции связей.

К основным понятиям геометрической статики, как видно, можно отнести понятия ***свободного АТТ*** и понятия ***силы*** и ***системы сил***.

Свободным АТТ будем называть такое тело, которое можно поместить в любое соседнее положение. Следовательно, тело, висящее на пружине, свободно. Тело, висящее на нерастяжимой нити, несвободно, т. к. его нельзя поместить в те положения, где расстояния меду точками крепления нити больше ее длины.

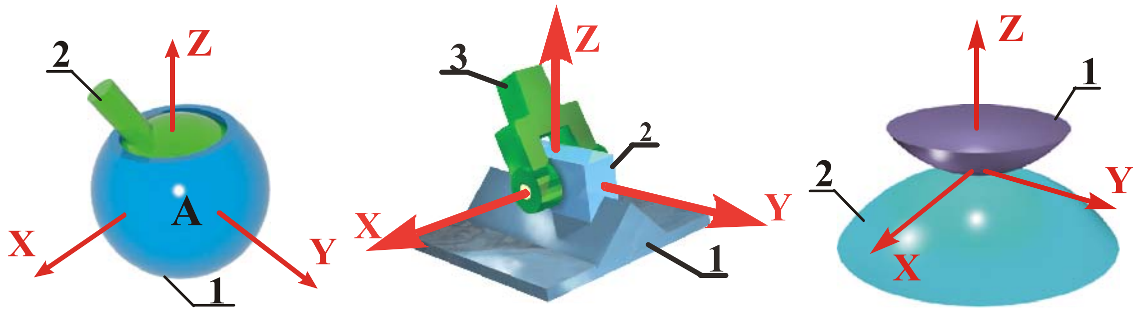
Выше было показано, что ***свободное АТТ*** имеет 6 степеней свободы. Поэтому, если тело имеет 5, 4, 3, 2, 1, 0 степеней свободы – оно несвободно. Так, можно показать, что любое вращающееся вокруг неподвижной оси тело (стрелка часов) имеет 1 степень свободы.

Если у АТТ меньше 6 степеней свободы, говорят, что на него наложены ***связи***. Число связей равно разности между числом степеней свободы свободного тела (6) и числом степеней свободы, имеющихся у данного тела. Так, если тело имеет 4 степени свободы, на него наложено 2 связи ($6-4=2$).

Связями называют ограничения, наложенные на координаты или скорости точек МО, записанные в аналитической форме.

Ограничения на положение и движение АТТ и МТ реализуются телами или конструкциями, непосредственно касающихся АТТ или МТ.

В геометрической статике связями мы будем называть тела, запрещающие то или иное положение или движение, рассматриваемого тела.



а) б) в)

Рис. 1.10

На рис. 1.10 для тела 2 связью является касающееся его тело 1, а для тела 1 связью является тело 2.

Свойства связей по ограничению положения и движения рассматриваемого тела различны. Но во всех случаях связи делают свободное тело несвободным, уменьшают число его степеней свободы.

В кинематике показывается, что степени свободы АТТ связаны с возможностью совершать поступательные движения в 3-х взаимно перпендикулярных направлениях 3-х вращательных движений вокруг 3-х осей.

Как видно, например, из рис 1.10а, тело 2 при таком соединении не может совершать ни одного поступательного движения относительно тела 1. Следовательно, тело 1 отнимает у тела 2 три степени свободы, связанные с поступательными движениями в 3-х направлениях.

На рис. 1.10б тело 3 может совершать относительно тела 1 одно вращательное движение вокруг оси X и одно поступательное движение вдоль оси Y – у него отнято 4 степени свободы. На рис.1.10в тело 2 относительно тела 1 не может совершать только одно поступательное движение вдоль оси Z – у него отнята 1 степень свободы.

Воздействие связи на рассматриваемое тело называют реакцией. Действие рассматриваемого тела на связь называют давлением тела на связь.

2.2 *Основные понятия геометрической статики: сила, система сил.*

Определение условий равновесия тела невозможно без правиль-ной оценки всех воздействий на него. Из курса физики Вы уже знаете, что для оценки механического действия одного тела на другое введено понятие силы.

Понятие силы возникло задолго до построения основ классической механики Галилея-Ньютона. 2000 лет до И. Ньютона существовало, например, мнение, введенное Аристотелем, что если есть движение, есть и сила, двигающая тело.

Сила – мера механического взаимодействия тел.

Таким образом, сила введена как ***математическая мера механического воздействия*** одного тела на другое.

В теоретической механике не рассматривается физическая сторона взаимодействия, ее интересует, где приложено действие, как направлено и какова его интенсивность. Поэтому силу, как модель точечного взаимодействия, изображают вектором (рис. 1.11а).

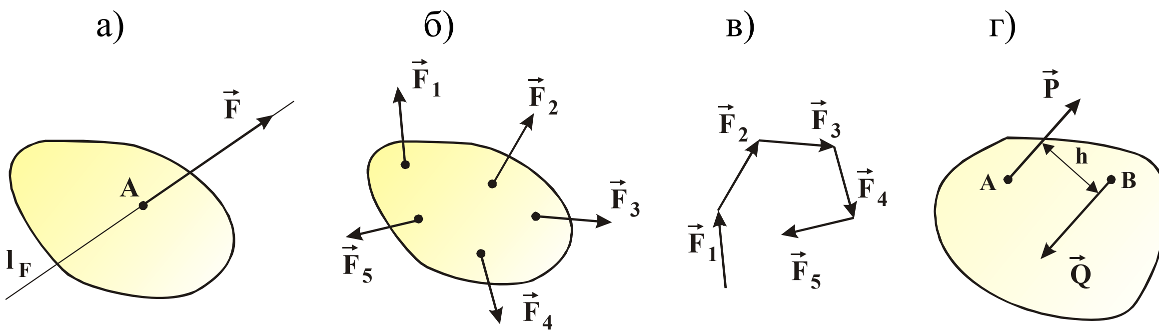


Рис. 1.11

Начало вектора силы находится в точке ее приложения А. Прямая, вдоль которой направлена сила (ℓ_F), называется ***линией действия силы.***

Силу обозначают заглавными буквами латинского алфавита — $\overline{F}, \overline{Q}, \overline{P}$ и т.п. Этими же буквами, но без черточек, обозначают модули этих сил — F, Q, P ….

Размерность силы в системе СИ — Ньютон (Н), в технической системе единиц—в килограмм силы (кгс), причем 1кгс=9,81Н.

Системой сил $\{\overline{F}_k\}_n$ называют совокупность сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$, действующих на рассматриваемое тело (рис. 1.11б) или в общем случае — на точки МС.

Ломаная линия, звеньями которой являются векторы сил системы, называется ***силовым многоугольником*** (рис. 1.11в).

Для понимания того, что определяет ***понятие силы***, как ***сила*** может адекватно описать воздействие одного тела на другое, проанализируем два примера: действие Земли на самолет и действие поверхности Земли на катящееся колесо. В первом случае нет непосредственного соприкосновения Земли и самолета, во втором случае колесо находится в контакте с поверхностью Земли. Воздействие Земли на самолет называют полевым или дальнодействием, (Земля создает гравитационное поле), во втором случае силы взаимодействия возникают при непосредственном контакте тел (силы близкодействия). Надо понимать, что и в первом и во втором случаях не существует такой точки самолета или колеса, к которой приложена действующая сила. В первом случае силы притяжения Земли действуют на каждую частицу самолета, во втором — действие Земли на колесо приложено к каждой точке контактной поверхности колеса.

Контакт двух тел за счет деформации всегда происходит по некоторой поверхности, как например, на рис. 1.12.

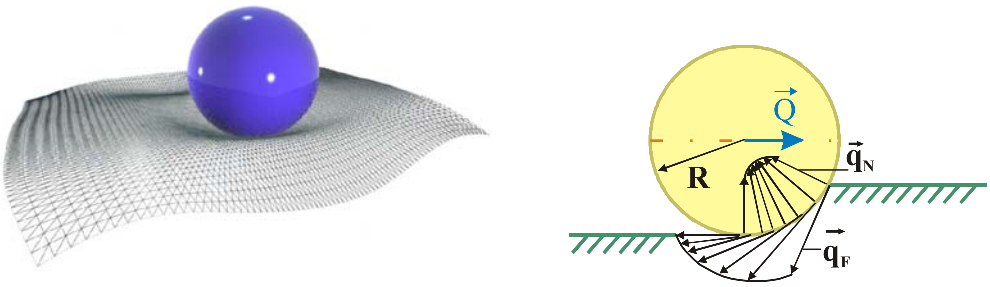


Рис. 1.12

Во всех таких случаях чаще всего действие одного тела на другое, распределенное по объему или поверхности, представляют в виде простейшей системы сил. Задача эквивалентной замены множества или конечного набора сил малым их числом наряду с задачей определения условий равновесия МО решается в статике.

Так, доказывается, что не любая система сил может быть заменена одной (***равнодействующей***) силой. Простейшая система сил, которая не может быть заменена одной силой — пара сил (рис. 1.11г).

Две равные по модулю анти параллельные силы, приложенные к АТТ и не лежащие на одной прямой, называют ***парой сил*** и обозначают $(\overline{P}, \overline{Q})$. Силы, составляющие пару сил, связаны равенством $\overline{P} = -\overline{Q}$. Расстояние h между линиями действия сил пары называется ***плечом пары сил***.

В общем случае доказано, что

произвольная неуравновешенная система сил может быть заменена одной силой и одной парой сил.

Это утверждение в статике называют теоремой Пуансо.

Например, реакция поверхности на каток, распределенная по поверхности, заменяется силой $\overline{R}$, которую можно разложить на две силы $(\overline{N}, \overline{F})$ и парой сил $(\tilde{M}_к)$ (рис 1.13).

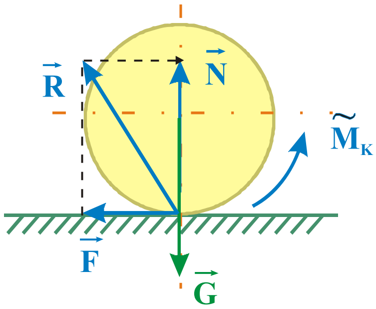


Рис. 1.13

3 Кинематика.

Кинематика изучает движение МО в пространстве тела отсчета без рассмотрения причин, приводящих к возникновению или изменению этого движения.

То есть в кинематике анализируется движение МО с геометрических позиций.

В этом разделе ТМ решаются две задачи.

Первая задача — установление соответствия между положением МО в пространстве тела отсчета и временем. Ее решают заданием уравнений движения МО.

Чтобы ***задать движение*** МО, необходимо:
назначить его обобщенные координаты $\{q_j\}_S$; найти зависимость обобщенных координат от времени $q_j = q_j(t)$.

Вторая задача — нахождение ***кинематических характеристик*** МО, т.е. кинематических величин, позволяющих определить скорости и ускорения всех точек МО.

3.1 Основные понятия кинематики: скорость, ускорение.

Как уже говорилось – *механическое движение* – изменение положения МО в пространстве с течением времени.

Поскольку положение точек и тел можно определить с помощью расстояний и углов, то в ТМ для исследования положения МО, быстроты и направления его изменения используются величины, имеющие размерность $м,\ м/сек,\ м/сек^2,\ \ рад,\ рад/сек,\ \ рад/сек^2$.

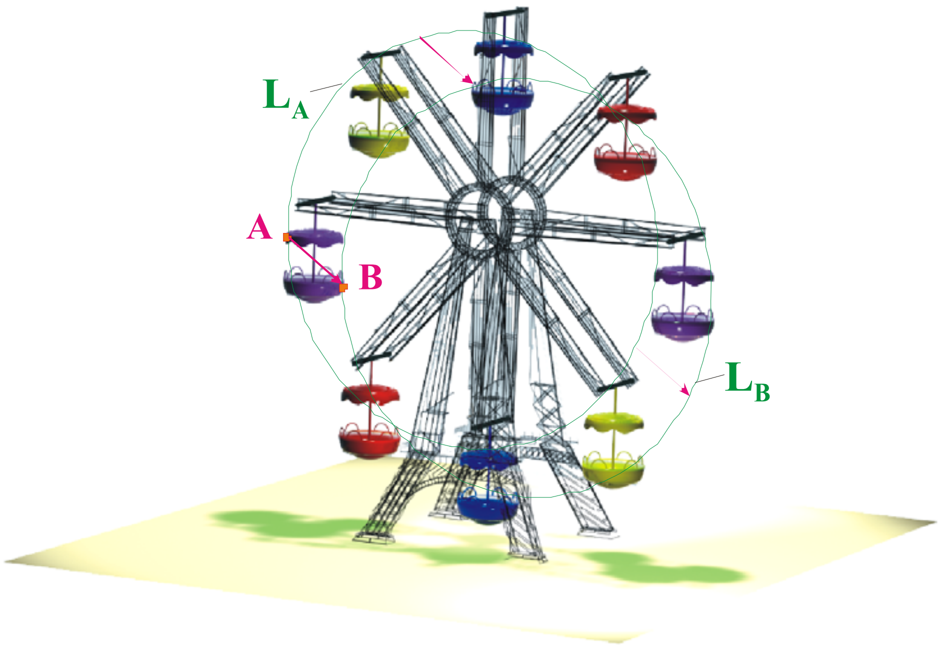
Все эти характеристики называют кинематическими характеристиками точек и тел.

Скорость – скорость определяет быстроту изменения функции во времени. Скорость всегда определяется первой производной функции по времени.

В ТМ говорится о скорости движения (изменения положения) МО. Таким образом, скоростные характеристики МО в ТМ измеряются $м/сек$ или $рад/сек$.

Говорить о скорости тела, измеряемой в $м/сек$ (линейной скорости), можно только тогда, когда все точки тела перемещаются по одним и тем же траекториям, с одними и теми же скоростями. Это возможно только при поступательном движении тела (движении без поворота).

Примером поступательного движения тела является движение корзины колеса обозрения (человек в корзине не вращается).



L_A, L_B - эквидистантные кривые

Рис. 1.14

Во всех остальных случаях траектории, скорости, ускорения точек тела разные.

Например, при качении колеса по прямолинейной поверхности, центр колеса С движется по прямой, а точки М на колесе – по разным циклоидам (Рис. 1.5).

То есть у разных точек такого колеса разные не только траектории, но и скорости и ускорения.

Таким образом, определяя линейную скорость, ***всегда необходимо указать ту точку тела***, ***о скорости которой говорится в данный момент***.

Скорость точки – определяет быстроту и направление движения точки.

Скорость точки – вектор, имеющий 2 характеристики – длину (модуль) и направление. Скорость точек А, В, обозначают $\vec{V}_A, \vec{V}_B$, модули скоростей обозначают V_A, V_B.

Иное справедливо для скорости, измеряемой в $рад/сек$ (*угловая скорость тела*).

Угловая скорость определяет быстроту и направление вращения тела вокруг оси, перпендикулярной плоскости, в которой измеряется угол поворота тела.

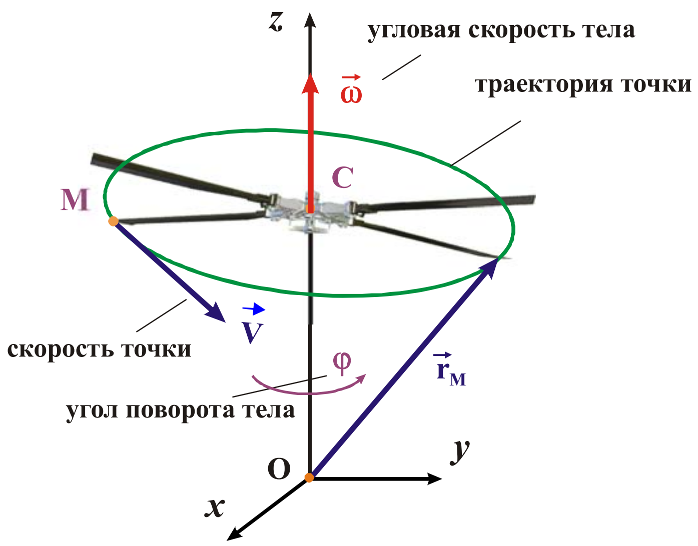


Рис. 1.15

Поскольку угол поворота всех прямых в теле, лежащих в параллельных плоскостях, один и тот же, то к телу можно применять понятие ***угловой скорости*** независимо от того, вокруг какой оси вращается данное тело.

Об угловой скорости точки говорить, нельзя, даже если точка движется по окружности.

Угловая скорость тела – вектор, направленный по оси вращения в ту сторону, откуда это вращение видно против хода часовой стрелки. Угловую скорость тела обозначают $\vec{\omega}$ (омега), модуль угловой скорости обозначают ω.

Аналогично скорости введено понятие ускорения.

Ускорение – это производная скорости по времени. Линейное ускорение точки измеряется в $м/сек^2$, угловая скорость тела – в $рад/сек^2$

Ускорение точки – определяет быстроту и направление изменения скорости (вектора) точки.

Ускорение точки – вектор. Ускорение точек A, B, обозначают $\vec{a}_A, \vec{a}_B$, модули ускорений обозначают a_A, a_B.

Во всех типах движения тела, кроме поступательного, ускорения точек разные. Поэтому, определяя линейное ускорение,

всегда необходимо указать ту точку тела, ***об ускорении которой говорится.***

Если скорость точки направлена по касательной к траектории в сторону ее движения, то ускорение точки направлено вовнутрь траектории. Ускорение точки составляет со скоростью угол от 0 до 180^0.

Важно помнить, что при движении точки по криволинейной траектории всегда существует составляющая ускорения, направленная перпендикулярно скорости внутрь траектории. Это ***ускорение*** называют ***нормальным***, если же точка двигается по окружности, это ускорение называют и центростремительным $\vec{a}_n$. Вторая составляющая ускорения, направленная по касательной к траектории, либо в сторону скорости, либо против нее, называется ***касательным (тангенциальным) ускорением*** $\vec{a}_\tau$.

Наличие ***нормального ускорения*** говорит об изменении направления скорости (о криволинейности траектории). ***Касательное ускорение*** говорит о том, что изменяется модуль скорости точки.

При прямолинейном движении точки отсутствует нормальное ускорение. При движении точки с постоянной по величине скоростью отсутствует касательное ускорение.

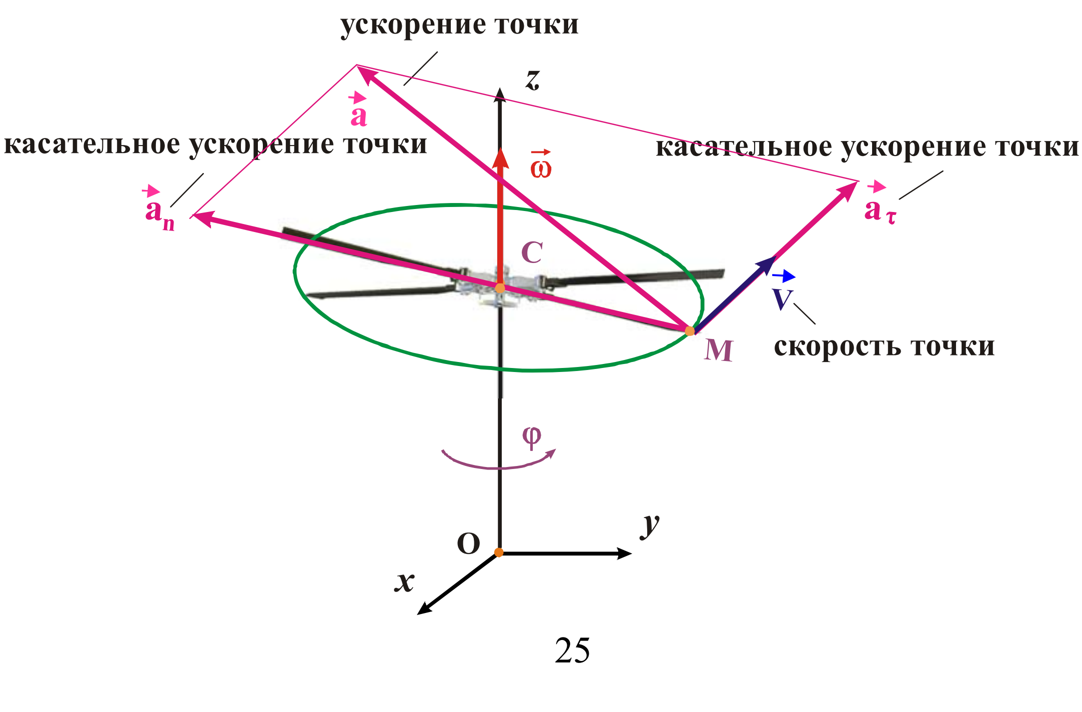


Рис. 1.16

Угловое ускорение тела – определяет быстроту и направление изменения вектора угловой скорости тела.

Обозначать угловое ускорение будем $\vec{\varepsilon}$ (ипсилон), модуль углового ускорения обозначают ε.

4 Динамика.

Динамика изучает закономерности движения МО в пространстве тела отсчета с учетом сил, действующих на МО.

Так как покой – частный случай механического движения, ясно, что задачи динамики ***чаще всего*** стоят перед исследователем.

В зависимости от используемых моделей МО различают:

— динамику материальной точки (МТ);
— динамику абсолютно твердого тела (АТТ);
— динамику механической системы (МС).

При всем разнообразии динамических задач в теоретической механике выделяют две задачи ***(прямую и обратную)***.

К ***прямой*** относятся задачи, в которых движение МО является заданным и требуется найти силы, под действием которых это движение происходит. В ***обратной*** задаче силы, действующие на МО, считаются известными, а движение МО находится.

Решение этих задач достигается применением разнообразных математических моделей движения, основанных на законах классической механики

Как уже говорилось, теоретическая механика основана на аксиомах и понятиях, введенных Галилеем и Ньютоном.

Для уточнения основ механики Галилея – Ньютона приведем основные определения и законы, введенные И. Ньютоном в труде «Математические начала натуральной философии», опубликованных впервые в 1687 г на латинском языке, переведенных на русский язык академиком А.Н. Крыловым в 1916 г., [1].

Определение 1.

Количество материи есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему её.

Определение 2.

Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе.

Определение 3.

Врождённая сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Определение 4.

Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

4 закона динамики И. Ньютона:

I закон:

Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.

II закон:

Изменение количества движения пропорционально приложенной силе и происходит по той прямой, по которой эта сила действует.

III закон:

Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны.

Закон тяготения, IV закон Ньютона:

Любые две частицы Вселенной притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Первый закон в физике известен как закон инерции, II и III законы так и называются: второй и третий закон Ньютона. IV закон – закон всемирного тяготения.

Надо помнить, что во всех этих законах говорится не о теле, а о материальной точке. Кроме этого всегда говорится о свободной МТ, на которую не наложены никакие связи.

В современной трактовке первые три закона формулируют так:

Закон 1 (закон инерции).

Изолированная МТ движется равномерно и прямолинейно, либо покоится.

Изолированной называется МТ, взаимодействием которой с окружающими МО пренебрегают. Из закона следует, что если отсутствуют силы, действующие на МТ, ее скорость постоянна:

$$\overline{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = const. \qquad (4.1)$$

Движение, совершаемое МТ при отсутствии сил, называется ***движением по инерции***.

Закон 2.

Производная количества движения точки по времени равна вектору силы, действующей на нее.

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}. \qquad (4.2)$$

Если массу точки считать постоянной, второй закон динамики формулируется так, как Вам хорошо известно из курса физики.

Ускорение, приобретенное МТ под действием силы, пропорционально этой силе и направлено по силе.

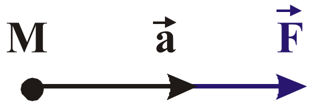


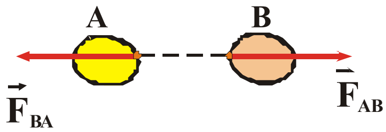
Рис. 1.17

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{F}{m} \\ \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{F} \end{array}\right\} \Rightarrow m\overline{a} = \overline{F}. \qquad (4.3)$$

Уравнение (4.3) называется ***основным уравнением динамики свободной МТ***.

Закон 3 (закон равенства действия и противодействия).

Две МТ действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположно направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки.



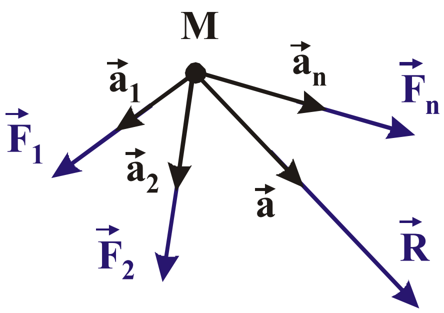
$$\overline{F}_{BA} = -\overline{F}_{AB}$$

Рис. 1.18

Поскольку на тело или точку могут воздействовать несколько объектов, а значит и несколько сил, в динамике введена ***4 аксиома Ньютона:***

Закон 4 (закон независимости действия сил)

. Ускорение $\overline{a}$ ***, приобретенное МТ под действием на нее нескольких сил*** $\left\{\overline{F}_k\right\}_n$ ***, равно сумме ускорений*** $\left\{\overline{a}_k\right\}_n$***, которые получила бы эта МТ под действием каждой из данных сил в отдельности***



$$\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k,$$

$$\overline{a}_k = \frac{\overline{F}_k}{m} \qquad \left(k = \overline{1, n}\right)$$

Рис. 1.19

Согласно этому закону **основное уравнение динамики МТ под действием системы сил** запишется

$$m\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k. \qquad\qquad m\overline{a} = \overline{R}.$$

Таким образом, движение МТ под действием системы сил $\left\{\overline{F}_k\right\}_n$ будет таким же, как при действии одной равнодействующей силы $\overline{R}$, равной сумме векторов всех приложенных сил.

4.1 Основные понятия динамики: масса.

В классической механике масса движущейся МТ равна массе покоящейся МТ, рассматривается как постоянная величина. Масса m МТ численно равна модулю ее силы тяжести P, деленному на ускорение g свободного падения на поверхности земли: $m = \frac{P}{g}$.

Понятие массы введено И. Ньютоном в «Определениях 1 и 2», во 2 законе динамики и законе всемирного тяготения.

По Определению 1 масса – количество материи, связанное с объемом тела, числом молекул.

Во втором законе масса МТ m является механической мерой инертности точки, т.е. характеризует способность МТ изменять состояние движения не мгновенно, а с течением времени. Чем больше масса точки, тем медленнее изменяется движение (скорость) точки.

Масса, введенная в закон всемирного тяготения, определяется свойствами гравитационного поля.

И. Ньютон во всех трех случаях считал массу одной и той же величиной: $\frac{m_И}{m_T} = 1$, здесь $m_И = m_T$ – массы инерционная и тяготеющая.

В опытах И. Ньютона соотношение $\frac{m_И}{m_T} = 1$ доказано с точностью до 10^{-3}. Равенство инерционной и гравитационной масс называют ***принципом эквивалентности Ньютона.***

В настоящее время это равенство доказано с точностью 10^{-12}. Сделано это было в 1971 году в МГУ.

Вопрос о причинах и справедливости принципа эквивалентности является одним из фундаментальных вопросов современной физики.

4.2 Основные понятия динамики: сила.

Как видно из ***Определения 4, второго и третьего законов Ньютона***, ***сила*** в ТМ введена как математическая мера, количественно определяющая изменение количества движения точки в результате того или иного воздействия. Поэтому сила всегда имеет конкретную точку приложения. Распространение понятия силы на взаимодействующие тела, где воздействие происходит по поверхности или объему, привело к задаче об эквивалентной замене системы сил. Об этом было сказано выше в разделе «Статика».

Аналогично поступают и в динамике точки и тела.

Поскольку сила – количественная мера, необходимо заранее уточнить какие факторы могут входить в аналитическое соотношение, описывающее силу.

Во втором законе динамики $m\overline{a} = \overline{F}$ ускорение входит в левую часть равенства в первой степени. Если считать, что сила может зависеть от ускорения, то не будет справедлив принцип независимости действия сил.

Следовательно, вектор силы в классической механике может зависеть только от времени, положения точки и ее скорости. $\overline{F} = \overline{F}(t, \overline{r}, \overline{V})$. Здесь $\overline{r}$ - радиус – вектор точки в инерциальном пространстве, рис. 1.1.

Силы однозначно задают ускорение точки, а значит и изменение ее скорости. Следовательно, ***координаты, скорость точки являются независимыми величинами***.

В любом положении точки, при любых ее скоростях одна и та же сила создаст ***одно*** *изменение скоростных характеристик (изменение движения).*

Третий закон Ньютона говорит, что силы всегда встречаются в природе попарно. В случае взаимодействия при непосредственном контакте двух тел это нетрудно увидеть.

При полевом взаимодействии (силы гравитационного, электрического, магнитного полей и т. д.) не видно, к какому ускоряющему телу приложена сила противодействия.

Это противоречие возникает из-за того, что понятие силы в механике И. Ньютона введено, как математическая мера, определяющая изменение количества движения **материальной точки**.

4.3 Основные понятия динамики: динамические меры движения

Введение понятия количества движения точки в Определении 2, второй закон в формулировке И. Ньютона приводят к следующим выводам:

– ***сила*** не двигает точку (так говорили во времена Аристотеля и почти 2000 лет после него), а ***изменяет*** это ***движение***;

– изменение движения точки (скорости) количественно характеризуется ***изменением*** ее ***количества движения*** $\vec{Q} = m\vec{V}$, в которое линейно входит масса и скорость точки (физики произведение массы на скорость точки называют ***импульсом точки***).

чем больше масса точки, тем меньше изменение скорости (меньше изменяется движение) точки.

Количество движения точки называют первой динамической ме рой движения точки. Вам хорошо известна третья динамическая мера – кинетическая энергия $T = \dfrac{mV^2}{2}$. Второй динамической мерой движения точки является момент количества движения. Все 3 динамические меры введены в ТМ не только для точки, но и для тела и МС. В каждую из них входят скоростные и массовые характеристики объекта. Изменение скоростных характеристик говорит о том, как изменяется движение, массовые же характеристики определяют инерционные свойства объекта.

Задачей динамики является определение аналитической связи между изменением динамических характеристик и силами, действующими на МО.

5. *Основы математики в теоретической механике*

Здесь приведен ряд справочных сведений, в основном, из школьного курса математики, которые необходимы приступающему к изучению ТМ.

5.1 Сведения из геометрии и тригонометрии

5.1.1 Радиан

1 ***Радиан*** – центральный угол окружности, опирающийся на дугу этой окружности, длиной 1 радиус.

Так как длина окружности равна $L = 2\pi R$, то $360^0 = 2\pi$ радиан, $180^0 = \pi$ радиан, $90^0 = \pi/2$ радиан и т. д.

Перевод градусов в радианы и обратно

$$\alpha^0 = \frac{\pi}{180}\alpha \text{ рад},\ \ \alpha \text{ (рад)} = \frac{180}{\pi}\alpha^0;\ \ 1 \text{ рад} = \frac{180^0}{\pi};\ \ 1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ рад.}$$

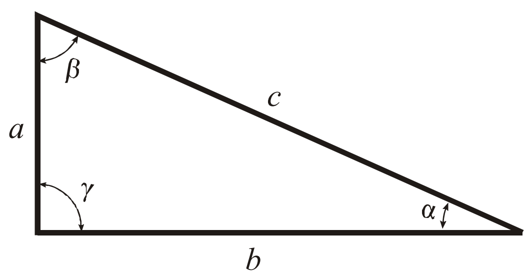
5.1.2 Прямоугольный треугольник

Угол $\gamma = 90^0 = \pi/2$ рад; *a, b* – катеты, *c* – гипотенуза; *a* – катет, прилежащий к острому углу β, противолежащий острому углу α, *b* – катет, прилежащий к острому углу α, противолежащий острому углу β.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

$$S = {}^{ab}\!/_{2}\,.$$

.



5.1.3 Синус, косинус угла

Определение синуса угла:

Синусом угла называется отношение противолежащего ему катета к гипотенузе.

$$sin(\alpha)= a/c\,;\; sin(\beta)= b/c\,.$$

Определение катета по противолежащему острому углу и гипотенузе:

Катет равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла.

$$a = c\, sin(\alpha)\,;\; b = c\, sin(\beta)\,.$$

Определение гипотенузы по катету и противолежащему острому углу:

Гипотенуза равна отношению катета к синусу противолежащего ему угла.

$$c = a/sin(\alpha)\,;\; c = b/sin(\beta)\,.$$

Определение косинуса угла:

Косинусом угла называется отношение прилежащего к нему катета к гипотенузе.

$$cos(\alpha)= b/c\,;\; cos(\beta)= a/c\,.$$

Определение катета по прилежащему острому углу и гипотенузе:

Катет равен произведению гипотенузы на косинус прилежащего к нему угла.

$$b = c\, cos(\alpha)\,;\; a = c\, cos(\beta)\,.$$

Определение гипотенузы по катету и противолежащему острому углу:

Гипотенуза равна отношению катета к косинусу прилежащего к нему угла.

$$c = {b \over cos(\alpha)};\ c = {a \over cos(\beta)}.$$

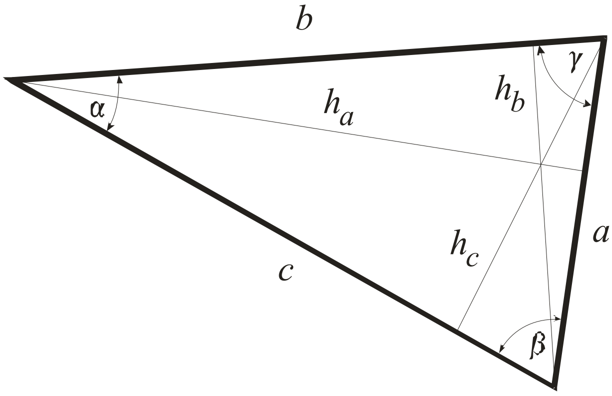
5.1.4 Теорема Пифагора:

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

Или $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, тогда $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

5.1.5 Остроугольный треугольник:



a, b, c – стороны треугольника, α, β, γ – противолежащие этим сторонам углы, h_a, h_b, h_c – высоты, опущенные на соответствующие стороны (основания) *a, b, c*.

Определение площади треугольника:

$$S = {1 \over 2} b h_b = {1 \over 2} ab \sin\gamma = {1 \over 2} bc \sin\alpha = {1 \over 2} ac \sin\beta,$$

5.1.6 Теорема синусов:

Отношения сторон треугольника к синусам противолежащих углов равны.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

5.1.7 Теорема косинусов:

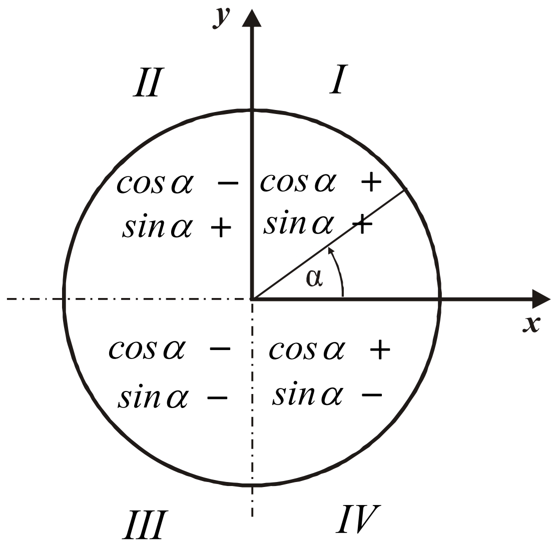
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha, \; a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\,\alpha}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\beta, \; b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\beta}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\,\gamma, \; c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\,\gamma}\,.$$

5.1.8 Знаки sin и cos в разных четвертях тригонометрического круга:



5.1.9 Синусы и косинусы углов, кратных 30^0 и 45^0:

Углы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0
Синус	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
Косинус	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$

Углы	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0
Синус	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$

Косинус	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1/2	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$

5.1.10 Тригонометрические равенства:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha;$$

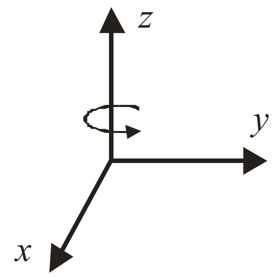
$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

5.2 Основные сведения из векторной алгебры

5.2.1 Правая и левая тройки осей.

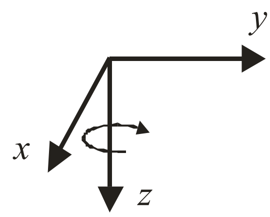
Правая тройка осей:



С оси z поворот от оси x до оси y по кратчайшему расстоянию виден против хода часовой стрелки.

Правый винт, поворачиваемый от оси x до оси y по кратчайшему расстоянию против хода часовой стрелки, движется в положительном направлении оси z.

Левая тройка осей:

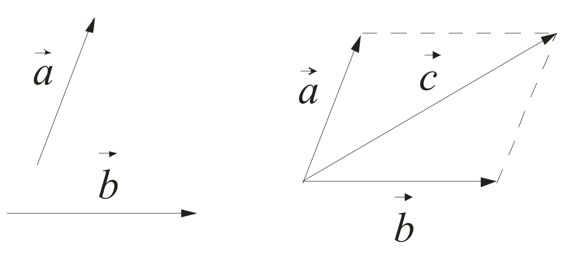


С оси z поворот от оси x до оси y по кратчайшему расстоянию виден по ходу часовой стрелки.

Правый винт, поворачиваемый от оси x до оси y по кратчайшему расстоянию по ходу часовой стрелки, движется в положительном направлении оси z.

5.2.2 Сложение векторов:

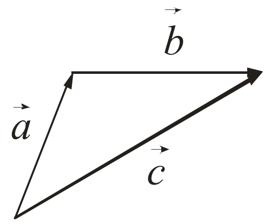
Правило параллелограмма:

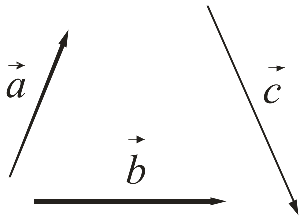


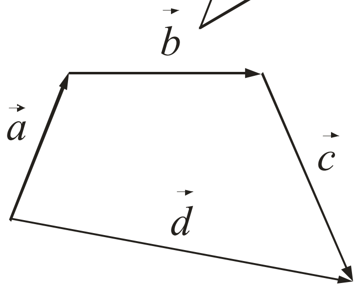
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

Построение веревочного многоугольника:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

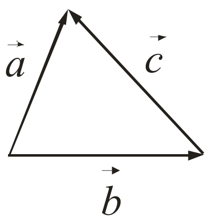




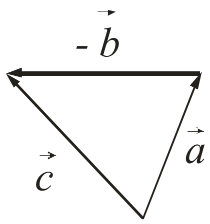


$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$$

Вычитание векторов:



$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$$

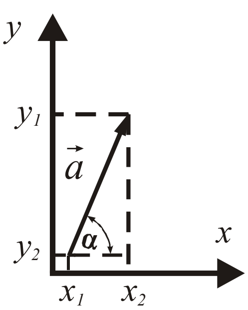


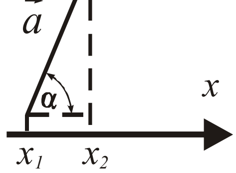
$$\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{c}$$

5.2.3 Проекция вектора на ось

Проекцией вектора на ось называется разность координат конца и начала вектора вдоль этой оси.

$$a_x=(\vec{a})_x=x_2-x_1; \quad a_x=a\cos(\alpha).$$





$$a_y=(\vec{a})_y=y_1-y_2;$$

$$a_y=a\sin(\alpha).$$

Проекция вектора на ось равна произведению модуля вектора на косинус угла между вектором и осью.

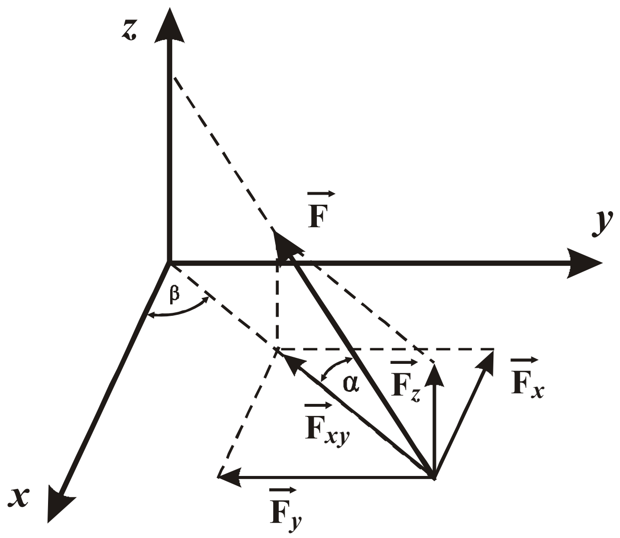
$$a_x = |\vec{a}| cos(\widehat{\vec{a},Ox}) = |\vec{a}| cos(\alpha)$$

$$a_y = |\vec{a}| cos(\widehat{\vec{a},Oy}) = |\vec{a}| cos(90^0 - \alpha) = |\vec{a}| sin(\alpha)$$

5.2.4 Правило двойного проецирования

(применяется к векторам, не лежащим в координатной плоскости):

Проекцию вектора на оси системы координат удобно найти, если сначала спроецировать вектор на координатную плоскость, а затем найти проекцию вектора в координатной плоскости на оси.



$$F_z = F\,sin(\alpha); \quad F_{xy} = F\,cos(\alpha); \quad F_x = -F\,cos(\alpha)cos(\beta);$$

$$F_y = -F\,cos(\alpha)sin(\beta).$$

5.2.5 Координаты вектора:

Координаты вектора равны его проекциям на оси.

Разложение вектора на составляющие вдоль осей системы координат:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,.$$

Длина вектора: $$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

5.2.6 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов называется произведение модулей векторов и косинуса угла между векторами.

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = ab\,cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов можно определить через проекции векторов на оси декартовой системы координат как сумму произведений одноименных проекций векторов:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Скалярное произведение ортов осей декартовой системы координат:

$$\left(\vec{i},\vec{i}\right) = \left(\vec{j},\vec{j}\right) = \left(\vec{k},\vec{k}\right) = 1,$$

$$\left(\vec{i},\vec{j}\right) = \left(\vec{i},\vec{k}\right) = \left(\vec{j},\vec{k}\right) = 0$$

Проекцию одного вектора на другой можно определить с помощью их скалярного произведения:

– проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ равна $a\,cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{b}$;

– проекция вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ равна $b\,cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{a}$.

Косинус угла между векторами можно определить также с помощью их скалярного произведения:

$$cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{ab}.$$

Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то эти вектора взаимно перпендикулярны.

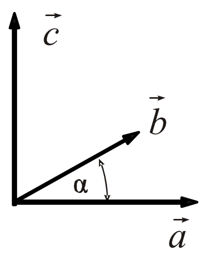
Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля

$$\left(\vec{a},\vec{a}\right)=a^2$$

5.2.7 Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов называется вектор, перпендикулярный сомножителям, направленный так, что с его конца кратчайший поворот от первого сомножителя ко второму виден происходящим против хода часовой стрелки.

Модуль векторного произведения равен произведению модулей сомножителей и синуса угла между векторами.



$$\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}\;;\;\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$

$\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - составляют правую тройку.

Векторное произведение векторов можно определить через проекции векторов на оси декартовой системы координат как определитель матрицы:

$$\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\vec{j}\left(a_zb_x-a_xb_z\right)+\vec{k}\left(a_xb_y-a_yb_z\right)$$

Векторное произведение ортов осей декартовой системы координат:

$$\left[\vec{i},\vec{j}\right]=-\left[\vec{j},\vec{i}\right]=\vec{k},\ \left[\vec{i},\vec{k}\right]=-\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j},\ \left[\vec{j},\vec{k}\right]=-\left[\vec{k},\vec{j}\right]=\vec{i},$$

$$\left[\vec{i},\vec{i}\right]=\left[\vec{j},\vec{j}\right]=\left[\vec{k},\vec{k}\right]=0.$$

5.2.8 Смешанное произведение векторов

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c}=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$$

Смешанное произведение в координатной форме:

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Круговая перестановка сомножителей в смешанном произведении:

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\left(\left[\vec{c},\vec{a}\right],\vec{b}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

5.2.9 Двойное векторное произведение векторов

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

5.3 Таблица производных элементарных функций

1. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$. 2. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$, $\left(e^x\right)'=e^x$. 3. $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$, $\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$.	4. $\left(\sin x\right)'=\cos x$. 5. $\left(\cos x\right)'=-\sin x$. 6. $\left(tgx\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ 7. $\left(ctgx\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.	8. $\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 9. $\left(\arccos x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 10. $\left(arctgx\right)'=\frac{1}{1+x^2}$. 11. $\left(arcctgx\right)'=-\frac{1}{1+x^2}$.	$(uv)'=u'v+uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ $y=f\left(u(x)\right)$ $y'=f'\left(u(x)\right)\cdot u'(x)$

5.4 Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq 1)$ $\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert + C$ 2. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$ $\int e^{x}dx = e^{x} + C$ 3. $\int \sin xdx = -\cos x + C$ 4. $\int \cos xdx = \sin x + C$ 5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ 6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	7. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ 8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$ 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$ 11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$ 12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$

Список литературы.

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Пер. с латинского и комментарии А.Н. Крылова; Предисловие Л.С. Полака. – М.: Наука, 1989. – 687 с.