Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный аграрный университет»
Институт агроинженерии

**Кафедра прикладной механики**

**Черногоров Е.П.**

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. СТАТИКА

**Челябинск**

**2017**

# *ВВЕДЕНИЕ*

Все явления в окружающем нас мире представляют собой различные формы материи. Одной из основных форм существования материи является *движение*, под которым понимается всякое изменение материи.

Существуют различные виды движения (механическое, химическое, биологическое и др.). Наука, в которой изучается простейший вид движения – механическое движение, называется *механикой* (*механика* – по-древнегречески – ухищрение, хитрость).

*Механическим движением материального объекта (МО) называется изменение его положения в пространстве с течением времени относительно других тел.*

По виду материальных объектов, механическое движение которых изучается, механика подразделяется на *небесную механику* (МО – планеты и звезды), *гидромеханику* (МО – жидкости), *теорию упругости* (МО – деформируемые, упругие тела) и т.д.

*Теоретическая механика – наука о наиболее общих законах и свойствах механического движения.*

## В.1. ОБЪЕКТЫ И МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

*Теоретической* изучаемая нами наука называется потому, что ее методами являются *метод абстракции* и метод *математической дедукции* или *формальной логики*, характерные для математических дисциплин.

В основу теоретической механики положены некоторые основные *понятия* и *аксиомы* (важнейшие положения, проверяемые опытом). Из этих понятий и аксиом сделаны с помощью формальных логических рассуждений соответствующие выводы о движении. Эти выводы – *теоремы* представляют собой правила для различных технических расчетов, необходимых при количественном изучении механического движения тех или иных материальных объектов.

Каждый конкретный материальный объект является *моделью* реальных материальных тел и представляет собой ту или иную степень *абстракции*. Отвлекаясь (абстрагируясь) при изучении механических движений материальных тел от всего частного, случайного, менее существенного, и рассматривая только те свойства, которые в данной задаче являются определяющими, мы приходим к рассмотрению различных моделей материальных тел. Так, например, если материальное тело имеет малые размеры по отношению к другим телам или по отношению к расстояниям от него до данных тел, то размерами этого тела можно пренебречь, рассматривая его как точку. Такое абстрагирование приводит к важному понятию теоретической механики – понятию материальной точки.

*Материальной точкой называется геометрическая точка, обладающая массой* – (МТ).

Другим примером абстрагирования от реальных тел является понятие абсолютно твердого тела.

*Абсолютно твердым называется тело, расстояния между точками которого остаются неизменным за все время исследования.*

Договоримся, что в дальнейшем, имея в виду абсолютно твердое тело, будем говорить просто «*твердое тело*» (ТТ), или вообще «*тело*».

*Механической системой будем называть совокупность (множество) материальных точек и (или) тел, механически взаимодействующих между собой.*

Примером механической системы является солнечная система. При изучении движения планет вокруг солнца мы их можем принять за материальные точки. Но уже при изучении, например, суточного вращения Земли, мы не можем считать ее точкой, а должны моделировать ее абсолютно твердым телом. То есть, применяя те или иные модели, следует помнить о пределах их применимости.

## В.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Из определения предмета теоретической механики и механического движения следует, что к основным понятиям теоретической механики относятся:

*материальный объект, пространство и время.*

**Пространство**. В теоретической механике принимается, что пространство, в котором изучают движение материальных объектов, обладает свойствами, характерными для пространства вблизи поверхности Земли и отраженными в аксиомах и теоремах эвклидовой геометрии.

Так по Ньютону пространство есть некоторое абсолютное вместилище (ящик), в котором находятся все материальные тела. Особенностью этого пространства является то, что оно не меняет своих свойств в зависимости от расположения и движения в нем материи. Это пространство *трехмерно, безгранично, однородно и изотропно* (*однородно* – значит свойства одинаковы во всех точках; *изотропно* – одинаковы свойства по всем направлениям из данной точки).

Очевидно, что обнаружить перемещение тел в таком пространстве невозможно, т.к. одна область этого пространства ничем не отличается от другой. Поэтому движение какого либо тела можно обнаружить только по отношению к другому телу (телам).

Тело, по отношению, к которому определяется положение других тел, называется *основным телом* или *телом отсчета* (ТО).

Для того чтобы математически задать и исследовать движение, с телом отсчета связывают какую-либо *систему координат* (СК), при помощи которой пространство определяют как множество воображаемых геометрических точек, связанных с телом отсчета. Начало этой системы координат можно выбрать в произвольной точке тела отсчета, но эту точку обязательно нужно указывать.

**Время.** Время также как и пространство является объективной реальностью, присущей материи. Время измеряется и постигается при помощи каких-либо периодических процессов природы. Отсчет времени ведут, как правило, от момента, с которого начинают изучение движения.

В теоретической механике время считается абсолютным, независящим от расположения в пространстве и от движения материи, т.е. принимается, что время течет равномерно и одинаково для всех точек пространства и во всех системах координат, независимо от того, движутся они или нет.

*Время необратимо*, т.е. всякий материальный процесс развивается в одном направлении – от прошлого к будущему. *Время одновременно*.

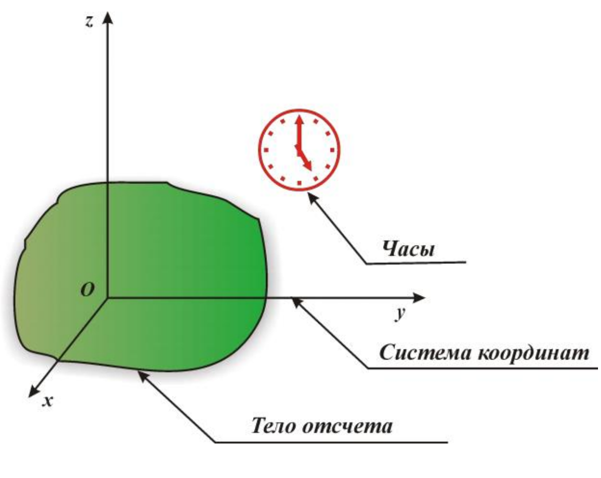



**Рис.В.1**

*Тело отсчета с жестко закрепленной системой координат, снабженной часами, для измерения времени, называется системой отсчета* (рис.В.1):

$$\textbf{СО = ТО + СК + Ч.}$$

Систему отсчёта принято называть теми же буквами, которыми обозначены оси, связанные с телом отсчёта. Так, например, если за тело отсчёта выбрана Земля, с установленными на ней осями координат $Oxyz$, то говорят о системе отсчёта $Oxyz$, связанной с Землёй.

После того, как мы ввели понятие системы отсчета, мы можем дать более четкое определение понятия механического движения.

*Если положение точек материального объекта в заданной системе отсчета изменяется с течением времени, то говорят, что объект совершает механическое движение в пространстве тела отсчета. В противном случае говорят, что объект покоится в заданном пространстве (в пространстве тела отсчета).*

Отсюда следует, что понятия движения и покоя являются *относительными*, т.к. они связаны с выбором тела отсчета. Так, например, для наблюдателя, находящегося на Земле (в пространстве Земли), сидящий в движущемся автобусе пассажир совершает движение, а в пространстве автобуса он покоится.

Движение и покой объединяются общим понятием *механического состояния* материального объекта в заданном пространстве.

## В.3. СВОБОДНЫЕ И НЕСВОБОДНЫЕ МАТЕРИАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ

Материальные объекты, движение и равновесие которых приходится изучать, разделяются на свободные и несвободные.

Пусть в пространстве $Oxyz$ тела отсчета $A$ рассматривается движение или равновесие, например, твердого тела $\gamma$.

Тело $\gamma$ в этом пространстве называется свободным, если его из занимаемого положения можно переместить в любое соседнее. Свободным телом в пространстве Земли является, например, летящий самолет.

Твердое тело называют несвободным в пространстве $Oxyz$, если на его положение в этом пространстве наложены какие-либо ограничения. Например, имеется хотя бы одно направление, по которому тело не может перемещаться. Очевидно, тело будет несвободным, если оно опирается на тело отсчета или соединено с ним через посредство других тел. Ограничения на положение тела в пространстве называются **связями**.

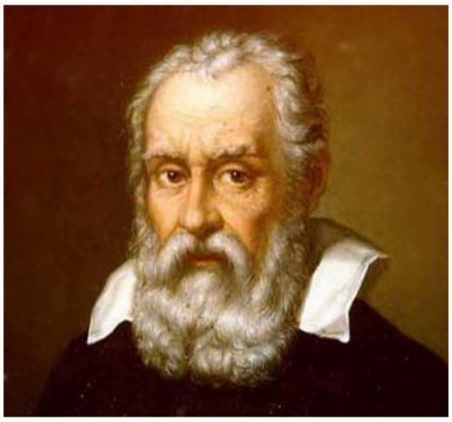
Тот же самолет на взлетной полосе аэродрома – тело несвободное в пространстве Земли, так как невозможно перемещение самолета вертикально вниз.

Многочисленными примерами несвободных тел являются детали различных конструкций и машин.

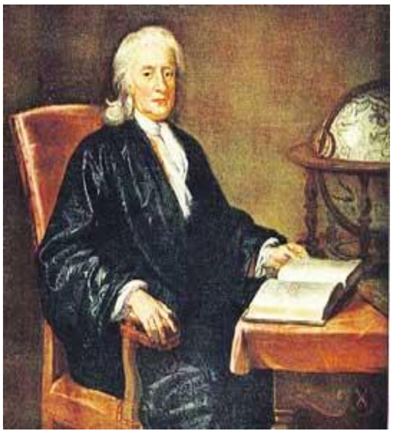
## В.4. РОЛЬ И ЗНАЧЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Теоретическую механику, в основу которой положены законы *Галилея - Ньютона*, часто называют классической механикой, в отличие от релятивистской механики, основанной на идеях *А. Эйнштейна* о связи пространства и времени с движущейся материей.

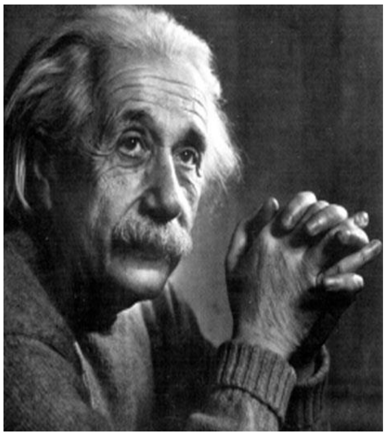
Классическая механика, являясь частным (точнее, предельным) случаем релятивистской механики, не теряет своего значения, т.к. ее выводы при скоростях движения, достаточно малых по сравнению со скоростью света, с большой точностью удовлетворяют требованиям многих отраслей современной техники.



***Галилей* (1564–1642)**



***Ньютон* (1643–1727)**



***Эйнштейн* (1879-1955)**

Несмотря на, казалось бы, довольно абстрактные объекты исследования (точнее, как раз благодаря этому), теоретическая механика является одним из важнейших курсов, изучаемых в высшей школе. Ее законы и выводы широко применяются в целом ряде других дисциплин при решении самых разнообразных и сложных технических задач. Все технические расчеты при постройке различных сооружений, при проектировании машин, при изучении полетов различных летательных аппаратов и т.п. основаны на законах теоретической механики. В этом заключается ее прикладное значение.

Теоретическую механику можно разделить на три раздела: *статику, кинематику и динамику.*

# *1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ*

**Статика есть общее учение о силах. В статике изучаются законы равновесия абсолютно твердых тел под действием приложенных к ним сил и способы преобразования систем сил в простейшие, им эквивалентные.**

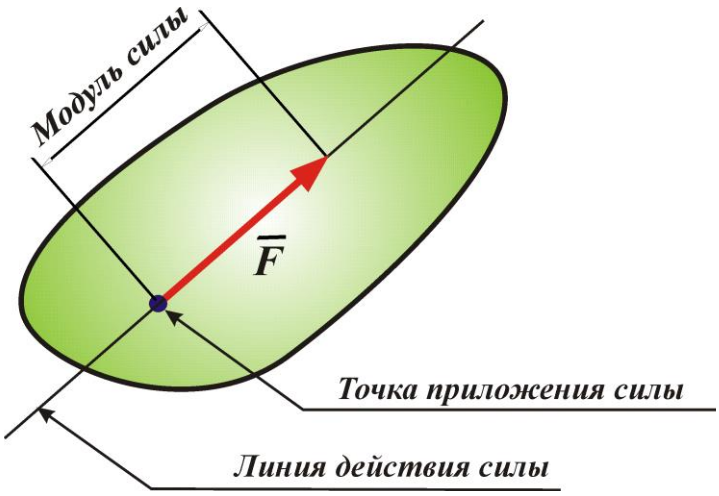



**Рис. 1.1**

1. **Основным понятием статики является** ***сила***. Это простейшее понятие – его нельзя определить через более простые, уже известные понятия. Сила изображается, как показано на рисунке 1.1.

Можно сказать, что сила – это количественная мера механического взаимодействия тел.

**Сила – величина векторная**. Она характеризуется модулем (абсолютной величиной), линией действия и направлением вдоль линии действия, а также точкой приложения. Размерность силы – ньютон (Н).

Взаимодействие тел может быть точечным, поверхностным, или даже объемным (сила поля). При точечном контакте мы будем иметь сосредоточенную силу. В других случаях имеет место распределенная нагрузка. Распределенная нагрузка характеризуется её интенсивностью (рис. 1.2).

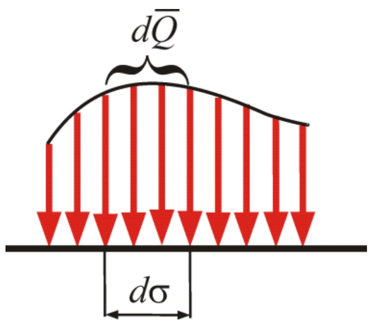



**Рис. 1.2**

$$\overline{q} = \frac{d\,\overline{Q}}{d\sigma},$$

где $d\sigma$ – элемент объема, поверхности, линии; $d\,\bar{Q}$ – нагрузка, приходящаяся на этот элемент.

**Предупреждение.** Не надо только вектор $\bar{F}$, которыми изображается сила, действующая на тело, отождествлять с этой силой. Вектор $\bar{F}$ – образ силы, но не сила.

2. **Система сил** – совокупность сил, действующих на данную механическую систему. (Рис. 1.3).

$$\left(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n\right) \sim \left\{\bar{F}_k\right\}_n.$$

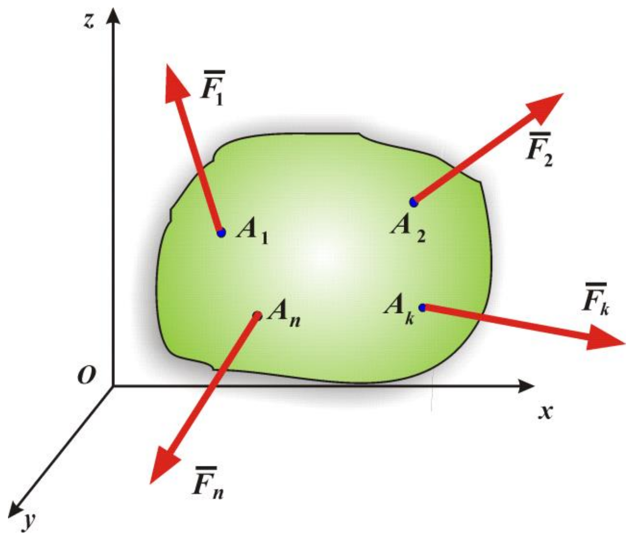



**Рис. 1.3**

Система сил может быть:

– *сходящейся*, если линии всех сил системы пересекаются в одной точке; эта точка называется *точкой схода*;

– *плоской*, если все силы лежат в одной плоскости;

– *системой параллельных сил*, если линии действия сил параллельны между собой.

3. Система сил называется **уравновешенной**, или эквивалентной нулю, если свободное твердое тело не изменит состояния покоя под действием этих сил.

$$\left\{\bar{F}_k\right\} \sim 0.$$

Условия, при которых система сил оказывается уравновешенной, называются условия равновесия этих сил. Законы равновесия твердых тел совпадают с условиями равновесия сил приложенных к этим телам.

4. Сила $\bar{Q}$ называется **уравновешивающей** данную систему сил, если она вместе с этой системой образует уравновешенную систему сил:

$$\left(\left\{\bar{F}_k\right\}_n, \bar{Q}\right) \sim 0.$$

Очевидно, что любая из сил уравновешенной системы является уравновешивающей силой для остальных.

5. Две системы сил $\left\{\bar{F}_k\right\}_n$ и $\left\{\bar{Q}_k\right\}_m$ называются **эквивалентными,** если их действие на тело одинаково:

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n \sim \left\{\bar{Q}_k\right\}_m.$$

Договоримся, действия двух систем сил на тело называть одинаковыми, если, каждая из них, уравновешивается одной и той же третьей системой. Тогда определение эквивалентности неуравновешенных систем сил формулируется следующим образом: ***две системы сил называются эквивалентными, если каждая из них уравновешивается одной и той же третьей системой***:

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n \sim \left\{\bar{Q}_k\right\}_m,$$

если $$\left(\left\{\bar{F}_k\right\}_n, \left\{\bar{S}_k\right\}_r\right) \sim 0 \text{ и } \left(\left\{\bar{Q}_k\right\}_m, \left\{\bar{S}_k\right\}_r\right) \sim 0.$$

Эквивалентные системы обращаются в уравновешенные, если к каждой из них добавить одну и ту же систему сил. Определение эквивалентных систем сил через равновесие правомерно, так как в статике изучается именно равновесие тел и в определении эквивалентности использовано уже известное понятие об уравновешенной системе сил.

Эквивалентные системы сил обладают свойствами *рефлексивности*:

если $$\left\{\bar{P}_k\right\}_n \sim \left\{\bar{Q}_k\right\}_m, \text{ то } \left\{\bar{Q}_k\right\}_m \sim \left\{\bar{P}_k\right\}_n,$$

и *транзитивности*:

если $$\left\{\bar{P}_k\right\}_n \sim \left\{\bar{T}_k\right\}_r \text{ и } \left\{\bar{Q}_k\right\}_m \sim \left\{\bar{T}_k\right\}_r, \text{ то } \left\{\bar{P}_k\right\}_n \sim \left\{\bar{Q}_k\right\}_m.$$

6. Сила $\bar{R}$, эквивалентная системе сил $\left\{\bar{F}_k\right\}_n$, называется **равнодействующей** данной системы сил:

$$\bar{R} \sim \left\{\bar{F}_k\right\}_n.$$

Следует отметить, что не всякая система сил имеет равнодействующую.

# *2. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА И ОСИ*

Рассмотрим некоторое тело, $\gamma$ на которое действует сила $\bar{F}$**,** приложенная в точке $A$.

***Моментом силы*** $\bar{\boldsymbol{F}}$ ***относительно центра*** *O называется векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на силу:*

$$\bar{m}_o\bar{F} = \bar{r}_A \times \bar{F}. \tag{2.1}$$

*Момент силы относительно центра есть вектор, перпендикулярный плоскости моментного треугольника и по модулю равный произведению модуля силы на плечо, где плечо* $h$ *– есть расстояние от центра до линии действия силы. Этот вектор направлен в ту сторону, откуда поворот, совершаемый телом под действием силы, виден происходящим против часовой стрелки.*

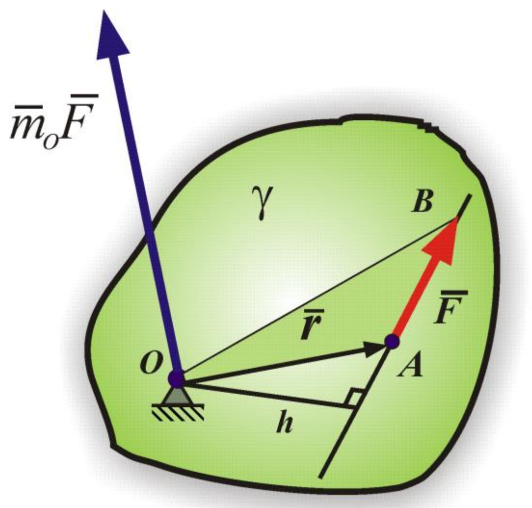



**Рис. 2.1**

$$\bar{m}_O\bar{F} \perp \left(O, \bar{F}\right).$$

$$\left|\bar{m}_O\bar{F}\right| = F\,h = 2S_{OAB}\,.$$

Треугольник $OAB$ (рис. 2.1) называется *моментным треугольником*.

Размерность момента силы:

$$\left[\left|\bar{m}_O\bar{F}\right|\right] = \begin{cases} \text{Н} \cdot \text{м} - \text{СИ}, \\ \text{кгс} \cdot \text{м} - \text{ТС}. \end{cases}$$

Если точка $O$ тела закреплена, то момент силы можно рассматривать как меру вращательного действия силы относительно этого центра.

В декартовых координатах с началом в центре $O$ можно записать:

$$\bar{m}_O\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} =$$

$$= \bar{i}\left(y_A F_z - z_A F_y\right) + \bar{j}\left(z_A F_x - x_A F_z\right) + \\ + \bar{k}\left(x_A F_y - y_A F_x\right). \qquad (2.1)$$

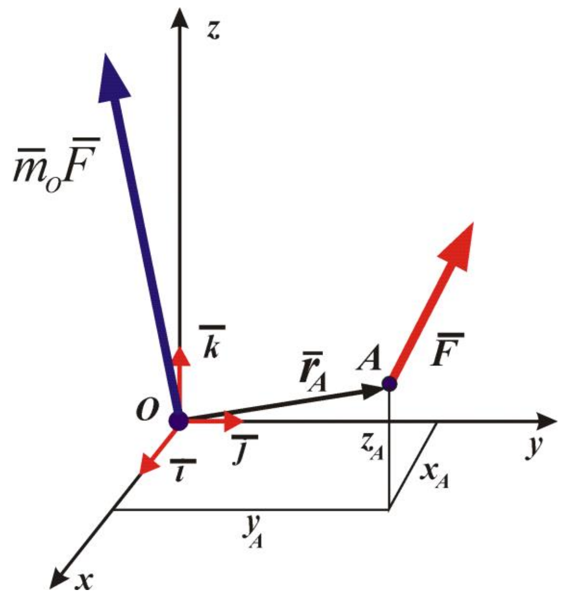



**Рис. 2.2**

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орты координатных осей. $F_x, F_y, F_z$ – проекции силы на оси координат. $x, y, z$ – координаты точки приложения силы.

Проекции вектора $\bar{m}_O\bar{F}$ на оси с началом в центре $O$ равны алгебраическим дополнением элементов первой строки определителя (2.1):

$$\left(\bar{m}_O\bar{F}\right)_x = y_A F_z - z_A F_y;$$

$$\left(\bar{m}_O\bar{F}\right)_y = z_A F_x - x_A F_z;$$

$$\left(\bar{m}_O\bar{F}\right)_z = x_A F_y - y_A F_x.$$

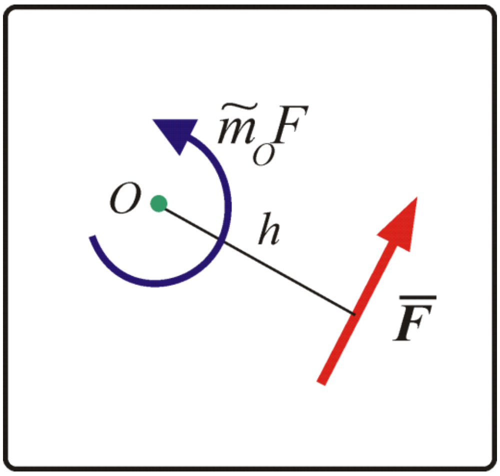



**Рис. 2.3**

В плоскости, проходящей через силу и данный центр, момент силы можно рассматривать как *величину алгебраическую* и изображать кривой стрелкой.

***Алгебраическим моментом силы относительно центра*** *называется взятое со знаком + или – произведение модуля силы на плечо*:

$$\tilde{m}_O\,\bar{F} = \pm F \cdot h\,.$$

Знак +, если сила стремится вращать тело против часовой стрелки (рис.2.3).

***Моментом силы относительно оси*** *называется алгебраический момент проекции силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с плоскостью* (рис. 2.4).

$$m_z\bar{F} = \tilde{m}_O\bar{F}_P = \pm F_P h\,.$$

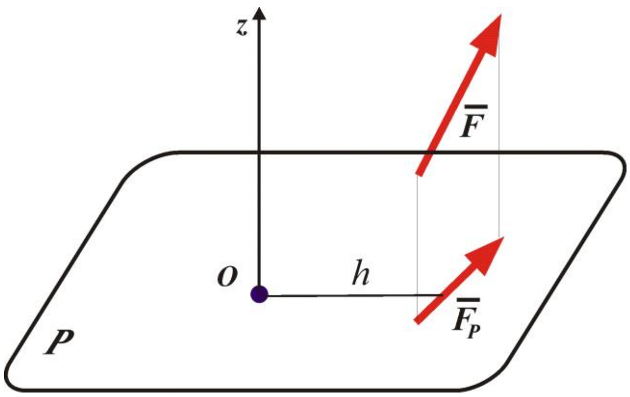



Рис. 2.4

Если тело может вращаться вокруг данной оси, то момент силы можно рассматривать как меру вращательного действия силы относительно этой оси.

Знак момента силы относительно оси принято считать положительным, когда сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, если смотреть с конца оси.

**ТЕОРЕМА** ***о связи между моментом силы относительно центра и оси проходящей через этот центр***

*Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось момента силы относительно какого-либо центра на данной оси*:

$$m_z\overline{F} = \left(\overline{m}_O F\right)_z . \tag{2.2}$$

Доказательство:

По определению для модулей имеем:

$$\left|m_z\overline{F}\right| = \left|\overline{m}_O\overline{F}_{xy}\right| = \left|\overline{r}_{A'} \times \overline{F}_{xy}\right| = \left\|\begin{bmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_A & y_A & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{bmatrix}\right\| = x_A F_y - y_A F_x = \left|\left(\overline{m}_O\overline{F}\right)_z\right| .$$

Легко проверить также совпадение знаков.

Таким образом, выражение (2.2) справедливо.

Теперь можем записать:

$$m_x\overline{F} = \left(\overline{m}_O\overline{F}\right)_x = y_A F_z - z_A F_y;$$

$$m_y\overline{F} = \left(\overline{m}_O\overline{F}\right)_y = z_A F_x - x_A F_z;$$

$$m_z\overline{F} = \left(\overline{m}_O\overline{F}\right)_z = x_A F_y - y_A F_x.$$

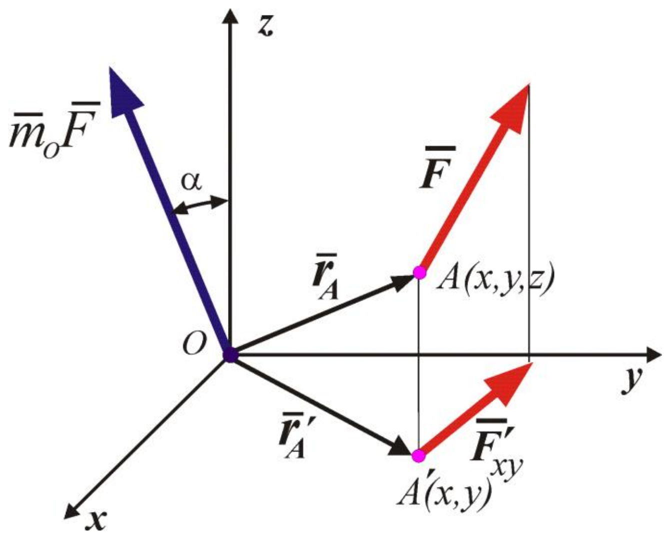



**Рис. 2.5**

Также $\left|m_z\overline{F}\right| = \left|\overline{m}_O\overline{F}\right|\cos\alpha$, где $\alpha$ – угол между осью и вектором момента силы.

**Примечания**:

*1. Момент силы не изменится, если силу перенести вдоль линии ее действия.* (Рис. 2.6).

В самом деле, из определения момента силы относительно центра следует что при переносе силы $\overline{F}$ не изменится ни произведение $F{\cdot}h$, ни направление вектора $\overline{m}_O\overline{F}$, а т.к. $m_z\overline{F} = \left(\overline{m}_O\overline{F}\right)_z$ то не изменится и момент силы относительно оси.

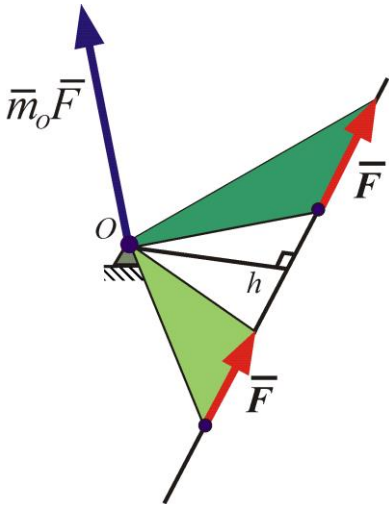



**Рис. 2.6**

*2. Если сила параллельна оси, то момент силы относительно этой оси равен нулю.*

В самом деле, в этом случае проекция силы на плоскость перпендикулярную оси обращается в нуль.

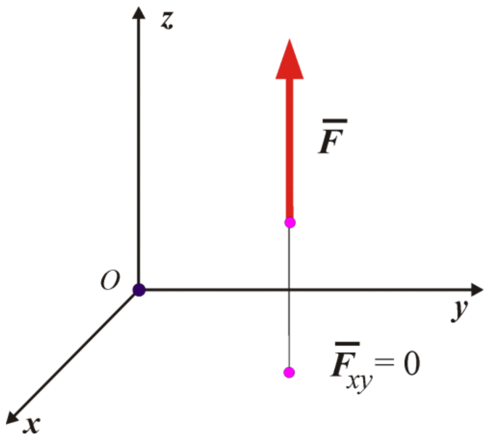



**Рис. 2.7**

*3. Если сила пересекает ось, то ее момент относительно этой оси равен нулю.*

В самом деле, проекция силы на плоскость ⊥ оси проходит через точку пересечения оси с плоскостью и момент ее относительно данной точки равен нулю

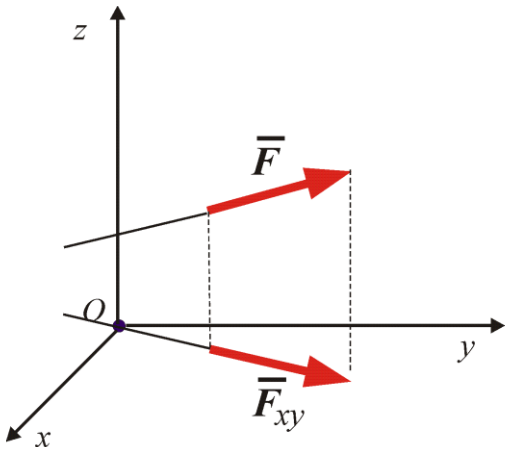



**Рис. 2.8**

# 3. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ СИЛ

Пусть дана система сил $\{\overline{F}_k\}_n$, приложенных в точках $\{A_k\}_n$ некоторой механической системы, и пусть $O$ - произвольная точка пространства.

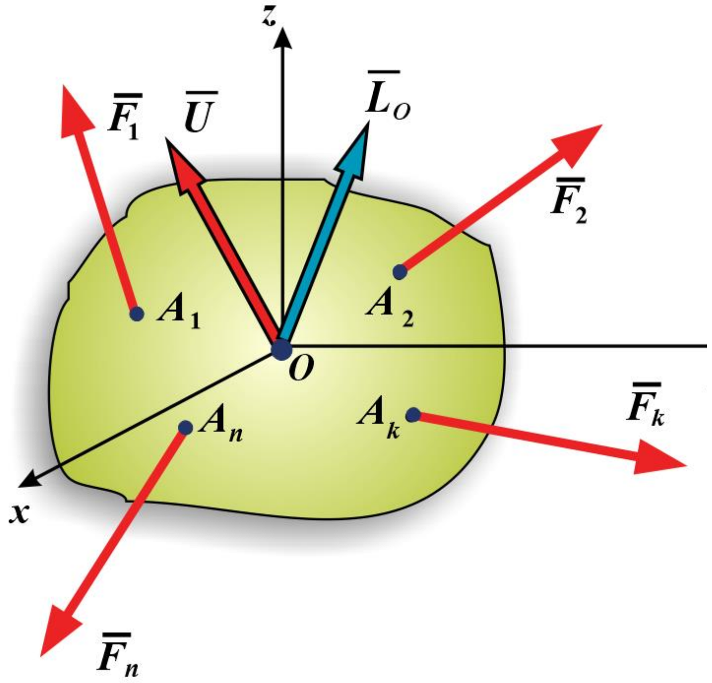



**Рис. 3.1**

**Главным вектором** $\overline{U}$ *системы сил называется вектор, равный сумме векторов сил системы:*

$$\overline{U} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k .$$

Геометрически главный вектор определяется замыкающей стороной силового многоугольника, (векторного многоугольника, построенного на силах, как на сторонах).

**Главным моментом** $\overline{L}_O$ *системы сил относительно центра О называется вектор, приложенный в точке* $O$ *и равный сумме моментов сил системы относительно этого центра:*

$$\overline{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O \, \overline{F}_k .$$

Главный вектор и главный момент системы сил являются характеристиками действия системы сил на тело. В дальнейшем будет показано, что результат действия системы сил на МС вполне определяется главным вектором и главным моментом системы сил относительно центра.

Отметим, что точкой приложения главного вектора может быть любая точка, тогда как главный момент приложен в выбранном центре, который можно назвать *полюсом*. Для удобства графического представления будем считать главный вектор также приложенным в полюсе.

Из определения главного вектора и главного момента системы сил относительно центра следует, что:

1. *Главный вектор и главный момент системы сил не изменятся, если точки приложения сил системы перенести вдоль линий их действия.*

2. *Главный вектор и главный момент системы сил*

$$\left\{\overline{F}_k\right\}_n = \left\{\overline{Q}_k\right\}_m + \left\{\overline{S}_k\right\}_r$$

*найдутся как*:

$$\overline{U}(F) = \overline{U}(Q) + \overline{U}(S); \quad \overline{L}_O(F) = \overline{L}_O(Q) + \overline{L}_O(S).$$

Проецируя выражения для главного вектора и главного момента на оси координат, получим:

$$U_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \quad U_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \quad U_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}.$$

$$L_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} m_x \overline{F}_k; \quad L_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} m_y \overline{F}_k; \quad L_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} m_z \overline{F}_k.$$

Здесь $U_x,\, U_y, U_z$ – проекции главного вектора на оси координат; $L_{Ox}, L_{Oy},\, L_{Oz}$ - проекции главного момента на оси координат, или главные моменты системы сил относительно координатных осей.

*Главный момент системы сил относительно оси равен проекций на эту ось главного момента относительно какой-либо точки на оси.*

## ТЕОРЕМА *об изменении главного момента с изменением полюса*

Пусть дана система сил $\{\bar{F}_k\}_n$, приложенных в точках $\{A_k\}_n$ некоторой механической системы, и пусть $O$ - полюс.

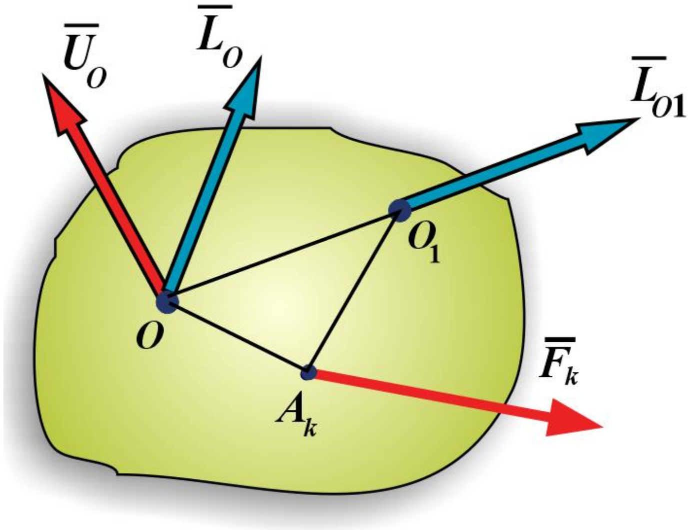



**Рис. 3.2**

$\bar{U} = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{F}_k$ - главный вектор системы сил;

$\bar{L}_O = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{m}_O \bar{F}_k$ - главный момент системы сил.

Найдем главный моменты системы сил относительно нового центра $O_1$.

$$\bar{L}_{O1} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{O1} \bar{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{O_1 A_k} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^{n} (\overline{O_1 O} + \overline{O A_k}) \times \bar{F}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{O_1 O} \times \bar{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{OA_k} \times \bar{F}_k = \overline{O_1 O} \times \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k + \bar{L}_O = \overline{O_1 O} \times \bar{U}_O + \bar{L}_O.$$

Итак, можем сформулировать ***теорему***:

*Главный момент системы сил относительно нового полюса равен главному моменту системы сил относительно старого полюса, сложенному с моментом главного вектора сил системы в старом полюсе относительно нового.*

$$\bar{L}_{O1} = \bar{L}_O + \bar{m}_{O1} \bar{U}_O.$$

**Следствие:** *Если главный вектор системы сил равен нулю, то главный момент одинаков для любого полюса*

$$\bar{L}_C = idem \; \forall C, \quad \text{если} \quad \bar{U}_C = O.$$

# 4. ПАРА СИЛ

Парой сил называются две равные по модулю, параллельные и противоположные по направлению силы, приложенные к данному телу $\bar{P} = -\bar{Q}$**.**

Расстояние между линиями сил пары называется ***плечом пары***. Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется ***плоскостью пары.***

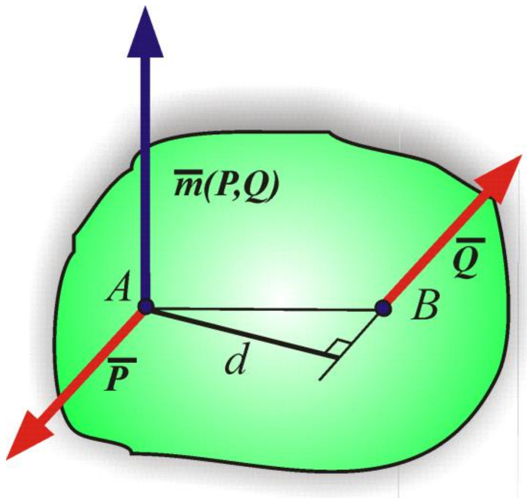



**Рис. 4.1**

Главный вектор пары сил равен нулю, следовательно, главный момент пары сил одинаков для любого полюса.

В частности, если за полюс взять точку приложения одной из сил пары, то получим:

$$\bar{L}_A\left(\bar{P},\bar{Q}\right) = \bar{m}_A\left(\bar{P}\right) = \bar{m}_A\left(\bar{Q}\right) \Rightarrow \left|\bar{L}_A\left(\bar{P},\bar{Q}\right)\right| = Q \cdot d = P \cdot d\,,$$

$$\bar{L}_A\left(\bar{P},\bar{Q}\right) \perp \left(\bar{P},\bar{Q}\right).$$

Эта величина называется ***момент пары*** и обозначается $\bar{m}\left(\bar{P},\bar{Q}\right)$.

**Момент пары сил** - вектор, перпендикулярный плоскости пары, направленный в ту сторону, откуда вращение тела парой видно против часовой стрелки, и по модулю равный произведению одной из сил пары на плечо.

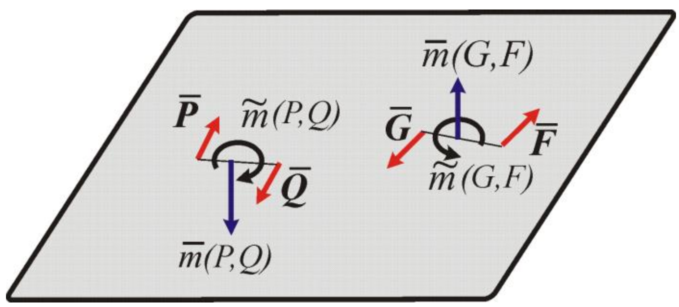



**Рис. 4.2**

Для плоской системы сил моменты пар отличаются лишь знаком и модулем, поэтому их можно рассматривать как величины алгебраические:

$$\tilde{m}\left(\bar{P},\bar{Q}\right) = \pm Pd = \pm Qd.$$

# *5. АКСИОМА РАВНОВЕСИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА*

**Все результаты статики свободного твёрдого тела можно получить на основании только одной аксиомы равновесия.**

Для равновесия системы сил $\{\boldsymbol{F}_k\}_n$, приложенных к свободному твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент сил системы относительно какого либо центра были равны нулю.

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n \sim 0 \Leftrightarrow \bar{U}_O = 0,\ \bar{L}_O = 0.. \tag{5.1}$$

Это выражение можно записать иначе:

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n \sim 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k = 0,\ \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O\,\bar{F}_k\ . \tag{5.2}$$

Для равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы векторов сил и их моментов относительно какого-либо центра были порознь равны нулю.

**Замечание**: На основании теоремы об изменении главного вектора и главного момента можно утверждать, что если главный вектор и главный момент равны нулю относительно какого-либо центра, то они будут равны нулю и относительно любого другого центра.

## УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

***а***. Уравнения (5.2) представляют собой условия равновесия произвольной системы сил в векторной форме. Проецируя их на оси координат, получим:

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; & \sum\limits_{k=1}^{n} m_x \bar{F}_k = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; & \sum\limits_{k=1}^{n} m_y \bar{F}_k = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; & \sum\limits_{k=1}^{n} m_z \bar{F}_k = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Это **условия равновесия произвольной системы сил** в координатной форме

*Для равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на три координатные оси и суммы их моментов относительно координатных осей были порознь равны нулю*

Координатные оси для первых трех уравнений (5.3) и последующих трех уравнений могут быть разными, т.к. $\bar{U}_O$ и $\bar{L}_O$ можно проецировать на разные оси.

***б*. Система сходящихся сил**. Если силы системы пересекаются в некоторой точке $O$, то $L_O \equiv 0$. Если же при этом $U_O = 0$, то

$$\bar{L}_{O1} = \bar{L}_O + \bar{m}_{O_1}\bar{U}_O \equiv 0,$$

т.е. уравнения моментов сил становятся бесполезными, т.к. они будут следствием первых трех уравнений.

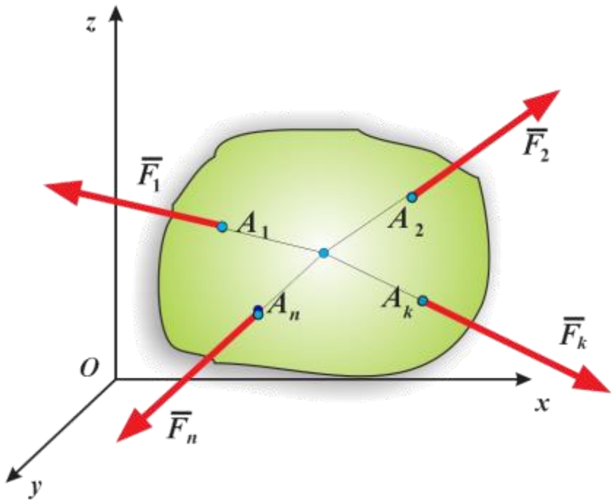



**Рис. 5.1**

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n^{\text{сход.}} \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz} = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

*Для равновесия сходящейся системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на три координатные оси равны нулю*

***в*. Система параллельных сил**. Пусть дана система параллельных сил. Направим ось $Oz$ параллельно этим силам. Нетрудно видеть, что 1-ое и 2-ое, а также 6-ое из уравнений (5.3) обращаются в тождества и становятся бесполезными.

Получаем:

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n^{\|Oz} \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} m_x \bar{F}_k = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} m_y \bar{F}_k = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

*Для равновесия системы параллельных сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил на координатную ось, параллельную силам, и суммы их моментов относительно координатных осей, перпендикулярных силам, были равны нулю.*

***г*. Плоская система сил**

***Первая форма условий равновесия***. Располагая оси $xOy$ в плоскости действия сил, найдем, что 3-е, а также 4-ое и 5-ое из уравнений (5.3) обращаются в тождества. Кроме того, т.к. силы лежат в плоскости $xOy$, то по определению

$$m_z \bar{F} = \tilde{m}_O \bar{F} .$$

в результате получим,

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n^{\text{плоск}} \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{m}_C\,\bar{F}_k = 0 \quad \forall C. \end{cases}$$

Здесь учтено, что начало координат можно брать в любой точке плоскости

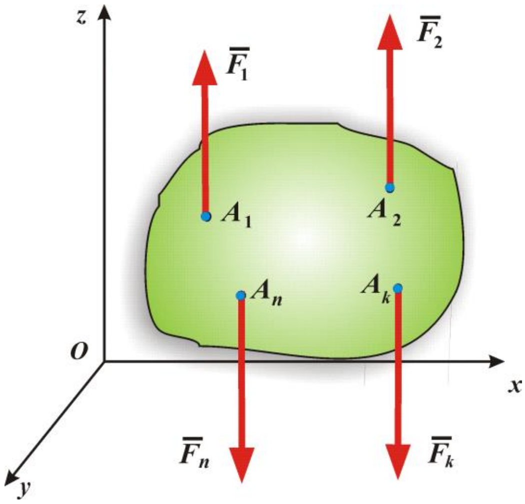



**Рис. 5.2**

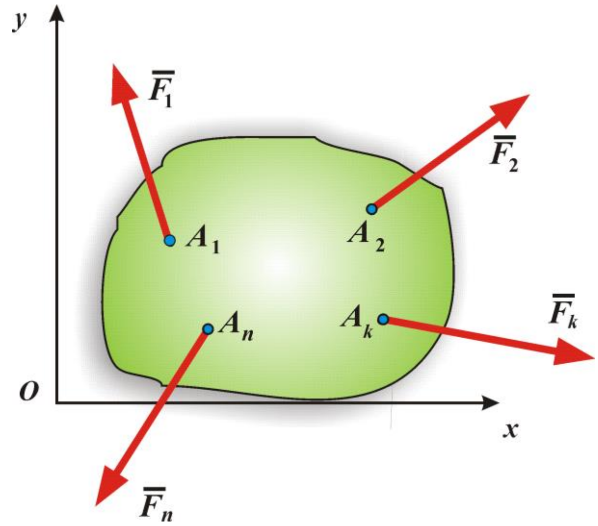



**Рис. 5.3**

*Для равновесия плоской произвольной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на координатные оси и суммы их моментов относительно произвольной точки на плоскости равны нулю.*

***Вторая форма условий равновесия***

*Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов сил относительно двух центров $C$ и $B$ и сумма их проекций на ось не перпендикулярную $CB$ были равны нулю.*

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n^{\text{плоск}} \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{m}_B\,\bar{F}_k = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{m}_C\,\bar{F}_k = 0 \quad BC\,\text{не} \perp Ox. \end{cases} \tag{5.7}$$

***Третья форма условий равновесия***

*Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов сил относительно трех центров не лежащих на одной прямой были равны нулю.*

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n^{\text{плоск}} \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{m}_A\,\bar{F}_k = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{m}_B\,\bar{F}_k = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{m}_C\,\bar{F}_k = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Точки $A, B, C$ не лежат на одной прямой.

***д.* Плоская система параллельных сил** (рис.5.4)

Из зависимостей (5.5) и (5.6) получим:

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n^{\text{плоск}\|Oy} \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{m}_C\,\bar{F}_k = 0 \quad \forall C. \end{cases} \tag{5.9}$$

*е.* **Плоская система сходящихся сил** (рис.5.5)

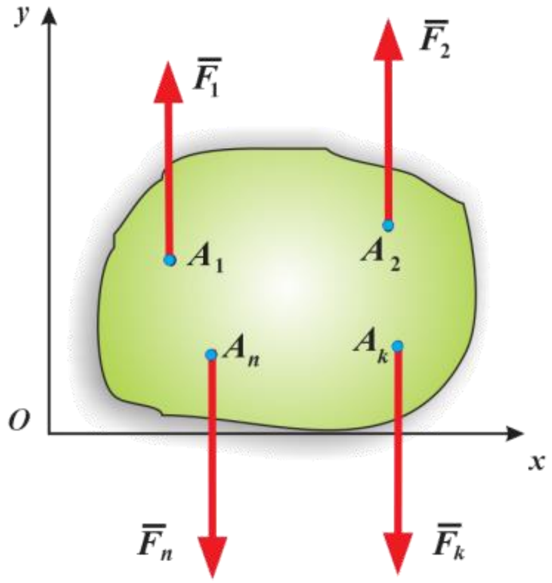



**Рис. 5.4**

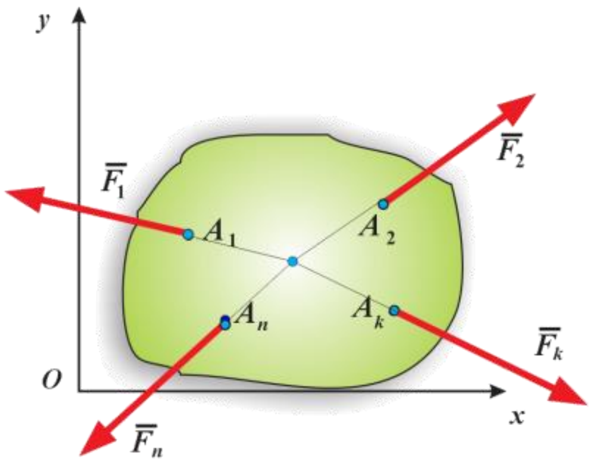



**Рис. 5.5**

Условия равновесия следуют из зависимостей (5.5) и (5.7)

$$\left\{\overline{F}_k\right\}_n^{\text{плоск. сход.}} \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

*ж.* **Условия равновесия системы пар сил**

Условие равновесия системы пар $\{\overline{P}_k, \overline{Q}_k\}_n$ в векторной форме запишутся в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_k = 0, \tag{5.11}$$

где $\{\overline{m}_k\}_n$ – моменты этих пар.

Проецируя (5.11) на координатные оси, получим:

$$\left\{\bar{P}_k,\bar{Q}_k\right\}_n \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \tilde{m}_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} \tilde{m}_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} \tilde{m}_{kz} = 0. \end{cases} \qquad (5.12)$$

для пространственной системы пар сил и

$$\left\{\bar{P}_k,\bar{Q}_k\right\}_n \sim 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \tilde{m}_k = 0. \qquad (5.13)$$

для плоской системы пар сил.

## СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМЫ РАВНОВЕСИЯ

### 1. ТЕОРЕМА о равновесии двух сил

*Для равновесия двух сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы они были равны по модулю и направлены по одной прямой в разные стороны.*

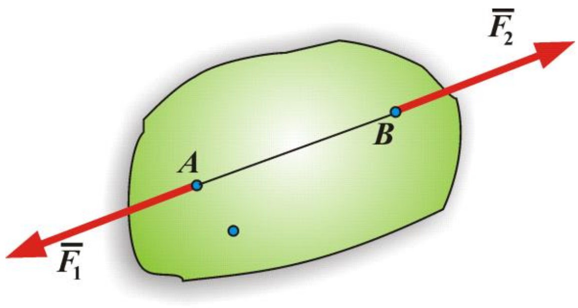



**Рис. 5.6**

$$\left(\bar{F}_1,\bar{F}_2\right) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{F}_1 = -\bar{F}_2; \\ l_{F1} \in l_{F2}. \end{cases}$$

$$\left(\bar{F}_1,\bar{F}_2\right) \sim 0 \Leftrightarrow \bar{F}_2 = -\bar{F}_1;\;\; \bar{F}_1,\bar{F}_2 \in AB. \qquad (5.14)$$

( $\bar{F}_1,\bar{F}_2 \in AB$ – векторы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ расположены на прямой $AB$ ).

**Доказательство.** Если $\overline{F}_2 = -\overline{F}_1$ и $\overline{F}_1, \overline{F}_2 \in AB$, то для этих двух сил выполняется условие равновесия (1.2):из векторных условий равновесия сил системы пары не войдут, поскольку $\overline{P} + \overline{Q} = 0$. Во второе же из них пара сил войдет своим моментом, так как два

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = 0; \; m_O\overline{F}_1 + m_O\overline{F}_2 = 0. \qquad (5.15)$$

Отсюда следует, что $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right) \sim 0$.

Покажем теперь необходимость условий (5.14) для равновесия двух сил. Пусть две силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, приложенные к телу, уравновешиваются. Значит, для этих сил выполняются равенства (5.15). Принимая за центр $O$ любую точку на линии действия силы $\overline{F}_1$, получим $m_O\overline{F}_2 = 0,$откуда следует, что линий действия сил $\overline{F}_1$и$\overline{F}_2$ совпадают $\overline{F}_1, \overline{F}_2 \in AB$.

Добавляя к этому первое из равенств (5.15), убеждаемся, что две уравновешенные силы действуют по прямой в противоположные стороны и равны по модулю.

***Например***, прямолинейный стержень весом, которого можно пренебречь, будет находится в равновесии под действием двух сил, если они направлены вдоль стержня в противоположные стороны и имеют равные модули. Это означает, что прямолинейный стержень, нагруженный силами на концах, работает только на сжатие или растяжение. Когда в равновесии под действием двух сил находится невесомый криволинейный стержень, то эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей точки приложения сил.

### 2. ТЕОРЕМА о равновесии трех непараллельных сил

*Если три непараллельные силы, приложенные к свободному твердому телу, уравновешены, то они лежат в одной плоскости и линии их действия пересекаются в одной точке.*

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right) \sim 0 \Rightarrow \left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right) \in \Pi \text{ и } \exists K \in \left(l_{F_1}, l_{F_2}, l_{F_3}\right).$$

**Доказательство**

Пусть $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right) \sim 0$.

Следовательно, выполняются равенства:

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = 0; \; m_O\overline{F}_1 + m_O\overline{F}_2 + m_O\overline{F}_3 = 0. \qquad (5.15)$$

Второе из этих равенств выполняется для любой точки пространства. Если силы $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$ не параллельны, то принимая за центр $O$ точку на линии $l_{F_1}$ действия силы $\overline{F}_1$, получим

$$m_k \overline{F}_1 = O,$$

т.е. линии действия первой силы также проходят через точку K.

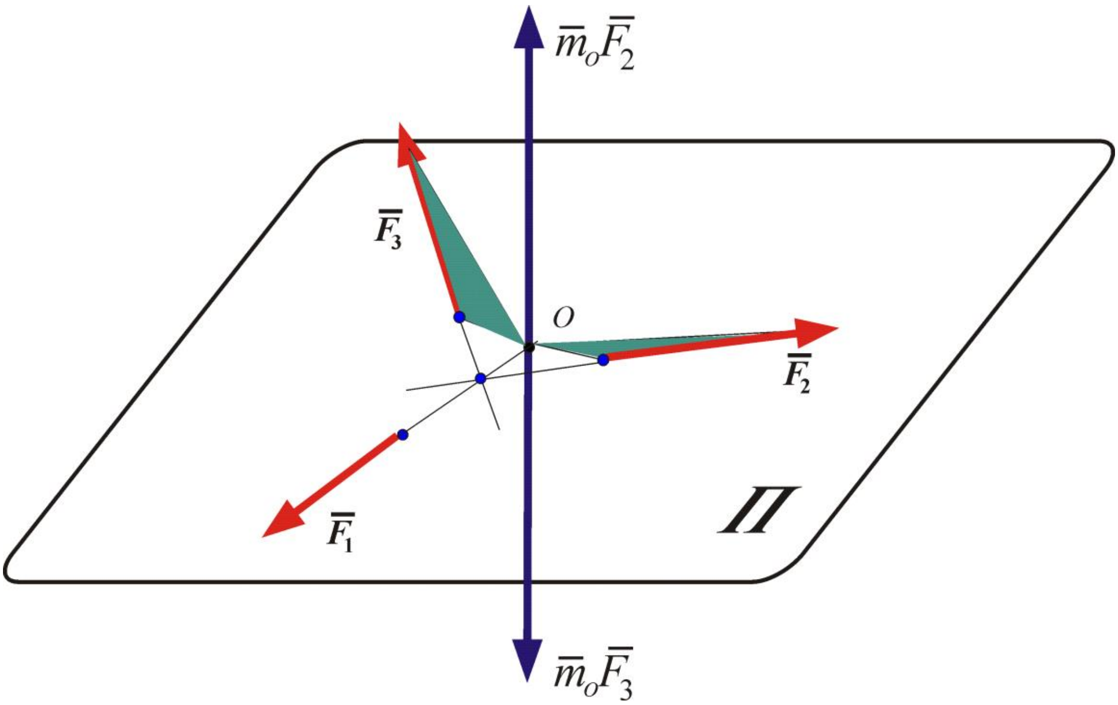



**Рис. 5.7**

Таким образом, линии действия трёх уравновешенных непараллельных сил пересекаются в одной точке. Отсюда следует, что векторы сил обязательно расположены в одной плоскости, так как сумма их равна нулю.

Следует помнить, что доказано необходимое условие равновесия трёх сил. Обратная же теорема не верна, т.е. если линии действия трёх сил пересекаются в одной точке, то они могут не уравновешиваться.

# 6. ЗАКОН РАВЕНСТВА ДЕЙСТВИЯ И ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

Вторая аксиома статики – закон равенства действия и противодействия

Применяется эта аксиома при изучении равновесия систем, состоящих из нескольких соединённых между собой тел. Такими системами являются различные конструкции и машины. С помощью аксиомы о равенстве действия и противодействия решение задачи о равновесии сочленённой системы тел удаётся свести к изучению равновесия отдельных тел, составляющих систему. Расчленяя конструкцию или машину на составные элементы и используя условия равновесия сил, приложенных к отдельному тел, можно найти силы взаимодействия между элементами и давление сооружения на опоры, которыми оно прикреплено к основанию.

Пусть на тело $A$ действует сила $\overline{F}$, источником которой является тело $B$. Не бывает одностороннего действия силы: если тело $B$ действует на тело $A$ с силой $\overline{F}$, то тело $A$, в свою очередь, также действует на тело $B$ с некоторой силой $\overline{F}_1$.

Это взаимодействие между материальными телами регулируется законом равенства действия и противодействия: ***силы взаимодействия между материальными телами одинаковы по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны:***

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}; \ \ \overline{F}, \overline{F}_1 \in AB.$$

Если одну из сил взаимодействия назвать действием, а другую – противодействием, то закон равенства действия и противодействия можно сформулировать короче: всякому действию соответствует равное по величине и противоположно направленное противодействие.

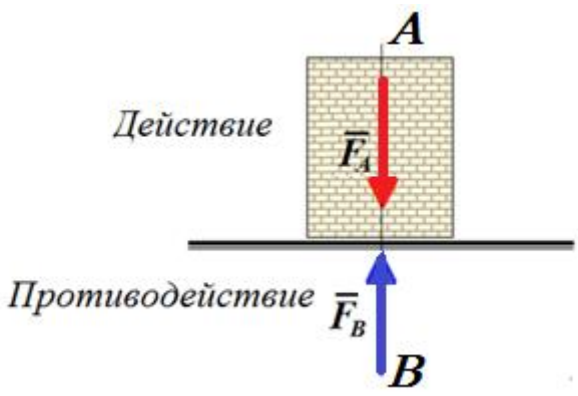



**Рис. 6.1**

Силы взаимодействия между телами не могут уравновешиваться, так как приложены они к разным телам. Только о силах, приложенных к одному телу, можно говорить, уравновешенные они или нет.

***Следствие***. Силы взаимодействия между частицами твёрдого тела уравновешиваются.

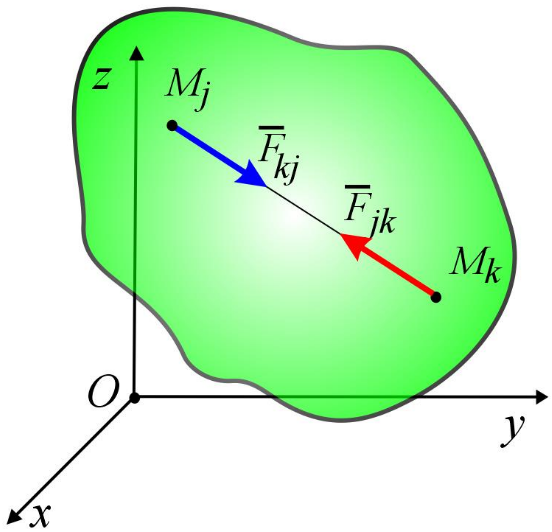



**Рис. 6.2**

Действительно, каждые две из сил взаимодействия между частицами тела равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны:

$$\overline{F}_{kj} = -\overline{F}_{jk} \, ,$$

где $\overline{F}_{kj}$ – сила действия *k*-й частицы на *j*-ю;

$F_{jk}$ – сила действия *j*-й частицы на *k*-ю.

Следовательно, главные вектор и момент сил взаимодействия относительно центра равны нулю. Значит, эти силы на твёрдом теле уравновешиваются.

# *7. АКСИОМЫ ОСВОБОЖДЕНИЯ СВЯЗЕЙ И ЗАТВЕРДЕВАНИЯ*

## *Свободные и несвободные Материальные объекты. Связи*

Материальные объекты в пространстве тела отсчета называются **свободными**, если на их положение не наложены никакие ограничения. В противном случае материальные объекты называется **несвободным**.

**Связями** называют ограничения, наложенные на положение и движение материальные объекты в пространстве. ***Связями*** *также называются и тела, осуществляющие эти ограничения*.

Для механических систем связи делят на связи **внешние** и **внутренние**. Внешними связями являются тела и точки, не входящие в состав механической системы, с которыми она взаимодействует. Внутренними связями являются тела и точки самой системы.

В основе классификации геометрических связей лежит число парциальных движений (степеней свободы), отнимаемых связью у несвободного материального объекта – число запрещенных движений.

Под **реакцией связи** будем понимать совокупность сил и пар, с которыми связь действует на несвободный МО, препятствуя его парциальным движениям, запрещенным связью. Эти силы и пары сил назовем **составляющими реакции**.

Составляющей, соответствующей запрещенному поступательному перемещению тела по какому-либо направлению, является сила, а запрещенному повороту вокруг какой-либо оси – пара сил. Составляющие реакции направлены в стороны, противоположные запрещенным связью парциальным перемещениям МО. Так как парциальные движения, запрещенные связью, предполагаются известными, то неизвестны только модули составляющих реакции.

***Связи в геометрической статике можно разделить на три вида.***

**Связи первого вида** *запрещают поступательное (без поворота) движение тела только по одному направлению. Реакция состоит из одной силы, линия действия которой известна по направлению. Механическими моделями связей первого вида являются:*

***Гладкие поверхности**, **линии**, **точечные опоры**. Реакция направлена по нормали к опорной или опирающейся поверхности.*


**Рис. 7.1**

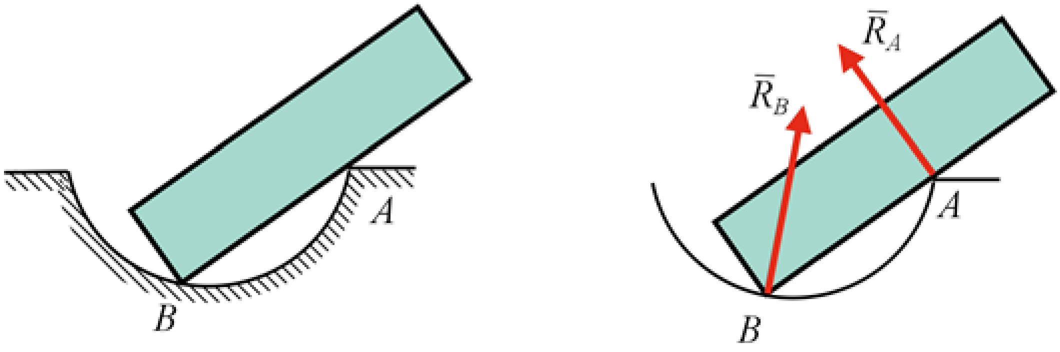



**Рис. 7.2**

*Ненагруженные по длине силами, шарнирно закрепленные по концам стержни (**идеальные стержни**). Реакция направлена по линии, соединяющей центры шарниров.*

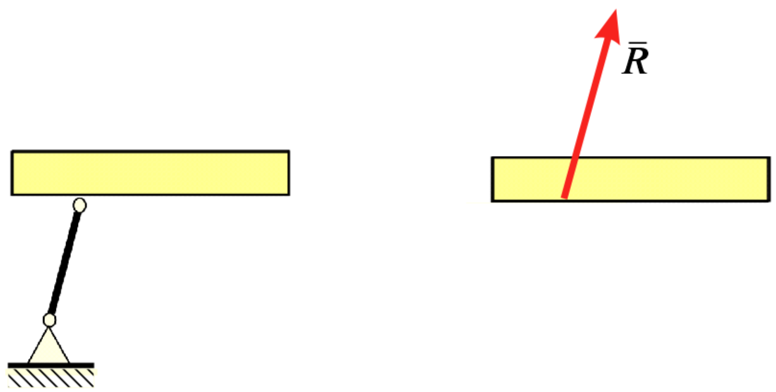



**Рис. 7.3**

***Гибкие связи** (нить, трос, цепь, ремень и т.д.). Реакция направлена по связи к отброшенному телу.*

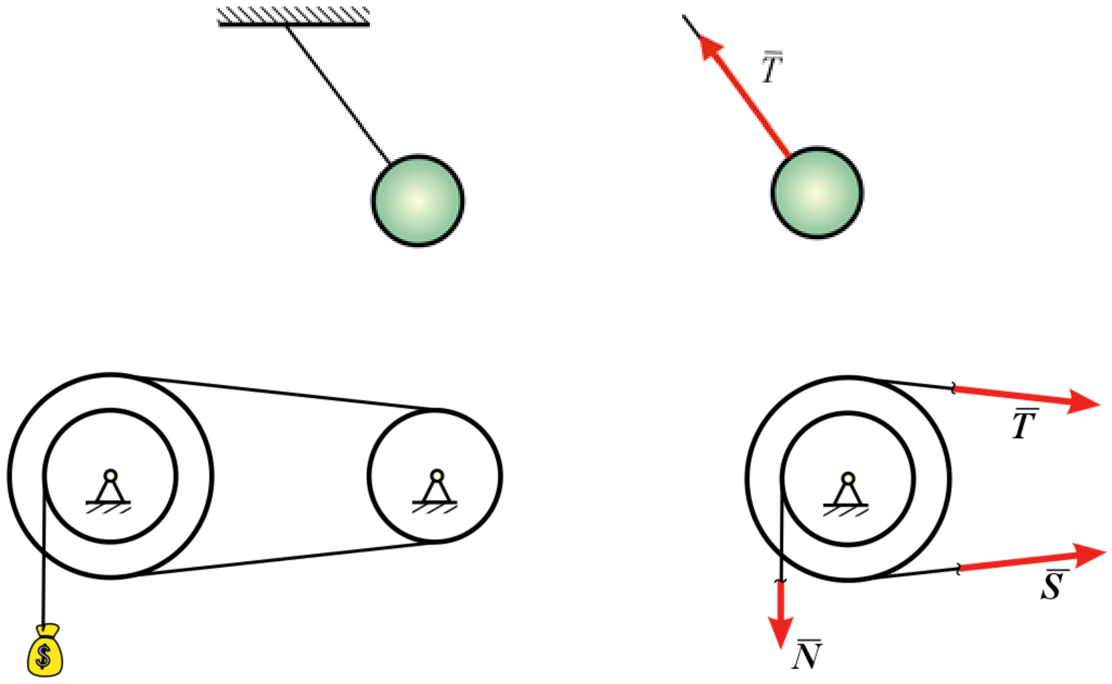



**Рис. 7.4**

**Подвижная шарнирная опора** (каток). Реакция направлена по нормали к опорной поверхности катка.

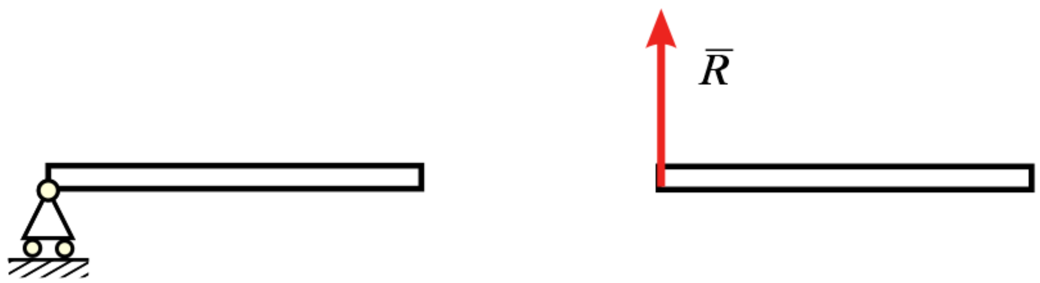



**Рис. 7.5**

**Связи второго вида** запрещают поступательное движение АТТ по любому направлению (два на плоскости и три в пространстве).

Механическими моделями связей второго вида являются **неподвижные цилиндрические**, **сферические** (шаровые) **шарниры**. Реакции связей показываются взаимно перпендикулярными составляющими неизвестных сил двумя на плоскости $\overline{R}_A \sim \left(\overline{X}_A, \overline{Y}_A\right)$ и тремя в пространстве $\overline{R}_A \sim \left(\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A\right)$.

***Неподвижный цилиндрический (плоский) шарнир.***

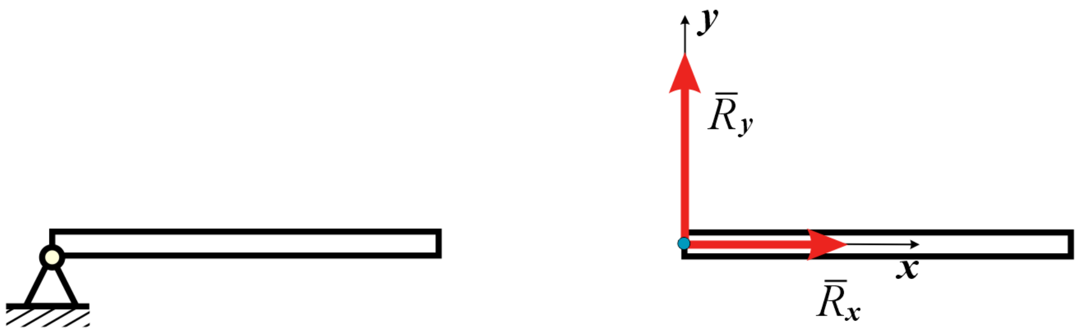



**Рис. 7.6**

***Неподвижный сферический (шаровой) шарнир***

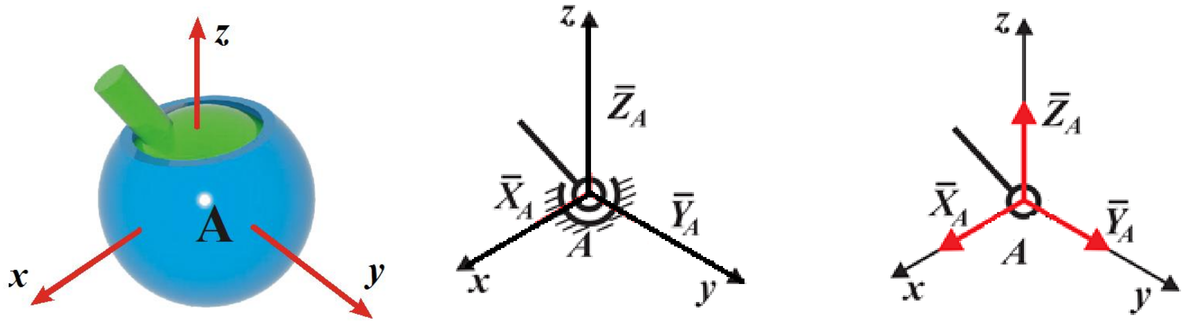



**Рис. 7.7**

**Третий вид связей** *составляют* ***заделки (защемления)*** *одного тела в* другое (например, в основание). Эти связи препятствуют не только поступательному движению тела, но и повороту его. Реакция пространственной заделки (рис. 7.9) показывается шестью составляющими – тремя составляющими силы $\bar{R}_A \sim \left(\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z\right)$ и тремя составляющими пары сил $\bar{m}_A \sim \left(\bar{m}_x, \bar{m}_y, \bar{m}_z\right)$.

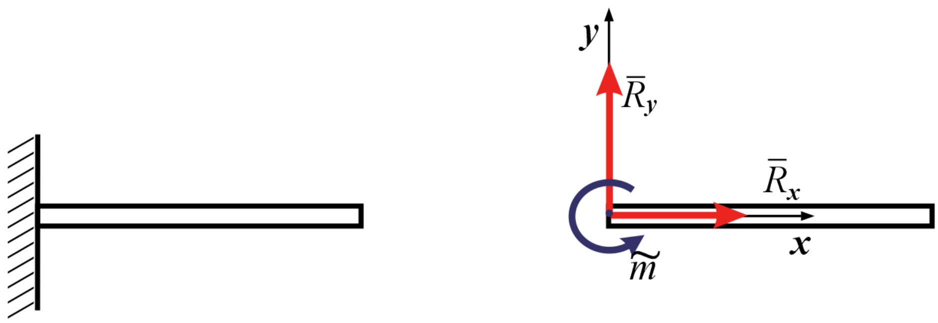



**Рис. 7.8**

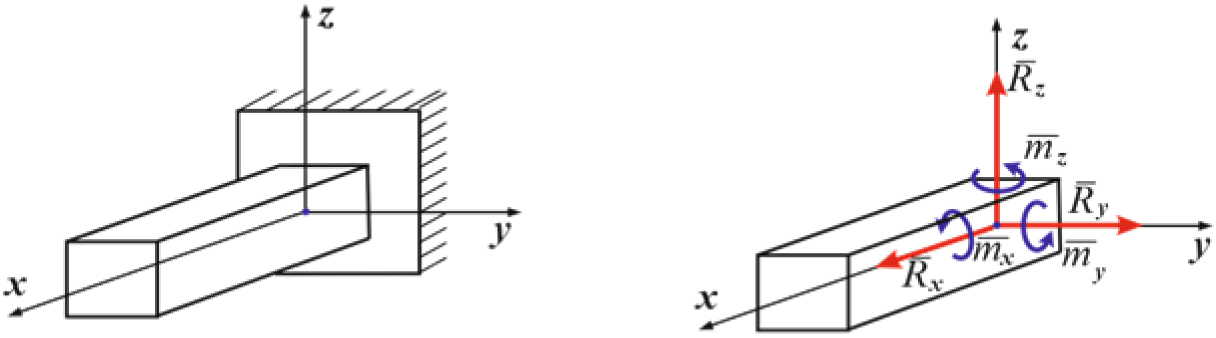



**Рис. 7.9**

### *Аксиома 3 – аксиома освобождения связей*

**Равновесие несвободного тела не нарушается, если его сделать свободным, заменить связи реакциями связей.**

Силы, действующие на освобождённое от связей несвободное тело, принято делить на активные или заданные и реакций связей.

Активными называются силы, под действием которых начнёт двигаться тело из состояния покоя, если удалит связи. Модуль и направление активной силы не зависят от других сил, приложенных к телу.

Особенностью реакций связей являются очевидная зависимость их от приложенных к несвободному телу активных сил, В этом смысле реакции связей называют пассивными силами.

### *Аксиома 4 – аксиома затвердевания*

Равновесие деформируемого тела не нарушится при его затвердевании. Утверждение аксиомы очевидно: например, равновесие троса, натянутого между двумя столбами, не нарушится, если представить его затвердевшим.

С другой стороны, в этой аксиоме содержится мысль о том, что взаимодействие деформируемого тела с другими телами не изменится при его затвердевании. Этим оправдывается применение принципа затвердевания к нахождению сил взаимодействия между деформируемым телом и другими телами.

Из аксиомы затвердевания следует, что условия равновесия сил, приложенных к твёрдому телу, выполняются и для сил, уравновешенных на деформируемом теле. Они необходимы, но недостаточны для того, чтобы деформируемое тело находилось в равновесии. Силы, уравновешенные на деформируемом теле, обязательно уравновешиваются и на твёрдом теле. Обратное утверждение верно только иногда. Пружина, нагруженная на концах двумя силами, которые уравновешиваются на жёстком стержне, начнёт двигаться. При дополнительном ограничении, когда силы растягивающие, они будут уравновешиваться на таком деформируемом теле, как нерастяжимая нить.

В статике твёрдого тела аксиома затвердевания используется при решении задач на равновесие конструкции, одни части которых могут перемещаться относительно других.

# 8. ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Рассмотрим действие на твёрдое тело двух систем сил $\{\bar{F}_k\}_n$ и $\{\bar{Q}_k\}_m$. Их главные векторы и главные моменты относительно центра:

$$\bar{U}_O(F)=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k;\quad \bar{L}_O(F)=\sum_{k=1}^{n}\bar{m}_O\bar{F}_k;$$

$$\bar{U}_O(Q)=\sum_{k=1}^{n}\bar{Q}_k;\quad \bar{L}_O(Q)=\sum_{k=1}^{n}\bar{m}_O\bar{Q}_k.$$

*Эквивалентными мы назвали такие системы сил, действие которых на тело одинаково в том смысле, что каждая из них уравновешивается одними и теми же силами*

$$\{\bar{F}_k\}_n\sim\{\bar{Q}_k\}_m \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\{\bar{F}_k\}_n,\{\bar{S}_k\}_r\right)\sim 0,\\ \left(\{\bar{Q}_k\}_m,\{\bar{S}_k\}_r\right)\sim 0.\end{cases} \tag{8.1}$$

Условия, при выполнении которых действие двух систем сил на тело одинаково, устанавливаются теоремой эквивалентности.

Все результаты статики твёрдого тела получаются на основе теоремы эквивалентности. В частности, условия эквивалентности, сформулированные в теореме, используются для решения второй из основных задач статики, поэтому теорему эквивалентности надо считать основной теоремой статики твёрдого тела.

**Теорема.** *Для эквивалентности двух систем сил необходимо и достаточно, чтобы их главные векторы и главные моменты относительно какого-либо центра были одинаковы:*

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n \sim \left\{\bar{Q}_k\right\}_m \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{U}_O(F) = \bar{U}_O(Q), \\ \bar{L}_O(F) = \bar{L}_O(Q). \end{cases} \tag{8.2}$$

**Доказательство.** Докажем сначала необходимость условий теоремы. Для эквивалентных систем сил $\left\{\bar{F}_k\right\}_n$ и $\left\{\bar{Q}_k\right\}_m$ выполнены условия (8.1), т.е. две системы сил, состоящие одна из сил $\left\{\bar{F}_k\right\}_n$ и $\left\{\bar{S}_k\right\}_r$, а другая из сил $\left\{\bar{Q}_k\right\}_m$ и $\left\{\bar{S}_k\right\}_r$, уравновешиваются. Составим условия равновесия этих систем сил:

$$\begin{aligned} &\bar{U}_O(F) + \bar{U}_O(S) = 0; \quad \bar{U}_O(Q) + \bar{U}_O(S) = 0; \\ &\bar{L}_O(F) + \bar{L}_O(S) = 0; \quad \bar{L}_O(Q) + \bar{L}_O(S) = 0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Отсюда находим:

$$\bar{U}_O(F) = \bar{U}_O(Q), \quad \bar{L}_O(F) = \bar{L}_O(Q), \tag{8.4}$$

т.е. главные векторы и главные моменты эквивалентных систем сил относительно центра $O$ одинаковы.

Положим теперь, что выполнены условия (8.4). Тогда при выполнении одной группы равенств (8.3) будут выполняться, и равенства второй группы. Но равенства (8.3) – достаточные условия для равновесия систем сил

$$\left(\left\{\bar{F}_k\right\}_n, \left\{\bar{S}_k\right\}_r\right) \quad \text{и} \quad \left(\left\{\bar{Q}_k\right\}_m, \left\{\bar{S}_k\right\}_r\right).$$

Значит, при выполнении условий (8.4) силы $\left\{\bar{F}_k\right\}_n$ и $\left\{\bar{Q}_k\right\}_m$ уравновешиваются одной и той же системой сил $\left\{\bar{S}_k\right\}_r$. Поэтому эти две системы сил эквивалентны:

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n \sim \left\{\bar{Q}_k\right\}_m.$$

Следовательно, условия теоремы достаточны для эквивалентности двух систем сил. Таким образом, если две системы сил имеют равные векторы и главные моменты относительно центра, то их действие на тело одинаково: каждая из них уравновешивается одной и той же третьей системой сил.

Следует иметь в виду, что если главные векторы и главные моменты двух систем сил совпадают для одного центра, то они будут одинаковыми для любого центра. Это утверждение очевидно для главных векторов, так как они одинаковы для любого центра. Справедливость его для главных моментов следует из формулы, связывающей значения главных моментов сил системы относительно двух центров.

## *9. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ*

Из теоремы эквивалентности следует, что если какими-либо операциями над векторами сил заданная система преобразуется в другую с сохранением главного вектора и главного момента относительно векторного центра, то действие этой другой системы сил остаётся тем же, каким было действе первоначальной системы. Следовательно, действие любой системы сил на твёрдое тело определяется знанием её главных вектора и момента относительно центра. Тем самым оправдывается введённое ранее название этих величин статическими характеристиками действия сил на тело.

Сформулируем теперь некоторые результаты, которые являются очевидными следствиями теоремы эквивалентности.

### *Сила – вектор скользящий*

Если перенести точки приложения сил по их линиям действия, то главные вектор и момент сил системы не изменяются. Отсюда следует: действие сил на твёрдое тело не изменится, если точки приложения их перенести по линиям действия.

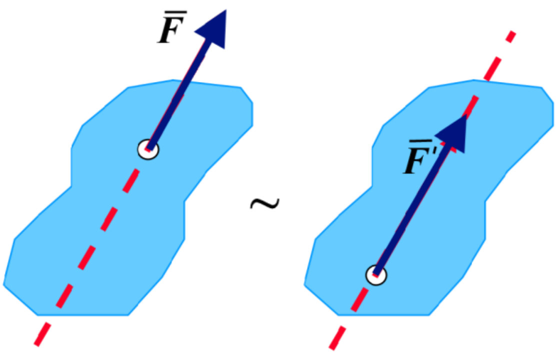
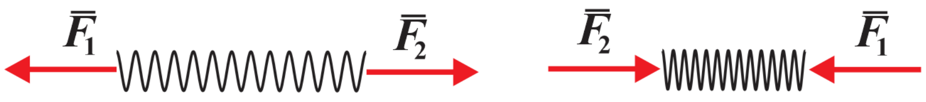



**Рис. 9.1**

За точку приложения силы, действующей на твёрдое тело, можно принимать любую точку на её линии действия. Это означает, что действие силы на твёрдое тело определяется знанием модуля, направления и линии действия вектора силы. Такие векторы называются скользящими.

В частности, сходящиеся силы эквивалентны системе тех же сил, приложенных в одной точке.

Переносить силу вдоль линии действия допустимо лишь для абсолютно твёрдых тел. Для деформируемых тел этого делать нельзя.




**Пружина растянута** **Пружина сжата**

**Fig. 9.2**

### *Сходящиеся силы имеют равнодействующую*

**Теорема**. Действие нескольких сходящихся в одной точке сил можно заменить действием одной силы – равнодействующей, приложенной в точке схода и равной векторной сумме этих сил:

$$\{\overline{F}_k\}_n \sim \overline{R}, \qquad \overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k. \tag{9.1}$$

**Доказательство.** Силы $\{\overline{F}_k\}_n$ и сила $\overline{R}$, определённая последним равенством, – две системы сил, удовлетворяющие условиям теоремы эквивалентности. Это видно из таблицы 1, где указаны главные векторы и главные моменты сравниваемых систем сил относительно центра $A$.

**Таблица 1**

| **Статические характеристики** | **Сравниваемые системы сил** | |
|---|---|---|
| | $\{\overline{F}_k\}_n$ | $\overline{R}$ |
| $\overline{U}_A$ | $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ | $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ |
| $\overline{L}_A$ | 0 | 0 |

Нахождение равнодействующей называется сложением сил. Из равенства (9.1) следует, что силы складываются по правилу сложение векторов. Геометрически равнодействующая сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника.

### *Разложение сил на составляющие*

*Если несколько сил, сходящихся в одной точке, заменяются равнодействующей, то одну силу можно заменить несколькими, которые называются составляющими этой силы. Сила, которая раскладывается на составляющие, является их равнодействующей. Поэтому векторная сумма составляющих должна быть равна этой силе.*

При решении задач на равновесие несвободного тела векторы реакций, неизвестные по направлению, принято показывать на рисунках двумя или тремя их составляющими. Теперь стало ясно, что эти составляющие являются составляющими реакции по двум или трём направлениям.

### *Теорема Вариньона о моменте равнодействующей*

Пусть система сил $\{\overline{F}_k\}_n$ имеет равнодействующую $\overline{R}$. Из эквивалентности системы сил $\{\overline{F}_k\}_n$ одной силе $\overline{R}$ следует, что две системы сил $\{\overline{F}_k\}_n$ и $\overline{R}$ имеют главные одинаковые векторы и моменты относительно центра $O$:

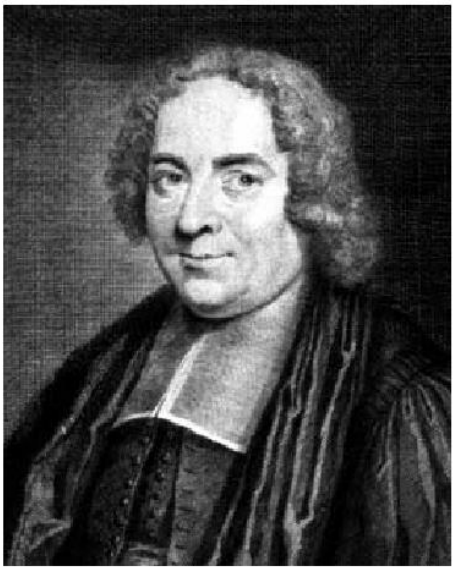
$$\begin{aligned} \overline{U}_O(R) = \overline{U}_O(F) \quad &\Rightarrow \quad \overline{R} = \sum \overline{F}_k, \\ \overline{L}_O(R) = \overline{L}_O(F) \quad &\Rightarrow \quad \overline{m}_O\overline{R} = \sum \overline{m}_O\overline{F}_k. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Проецируя последнее из этих равенств, например, на ось $Ox$, проходящую через центр $O$, получим

$$m_x\overline{R} = \sum m_x\overline{F}_k. \tag{9.3}$$

Тем самым доказана **теорема**: *момент равнодействующей сил $\{\overline{F}_k\}_n$ относительно центра или оси равен сумме моментов этих сил относительно того же центра или той же оси.*

Теорема Вариньона оказывается полезной при решении задач. Часто момент милы относительно оси проще найти через моменты её составляющих вдоль координатных осей. Из первого равенства (9.2) следует: когда система сил имеет равнодействующую, то она обязательно равна векторной сумме сил системы.



**Pierre Varignon (1654 – 1722)**

***Добавление уравновешенной системы сил не изменяет действия сил на твёрдое тело***

**Действие системы сил на тело не изменяется, если к ней добавить или отнять уравновешенную систему**

$\left(\left\{\bar{F}_k\right\}_n \pm \left\{\bar{S}_k\right\}_r\right) \sim \left\{\bar{F}_k\right\}_n$, если $\left\{\bar{S}_k\right\}_r \sim 0$. Выполнение условий теоремы эквивалентности для двух систем сил $\left(\left\{\bar{F}_k\right\}_n \pm \left\{\bar{S}_k\right\}_r\right)$ и $\left\{\bar{F}_k\right\}_n$ показано в таблице 2.

**Таблица 2**

| **Статические характеристики** | **Сравниваемые системы сил** | |
|---|---|---|
| | $\left(\left\{\bar{F}_k\right\}_n \pm \left\{\bar{S}_k\right\}_r\right)$ | $\left\{\bar{F}_k\right\}_n$ |
| $\bar{U}_A$ | $\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$ | $\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$ |
| $\bar{L}_A$ | $\sum_{k=1}^{n} \bar{m}_o \bar{F}_k$ | $\sum_{k=1}^{n} \bar{m}_o \bar{F}_k$ |

В частности, при рассмотрении равновесия твёрдого тела следует учитывать только внешние силы, приложенные к телу, так как силы взаимодействия между частицами тела образуют уравновешенную систему сил.

# 10. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПАР СИЛ

***Для того, чтобы две пары были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их моменты были одинаковы:***

$$\left(\bar{P}_1,\bar{Q}_1\right)\sim\left(\bar{P}_2,\bar{Q}_2\right)\Leftrightarrow \bar{m}\left(\bar{P}_1,\bar{Q}_1\right)=\bar{m}\left(\bar{P}_2,\bar{Q}_2\right). \tag{10.1}$$

Это утверждение является следствием теоремы эквивалентности двух систем сил.

Из эквивалентности двух пар следует, что если какими-либо операциями над силами пары она преобразуется в другую с сохранением её момента, то действие пары на тело не изменится. Следовательно, действие пары на тело вполне определяется заданием только её момента. Таким образом, если указано, что на теле действует момент $\overline{m}$ , то, значит, имеется в виду действие пары сил с моментом $\overline{m}$ , расположенной в плоскости, перпендикулярной этому вектору. Отождествление пары сил с её моментом появляется также в выражении «пара $\overline{m}$ » вместо «пара с моментом $\overline{m}$ ».

**Момент пары, а значит, и её действие на тело не изменится, если:**

*а) пару перемещать в плоскости её действия;*

*б) перемещать параллельно плоскость пары*

*в) произвольно изменять силы и плечо пары, оставляя неизменным модуль её момента.*

Следует иметь в виду, что эти операции над парой сил не изменяют её действия на тело в смысле уравновешивания пары другими силами. Напряжённое и деформируемое состояние тела при этом, конечно, изменяются.

### *Сложение пар*

Пусть на твёрдое тело действует несколько пар $\left\{\overline{P}_k,\overline{Q}_k\right\}_n$.

Действие пар $\left\{\overline{P}_k,\overline{Q}_k\right\}_n$ на твёрдое тело можно заменить действием равнодействующей пары $\left(\overline{P},\overline{Q}\right)$, момент которой равен сумме моментов этих пар:

$$\left\{\bar{P}_k,\bar{Q}_k\right\}_n\sim\left(\bar{P},\bar{Q}\right),\quad \bar{m}\left(\bar{P},\bar{Q}\right)=\sum_{k=1}^{n}\bar{m}\left(\bar{P}_k,\bar{Q}_k\right). \tag{10.2}$$

Действительно, две системы сил: пары $\left\{\overline{P}_k,\overline{Q}_k\right\}_n$ и пара $\left(\overline{P},\overline{Q}\right)$ при условии (10.2) удовлетворяют условиям теоремы эквивалентности двух систем сил.

*Процесс нахождения равнодействующей пары называется сложением пар.*

### *Разложение пары на составляющие*

Действие одной пары на тело можно заменить действием нескольких пар, которые называются составляющими парами. Сумма моментов составляющих пар должна быть равна моменту пары, которую они заменяют.

Разложение пары на составляющие бывает часто полезным при установлении результата действие пары на тело. Пусть, например, на брус прямоугольного сечения, заделанный одним концом в стену, действует пара сил $\overline{m}$ , расположенная в косом сечении бруса.

Заменим эту пару тремя составляющими парами $\overline{m}_1, \overline{m}_2$ и $\overline{m}_3$, действующими в двух плоскостях симметрии бруса и в плоскости, перпендикулярной оси бруса (рис. 10.1).

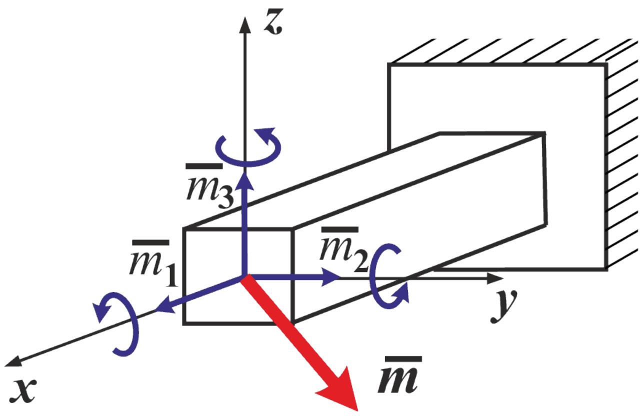



**Рис.10.1**

Теперь видно, что под действием пар $\overline{m}_1$ и $\overline{m}_2$ брус изгибается в горизонтальной и вертикальной плоскостях, а парой $\overline{m}_3$ брус закручивается около своей оси.

# *11. ПРИВЕДЕНИЕ НЕУРАВНОВЕШЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ЦЕНТРУ*

Решение задачи о замене заданной системе сил более простой и ей эквивалентной принято давать в форме, предложенной *Пуансо*.

Пусть к твёрдому телу в точках $\{A_k\}_n$ приложены силы $\{\overline{F}_k\}_n$ (рис. 11.1).

**Теорема.** *Любая неуравновешенная система сил, приложенных к твёрдому телу, может быть заменена результирующей силой* $\overline{R}_A$, *равной главному вектору системы и приложенной в произвольной точке тела, и результирующей парой,* *момент* $\overline{m}_A$ *которой равен главному моменту сил системы относительно точки приложения результирующей силы*

$$\{\overline{F}_k\}_n \sim (\overline{R}_A, \overline{m}_A),$$

$$\overline{R}_A = \overline{U}_A \Leftrightarrow \overline{R}_A = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k, \quad \overline{m}_A = \overline{L}_A \Rightarrow \overline{m}_A = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_A \overline{F}_k . \tag{11.1}$$

Эту теорему называют теоремой о приведении системы сил к центру. При этом точка $A$ приложения результирующей силы называется центром приведения.

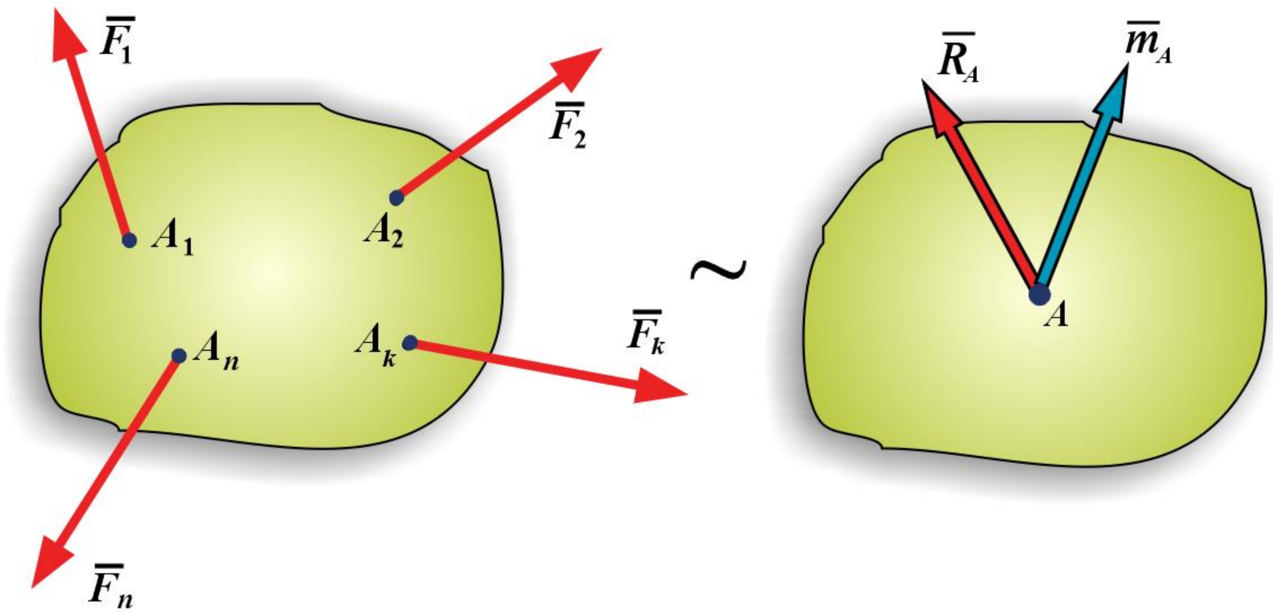



**Рис. 11.1**

**Доказательство.** Утверждение теоремы является следствием теоремы эквивалентности. Действительно, силы $\{\overline{F}_k\}_n$, приложенные к телу в точках $\{A_k\}_n$,и сила $\overline{R}_A$ вместе с парой $\overline{m}_A$ удовлетворяют условиям этой теоремы, так как главные векторы и главные моменты этих двух систем сил относительно центра $A$ одинаковы (табл. 3). Таким образом, любая система сил приведением к центру может быть заменена одной силой и одной парой, которые называются результирующими силой и парой.

**Таблица 3**

| Статические характеристики | Сравниваемые системы сил | |
|---|---|---|
| | $\{\overline{F}_k\}_n$ | $(\overline{R}_A, \overline{m}_A)$, |
| $\overline{U}_A$ | $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ | $\overline{R}_A$ |
| $\overline{L}_A$ | $\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_o \overline{F}_k$ | $\overline{m}_A$ |

Следует иметь в виду, что эти силу и пару нельзя назвать равнодействующими, так как они только вместе заменяют действие системы сил на тело. Результирующая сила становится равнодействующей, если $\overline{m}_A = 0$, т.е. когда она одна заменяет действие сил системы на тело. Совершенно так же пара $\overline{m}_A$ будет равнодействующей парой, если окажется, что $\overline{R}_A = 0$.

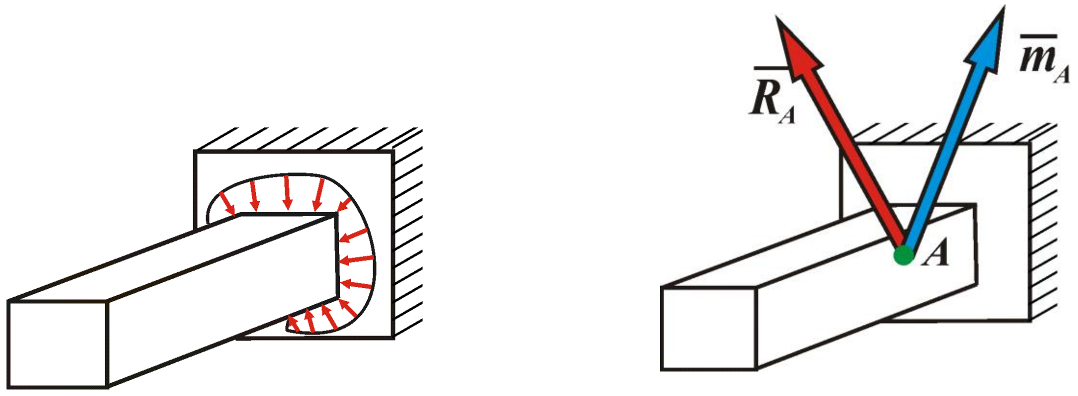
Проекции результирующей силы $\overline{R}_A$ и момента $\overline{m}_A$ результирующей пары на оси с началом в точке $A$ равны:

$$R_{Ax} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx};\ R_{Ay} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky};\ R_{Az} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}; \tag{11.2}$$

$$m_{Ax} = \sum_{k=1}^{n} m_x \overline{F}_k;\ m_{Ay} = \sum_{k=1}^{n} m_y \overline{F}_k;\ m_{Az} = \sum_{k=1}^{n} m_z \overline{F}_k. \tag{11.3}$$

Проекция результирующей силы на любую ось равна сумме проекций сил системы на эту ось. Проекция момента результирующей пары на ось, проходящую через точку приложения результирующей силы, равна сумме моментов сил системы относительно этой оси.

Воспользуемся теоремой о замене системы сил силой и парой для нахождения реакции стены на заделанную в неё балку (рис. 11.2 а). Пусть балка АВ, нагруженная силами $\{\overline{F}_k\}_n$ (они на рисунке не показаны), заделана концом в стену. На заделанный конец балки со стороны стены действует система сил реакций.




а б

**Рис. 11.2**

Приведя эти силы к точке $A$ на оси балки, заменим их результирующей силой $\overline{R}_A$ и результирующей парой $\overline{m}_A$ (рис. 11.2 б). Таким образом, реакция стены на заделанную балку состоит из силы и пары. Направления силы $\overline{R}_A$ и момента $\overline{m}_A$ пары реакции неизвестны. Заменим поэтому силу $\overline{R}_A$ тремя составляющими $\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z$ вдоль координатных осей, а пару $\overline{m}_A$ тремя парами, $\tilde{m}_x, \tilde{m}_y, \tilde{m}_z$, расположенными в координатных плоскостях. Следовательно, заделке соответствует шесть неизвестных реакций

$$(\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z, \tilde{m}_x, \tilde{m}_y, \tilde{m}_z).$$

Если силы $\{\overline{F}_k\}_n$, приложенные к балке, составляют плоскую систему сил, то сила $\overline{R}_A$ и пара $\overline{m}_A$ реакций стены будут находиться в плоскости этих сил.

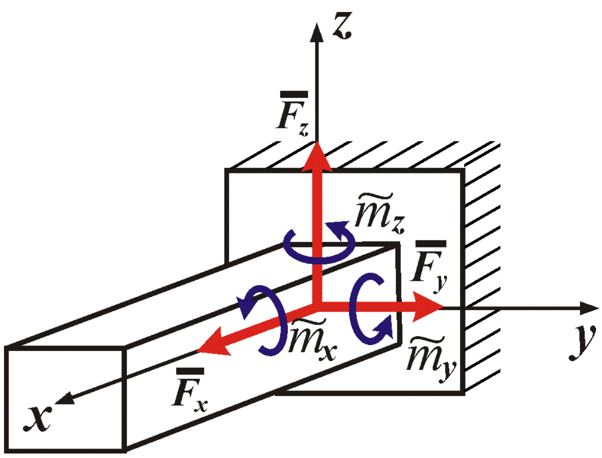



**Рис. 11.3**

**Louis Poinsot (1777–1859)**

# 12. ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА СИЛЫ

Применим теорему о приведении сил к центру для системы сил, состоящей из одной силы $\overline{F}$, приложенной к телу в точке $A$.

Главный вектор и главный момент этой системы сил относительно точки $B$, соответственно, запишутся:

$$\overline{U}_B = \overline{F}, \qquad \overline{L}_B = m_B\overline{F}. \tag{12.1}$$

**Теорема**. Действие силы $\overline{F}$, приложенной в точке $A$, можно заменить действием той же силы $\overline{F}' = \overline{F}$, приложенной в другой точке $B$ тела, и парой, момент которой равен моменту силы относительно новой точки её приложения (рис. 12.1):

$$\overline{F} \sim \left(\overline{F}', \overline{m}\right), \Leftrightarrow \overline{F}' = \overline{F}, \quad \overline{m} = \overline{m}_B\overline{F}. \tag{12.2}$$

Это утверждение следует рассматривать, как правило, параллельного переноса силы: действие силы на тело, перенесённой параллельно, не изменится, если добавить пару сил, момент которой равен моменту силы относительно её новой точки приложения.

Пару $\overline{m}$, которую надо добавлять, чтобы не изменилось действие силы на тело при параллельном переносе её, называют *присоединённой парой*. Сила и присоединённая пара расположена в одной плоскости.

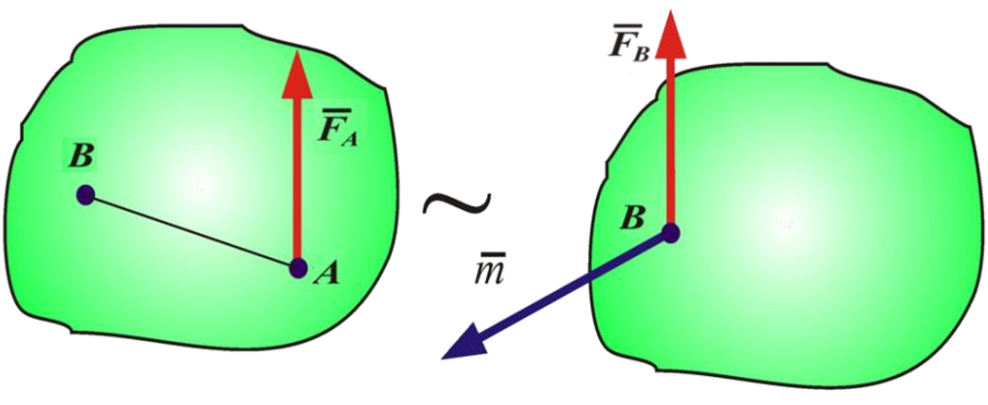



**Рис. 12.1**

**Теорема.** Действие на тело силы $\bar{F}$ и пары $\bar{m}$, расположенных в одной плоскости, можно заменить действием одной силы из этой совокупности, смещённой параллельно в их плоскости на расстояние

$$d = \frac{m}{F}. \qquad (12.3)$$

**Доказательство.** На основании свойства рефлексивности эквивалентных систем сил из (12.2) находим

$$\left(\bar{F}',\bar{m}\right) \sim \bar{F} = \bar{F}', \qquad (12.4)$$

где сила $\bar{F}'$ приложена в точке $B$, а сила $\bar{F}$ – в точке $A$ на расстоянии $d$ от линии действия силы $\bar{F}^{\backslash}$. Следовательно, добавление пары $\bar{m}$ к силе $\bar{F}'$ равносильно параллельному смещению силы по направлению вектора $\bar{F}' \times \bar{m}$ на расстояние $d$.

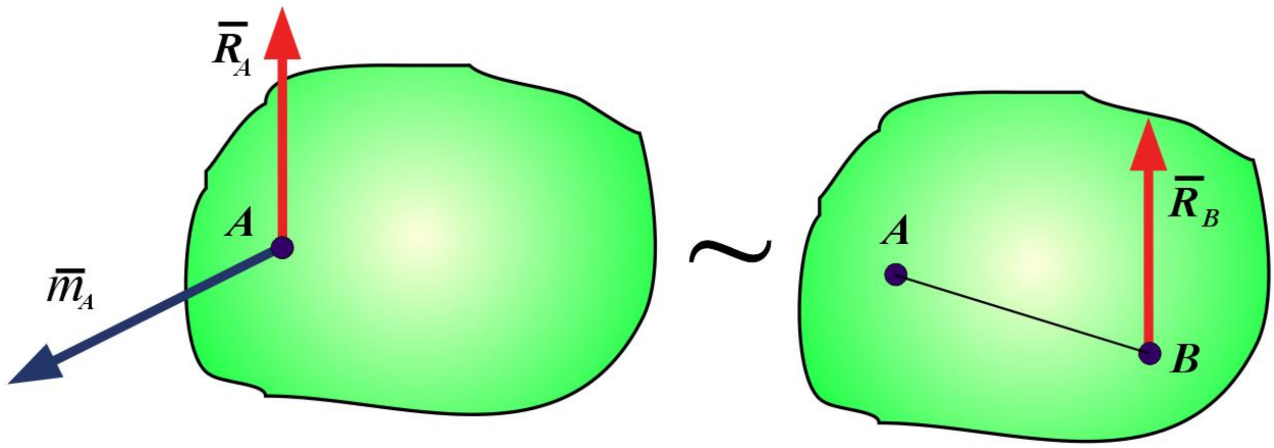



**Рис. 12.2**

В условии доказанной теоремы не обязательно требование компланарности силы и пары. Достаточно, чтобы момент $\bar{m}$ пары был перпендикулярен силе.

# *13. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ*

Пусть силы $\left\{\overline{F}_k\right\}_n$, приложенные к телу, после приведения к центру $A$ заменены результирующими силой $\overline{R}_A$ и парой $\overline{m}_A$:

$$\left\{\overline{F}_k\right\}_n \sim \left(\overline{R}_A, \overline{m}_A\right), \Rightarrow \overline{R}_A = \overline{U}_A = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k\,,\ \overline{m}_A = \overline{L}_A = \sum_{k=1}^{n} m_A \overline{F}_k\,. \quad (13.1)$$

***Возможны частные случаи***

1.
$$\overline{L}_A = \sum_{k=1}^{n} m_A \overline{F}_k = 0. \quad (13.2)$$

Из теоремы о приведении сил к центру следует, что система сил после приведения к центру $A$ окажется заменённой одной силой $\overline{R}_A$ – равнодействующей, приложенной в точке $A$ и равной сумме сил системы:

$$\left\{\overline{F}_k\right\} \sim \overline{R}_A = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k\,.$$

2.
$$\overline{U}_A = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0. \quad (13.3)$$

Такая система сил, заменяется одной парой $\overline{m}_A$ – равнодействующей парой:

$$\left\{\overline{F}_k\right\}_n \sim \overline{m}_A\,.$$

Момент равнодействующей пары равен сумме моментов сил системы относительно какого-либо центра:

$$\overline{m}_A = \sum_{k=1}^{n} m_o \overline{F}_k$$

Таким образом, если сумма векторов сил системы равна нулю, то система сил заменяется одной и той же парой при приведении её к любому центру.

3. Главный вектор $\overline{U}_A$ и главный момент $\overline{L}_A$ сил $\{\overline{F}_k\}_n$ относительно центра $A$ перпендикулярны

$$\overline{L}_A \perp \overline{U}_A \qquad \left(\varphi_A = \frac{\pi}{2}\right). \tag{13.4}$$

Эта система сил в результате приведения к центру $A$ будет заменена результирующей силой $\overline{R}_A$ и результирующей парой $\overline{m}_A$, расположенными в одной плоскости:

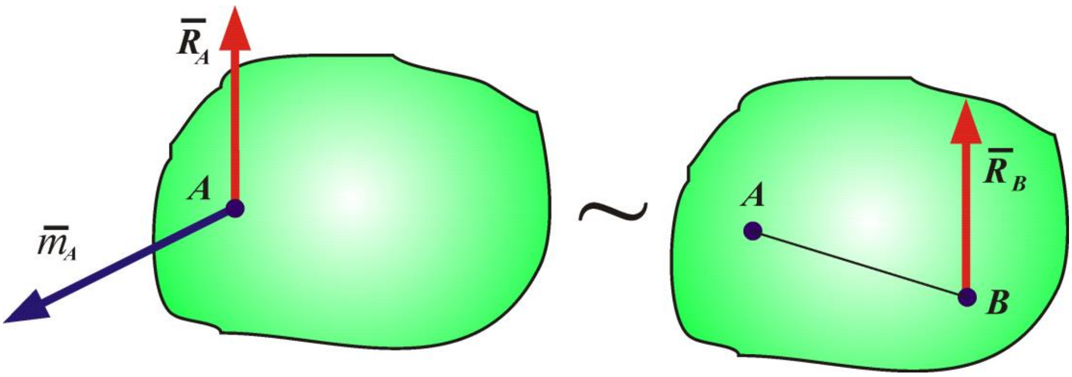



**Рис 13.1**

$$\{\overline{F}_k\}_n \sim \left(\overline{R}_A, \overline{m}_A\right), \qquad \overline{m}_A \perp \overline{R}_A.$$

Однако сила $\overline{R}_A$ и пара $\overline{m}_A$, действующие на тело в одной плоскости, заменяются одной силой $\overline{R}_B$ равной силе $\overline{R}_A$.

$$\left(\overline{m}_A, \overline{R}_A\right) \sim \overline{R}_B$$

Точка $B$ приложения силы смещена от точки А по направлению вектора $\overline{R}_A \times \overline{m}_A$ на расстояние $AB = \dfrac{m_A}{R_A}$ .

*Следовательно, система сил, главный вектор и главный момент, который относительно центра перпендикулярны, приводится к равнодействующей силе, равной сумме сил системы:*

$$\{\overline{F}_k\}_n \sim \overline{R}_B = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k . \tag{13.5}$$

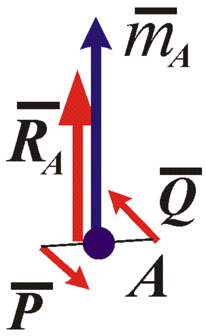
Таким образом, системы сил, главные векторы и главные моменты которых относительно центра перпендикулярны между собой или один из них равен нулю, приводятся к равнодействующей силе или равнодействующей паре.

4. Главный вектор $\overline{U}_A$ и главный момент $\overline{L}_A$ сил $\{\overline{F}_k\}_n$ относительно центра $A$ параллельны

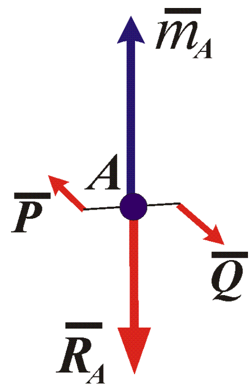
$$\overline{L}_A \parallel \overline{U}_A \, .$$

Такая совокупность силы и пары называется *динамой*.

Динамой, или динамическим винтом, называется набор из силы $\overline{R}$ и пары $(\overline{P},\overline{Q})$, плоскость которой перпендикулярна силе. Линия действия силы $\overline{R}$ из динамы ( $\overline{R},\overline{P},\overline{Q}$ ) называется осью динамы. Момент $\overline{m}$ пары $(\overline{P},\overline{Q})$ параллелен силе $\overline{R}$. Параметром динамического винта называют отношение $\rho = \pm \dfrac{m}{R}$.




**а) правый винт**




**б) левый винт**

**Рис. 13.2**

5. Рассмотрим теперь приведение к простейшему виду систем сил, главные векторы и главные моменты которых относительно центра $A$ не перпендикулярны между собой и ни один из них не равен нулю:

$$\overline{U}_A \neq 0, \qquad \overline{L}_A \neq 0, \qquad \varphi \neq \frac{\pi}{2}. \tag{13.6}$$

Пусть $\{\overline{F}_k\}_n$ – одна из таких систем сил. Силы $\{\overline{F}_k\}_n$ после приведения их к центру $A$ заменяются результирующей силой $\overline{R}_A$ и результирующей парой $\overline{m}_A$ (рис. 13.3):

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n \sim \left(\bar{R}_A, \bar{m}_A\right),$$

Заменим пару $\bar{m}_A$ двумя парами $\bar{m}_A^{\backslash}$ и $\bar{m}_A^{\backslash\backslash}$, первая из которых расположена в плоскости, перпендикулярной силе $\bar{R}_A$, а другая – в плоскости, содержащей эту силу:

$$\bar{m}_A \sim \left(\bar{m}_A', \bar{m}_A''\right). \tag{13.8}$$

Модули моментов этих пар:

$$m_A' = m\left|\cos\varphi\right|, \qquad m_A'' = m\left|\sin\varphi\right|. \tag{13.9}$$

После этого о системе сил скажем, что она заменена силой и двумя парами:

$$\left\{\bar{F}_k\right\}_n \sim \left(\bar{R}_A, \bar{m}_A', m_A''\right).$$

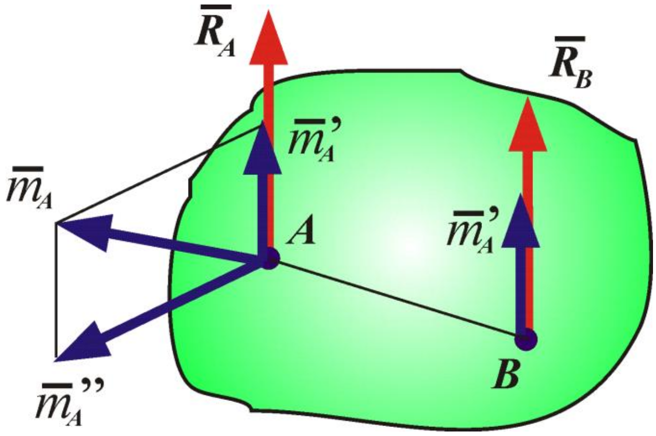



**Рис. 13.3**

Действие на тело силы $\bar{R}_A$ и пары $\bar{m}_A'$, расположенных в одной плоскости, заменим действием одной силы $\bar{R}$, приложенной в точке *B*, отстоящей от точки А по направлению вектора $\bar{R}_A \times \bar{m}$ на расстоянии

$$AB = \frac{m_A'}{R_A} \text{ и равен силе } \bar{R}_A \qquad \left(\bar{R}_A, \bar{m}_A'\right) \sim \bar{R} = \bar{R}_A.$$

Теперь оказалось что система сил $\left\{\bar{F}_k\right\}_n$ эквивалентна силе $\bar{R}$, приложенной в точке *B*, и паре $\bar{m}^* = \bar{m}_A'$, расположенной в плоскости, перпендикулярной силе $\bar{R}$:

$$\left\{\overline{F}_k\right\}_n \sim \left(\overline{R}, \overline{m}^*\right), \quad \overline{R} = \overline{R}_A, \quad \overline{m}^* = \overline{m}'_A. \tag{4.13}$$

Сила $\overline{R}$ и пара $\overline{m}^*$ составляют динаму.

Таким образом, любая система сил, главные вектор и момент которой не перпендикулярны, эквивалентна динаме. Для такой системы сил существует центр $B$, при приведении к которому она заменяется динамой.

Момент $\overline{m}^*$ пары сил в динаме, которой заменены силы $\left\{\overline{F}_k\right\}_n$:

$$\overline{m}^* = \overline{L}_B \Rightarrow \overline{m}^* = \sum_{k=1}^{n} m_B \overline{F}_k .$$

Модуль момента $\overline{m}^*$ является наименьшим среди моментов результирующих пар, которые получаются при приведении сил $\left\{\overline{F}_k\right\}_n$ к другим центрам.

# *14. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ НЕПРЕРЫВНО СИЛЫ*

Так называются силы, действующие на тело в каждой точке области $D$, некоторой его части. Область $D$ может быть часть поверхности, часть объема, линия.

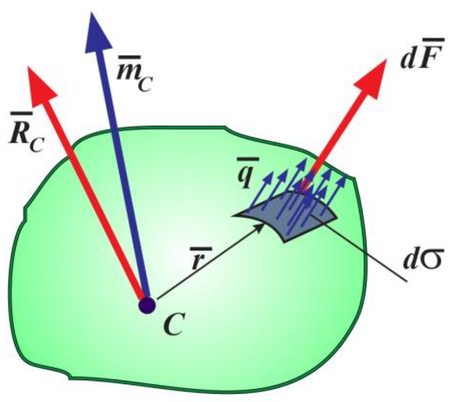



**Рис. 14.1**

Распределенные силы принято задавать их вектором интенсивности $\overline{q}$ в каждой точке силы.

Множество распределенных сил заменяют множеством сосредоточенных сил $\left\{d\overline{F}\right\}$, заменяющих действие распределенных сил по каждому элементу $d\sigma$ области их распределения.

$$d\overline{F} = \overline{q}\, d\sigma.$$

Отсюда можно получить формулу для интенсивности распределенной нагрузки:

$$\bar{q} = \frac{d\bar{F}}{d\sigma}.$$

Главный вектор и момент $\bar{U}_C, \bar{L}_C$, распределенных сил относительно какого-либо центра определяется через главный вектор и главный момент сосредоточенных сил $\{d\bar{F}\}$.

$$\bar{U}_C = \int\limits_{(D)} \bar{q}d\sigma, \;\; \bar{L}_C = \int\limits_{(D)} \bar{m}_C\bar{q}d\sigma = \int\limits_{(D)} (\bar{r} \times \bar{q})d\sigma.$$

Интегралы могут быть двойными и тройными.

По теореме о приведении системы сил к центру любая система распределенных сил, действующих на твердое тело может быть заменена одной результирующей силой $\bar{R}_C$ и одной результирующей парой с моментом $\bar{m}_C$.

$$\{d\bar{F}\} \sim (\bar{R}_C, \bar{m}_C); \;\; \bar{R}_C = \int\limits_{(D)} \bar{q}d\sigma, \; \bar{m}_C = \int\limits_{(D)} (\bar{r} \times \bar{q})d\sigma$$

**Пример.** Найти величину и точку приложения равнодействующей треугольной нагрузки (рис. 14.2).

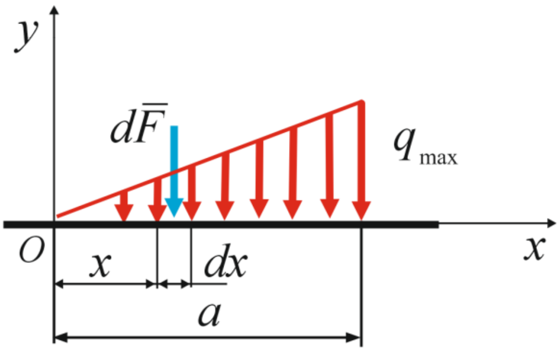



**Рис. 14.2**

Интенсивность нагрузки:

$$q = \frac{q_{max}}{a}x.$$

Приводя к центру $O$, получим (рис. 14.3) результирующую силу:

$$R_O = \int_0^a qdx = \int_0^a \frac{q_{max}}{a}xdx = \frac{q_{max}a}{2},$$

и результирующую пару

$$m = \int_0^a qx dx = \int_0^a \frac{q_{\max}}{a} x^2 dx = \frac{q_{\max} a^3}{3}.$$

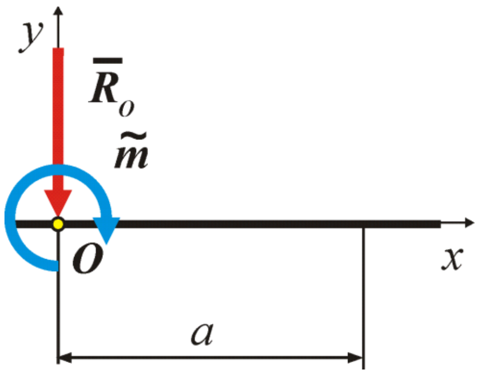



**Рис. 14.3**

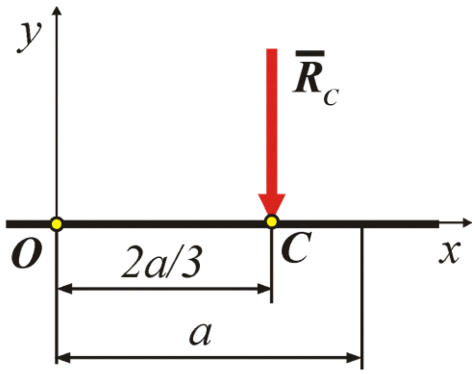



**Рис. 14.4**

Поскольку эти сила и пара расположены в одной плоскости, то их можно заменить одной силой из этой совокупности, смещенной на расстояние $OC$.

$$OC = \frac{m}{R_O} = \frac{\dfrac{q_{\max} a^3}{3}}{\dfrac{q_{\max} a^2}{2}} = \frac{2a}{3}.$$

# *15. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ*

Понятие о центре параллельных сил приходится вводить при решении некоторых задач механики, в частности, при определении центров тяжести тел.

Пусть дана система сил $\left\{\overline{F}_k\right\}_n$ параллельных между собой (рис. 15.1). Выберем систему координат таким образом, чтобы ось $Oz$ была параллельна этим векторам. Тогда при приведении к центру $O$ проекции результирующей силы и результирующей пары относительно начала координат будут равны:

$$\left\{\overline{F}_k\right\}_n \sim \left(\overline{R}_O, \overline{m}_O\right), \quad \overline{R}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k, \, \overline{m}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O \overline{F}_k .$$

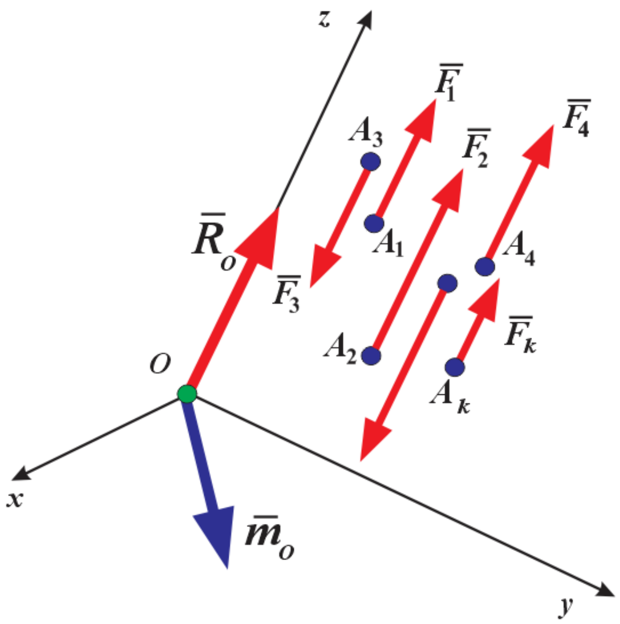



**Рис. 15.1**

Причём

$$R_x = 0, \qquad m_x \neq 0,$$
$$R_y = 0, \qquad m_y \neq 0,$$
$$R_z \neq 0, \qquad m_z = 0.$$

Значит, результирующая сила перпендикулярна моменту результирующей пары и система параллельных сил может быть заменена равнодействующей силой:

$$\left\{\overline{F}_k\right\}_n \sim \overline{R}_O, \quad \overline{R}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k .$$

Зафиксируем точки приложения сил системы, т.е. откажемся от возможности перемещать силы вдоль линии действия. Если повернем все силы, оставляя их параллельными, на один и тот же угол, то и равнодействующая сила повернется на тот же угол. Равнодействующая сила будет поворачиваться вокруг точки, называемой *центром параллельных сил*.

*Центром параллельных сил называется точка, вокруг которой поворачивается равнодействующая системы параллельных сил при повороте сил системы вокруг своих точек приложения.*

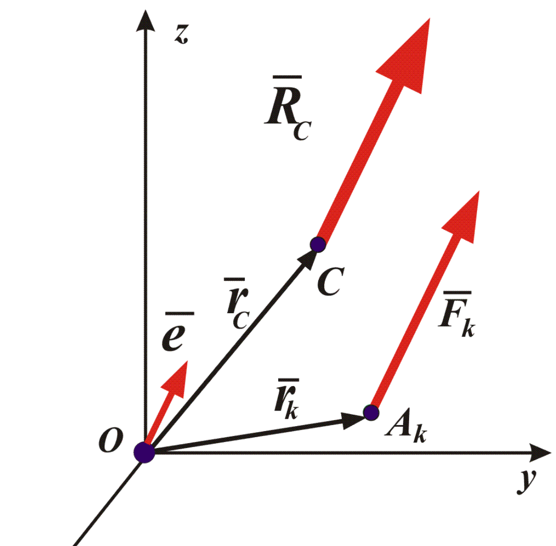



**Рис. 15.2**

Найдем эту точку.

Пусть точка $C$ – центр параллельных сил. По теореме Вариньона о моменте равнодействующей имеем

$$\overline{m}_O \overline{R}_C = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O \overline{F}_k .$$

Введем единичный вектор $\overline{e}$ по направлению действия сил системы. Тогда

$$\overline{F}_k = \tilde{F}_k \overline{e}, \quad \overline{R}_C = \tilde{R}_C \overline{e} .$$

Иначе

$$\overline{r}_C \times \overline{R}_C = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k \Rightarrow \overline{r}_C \times \sum_{k=1}^{n} \tilde{F}_k \overline{e} = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \tilde{F}_k \overline{e} .$$

Перенося все члены этого равенства в левую часть и вынося за скобку $\overline{e}$, получим

$$\left( \overline{r}_C \sum_{k=1}^{n} \tilde{F}_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \tilde{F}_k \right) \times \overline{e} = 0 .$$

Векторное произведение равно 0, либо когда один из сомножителей равен нулю, либо вектора параллельны.

Вектор

$$\left( \overline{r}_C \sum_{k=1}^{n} \tilde{F}_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \tilde{F}_k \right)$$

постоянен по направлению, он определяется точками $C$ и $\left\{ A_k \right\}_n$, а также «знаками» и модулями сил $\left\{ \overline{F}_k \right\}_n$ Вектор же $\overline{e}$ может вместе с силами поворачиваться на один и тот же угол, при этом точка С должна оставаться на месте. Значит в общем случае

$$\left( \overline{r}_C \sum_{k=1}^{n} \tilde{F}_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \tilde{F}_k \right) \nparallel \overline{e} .$$

Вектор $\overline{e} \neq 0$ по определению, значит

$$\overline{r}_C \sum_{k=1}^{n} \tilde{F}_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \tilde{F}_k = 0 .$$

Это равенство определяет лишь одну точку. Эта точка и будет центром параллельных сил, её радиус-вектор

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \tilde{F}_k}{\sum_{k=1}^{n} \tilde{F}_k} .$$

Мы нашли, что радиус вектор точки приложения равнодействующей параллельных сил не зависит от направления этих сил и он единственен. Проецируя последнее выражение на оси координат, получим координаты центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \tilde{F}_k}{\sum_{k=1}^{n} \tilde{F}_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \tilde{F}_k}{\sum_{k=1}^{n} \tilde{F}_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k \tilde{F}_k}{\sum_{k=1}^{n} \tilde{F}_k}.$$

# *16. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ*

На каждую частицу тела вблизи земной поверхности действует направленная вниз сила – сила тяжести. Строго говоря, система сил тяжести сходящаяся. Центр Земли – точка схода. Но ввиду того, что расстояние данного тела от центра земли велико, можно считать, что эти силы параллельны.

Система сил тяжести частиц тела представляет собой систему параллельных сил $\{d\overline{P}\}$. Равнодействующая этой системы сил есть сила тяжести тела:

$$\overline{P} = \int\limits_{(V)} d\overline{P}.$$

Здесь $V$ – объём данного тела

Интенсивность сил тяжести:

$$\overline{q} = \frac{d\overline{P}}{dV} = \rho\overline{g},$$

где $\rho$ – плотность тела; $\overline{g}$ – ускорение свободного падения.

Точка, являющаяся центром параллельных сил тяжести частиц тела, называется *центром тяжести* данного тела. Эта точка не меняет своего положения при любых поворотах тела.

Радиус-вектор этой точки $\overline{r}_C = \dfrac{1}{P} \int\limits_{(V)} \overline{r}\, dP$

Координаты центра тяжести

$$x_C = \frac{1}{P}\int_{(V)} x\,dP;\;\; y_C = \frac{1}{P}\int_{(V)} y\,dP;\;\; z_C = \frac{1}{P}\int_{(V)} z\,dP.$$

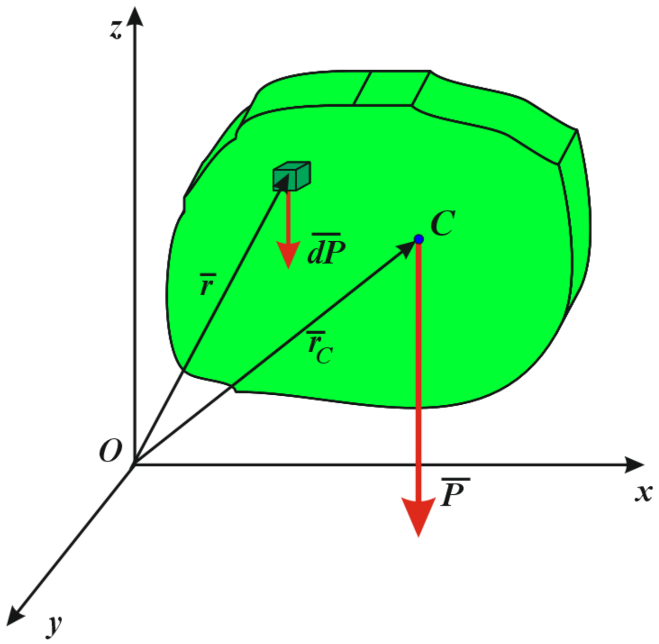



**Рис. 16.1**

Если тело однородное, то $dP = \rho g dV = \gamma dV = \text{const}$, где $\gamma$ – удельный вес тела.

Тогда

$$\overline{r}_C = \frac{1}{\gamma V}\int_{(V)} \overline{r}\,\gamma dV = \frac{1}{V}\int_{(V)} \overline{r}\,dV$$

Здесь $C$ – центр тяжести объема.

Если вещество равномерно распределено по некоторой поверхности, то

$$\overline{r}_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} \overline{r}\,dS\,,$$

$C$ – центр тяжести однородной поверхности.

Аналогично, для линии:

$$\overline{r}_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} \overline{r}\,dL\,,$$

$C$ центр тяжести однородной линии.

# *17. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ*

***Сопротивление скольжению одного тела (ползуна) по поверхности другого тела называется трением скольжения.***

Реакция шероховатой опорной поверхности на опирающееся тело $\bar{R}$ состоит из силы $\bar{N}$ – *нормального давления* и силы $\bar{F}$ – *трения скольжения* (рис. 17.1).

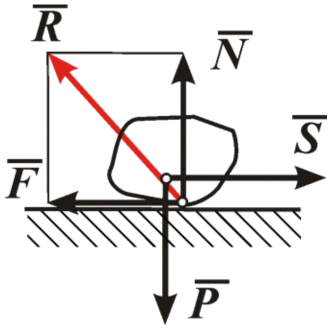



**Рис. 17.1. Контакт точечный**

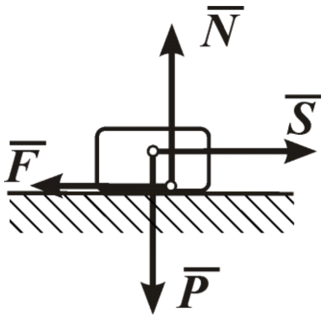



**Рис. 17.2. Контакт поверхностный**

Нормальная составляющая $\bar{N}$ реакции основания препятствует вдавливанию тела в основание.

Сила $\bar{F}$ – трения скольжения препятствует скольжению тела по опорной поверхности. Она служит мерой сопротивления скольжению ползуна по опорной поверхности.

Реакция шероховатой опорной поверхности на опирающееся тело при точечном контакте (рис. 17.1) приложена в точке контакта, при поверхностном контакте (рис. 17.2) - в точке, положение которой неизвестно.

Можно сформулировать следующие **законы трения скольжения**.

1. Сила трения скольжения направлена противоположно направлению сдвига ползуна по опорной поверхности.

2. Модуль силы трения скольжения при покое опирающегося тела (*трение покоя*) может иметь любое значение между нулем и максимальным (или предельным) значением в момент, предшествующий сдвигу (*критическое равновесие*).

$$0 \le F \le F_{\max}$$

3. Модуль силы $F_{\max}$ пропорционален нормальному давлению:

$$F_{max} = fN,$$

где $f$ - коэффициент трения скольжения.

$f$ - определяется материалом и состоянием поверхности трущихся тел, и не зависит от площади контакта соприкасающихся тел.

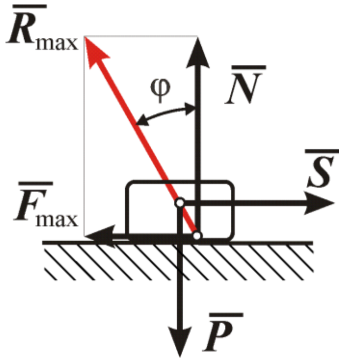



**Рис. 17.3**

В частности :

$f$ = 0,4...0,7 - дерево по дереву;

$f \approx$ 0,6...резина по асфальту;

$f$ = 0,15...0,25 - металл по металлу.

Углом трения называется максимальный угол отклонения силы реакции опорной поверхности на ползун от нормали к ней (рис. 17.3), где

$$\overline{R}_{max} \sim \left(\overline{F}_{max}, \overline{N}\right).$$

Нетрудно видеть, что

*Если внешняя сила, действующая на ползун, лежит внутри угла трения, то тело останется в равновесии, как бы ни была велика эта сила.*

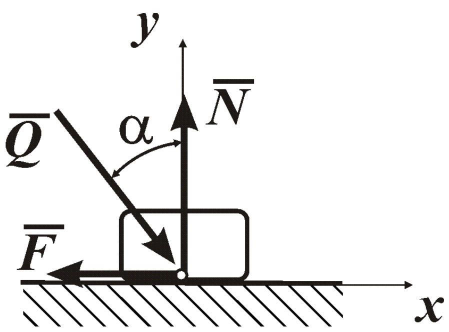



**Рис. 17.4**

В самом деле, рассмотрим равновесие ползуна на шероховатом основании (рис. 17.4).

Пусть $\overline{Q}$ – равнодействующая внешних сил - направлена под углом α к вертикали.

При равновесии

$$\left(\overline{Q}, \overline{N}, \overline{F}\right) \sim 0$$

Условия равновесия данной сходящейся плоской системы сил запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x &= Q\sin\alpha - F = 0 \Rightarrow Q\sin\alpha = F \\ \sum F_y &= N - Q\cos\alpha = 0 \Rightarrow Q\cos\alpha = N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{F}{N} \le f = \mathrm{tg}\varphi,$$

$$\alpha \le \varphi.$$

Конус, образующая которого является линией действия силы реакции шероховатой поверхности $\overline{R}_{max}$ называется *конусом трения* (рис. 17.5).

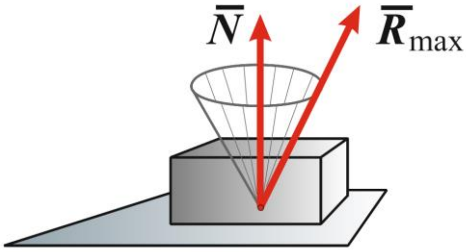



**Рис. 17.5**

## ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

Уравнения задач на равновесие тела на шероховатой поверхности состоят из условий равновесия сил, уравновешенных на теле после освобождения от связей, и уравнения трения скольжения, которое является равенством

$$F_{max} = f\,N,$$

если рассматривается *критическое равновесие* или неравенством

$$F \leq f\,N,$$

если рассматривается *докритическое равновесие* тела.

Поскольку во втором случае система уравнений задачи содержит одно неравенство, то для искомой величины $S$ получится область ее значений, ограниченная предельными значениями этой величины, соответствующими критическим равновесиям тела на сдвиг в одну и в другую сторону.

$$S_{min} < S \leq S_{max}.$$

Рассмотрим ползун веса $P$ на шероховатой несамотормозящей нак-лонной плоскости, образующей угол $\alpha$ с горизонтом. Ползун удерживается силой $S$.

Если состояние равновесия предшествует сдвигу ползуна *вниз*, то $S = S_{min}$, еще удерживает ползун на наклонной плоскости (рис.17.6).

Если же предельное равновесие предшествует сдвигу ползуна *вверх*, то $S = S_{max}$ (рис. 17.7).

При всех $S_{min} \leq S \leq S_{max}$ равновесие ползуна будет докритическим.

Составим уравнения критического равновесия ползуна на сдвиг *вниз*:

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x &= S_{\min} + F_{\max} - P\sin\alpha = 0,\\ \sum F_y &= N - P\cos\alpha = 0.\end{aligned}\right\} \tag{17.1}$$

Уравнение критического равновесия ползуна на сдвиг вверх:

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x &= S_{\max} - F_{\max} - P\sin\alpha = 0,\\ \sum F_y &= N - P\cos\alpha = 0.\end{aligned}\right\} \tag{17.2}$$

Уравнения (17.1) и (17.2) отличаются знаком проекции силы трения.

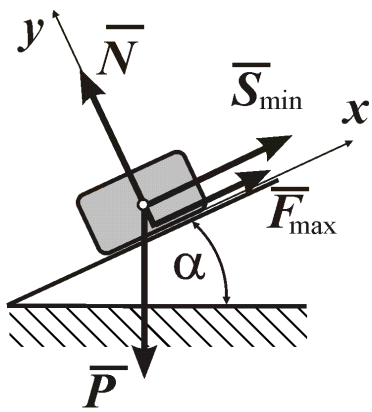


**Рис. 17.6**

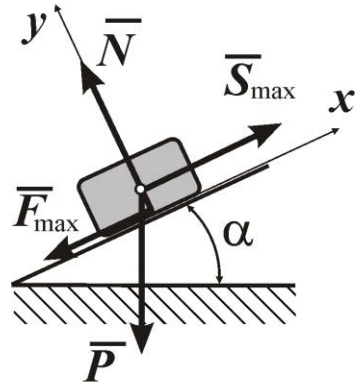


**Рис. 17.7**

Модуль силы трения в обоих случаях критического равновесия найдется по формуле

$$F_{\max} = fN. \tag{17.3}$$

Решая системы уравнений (17.1) и (17.2) с учетом (17.3) получим:

$$S_{\min} = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

$$S_{\max} = P(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

Значения $S_{\min}$ и $S_{\max}$ отличаются только знаками при членах, содержащих коэффициент трения.

*Поэтому, при решении задач, в которых возможны два критических положения равновесия, нет необходимости рассматривать оба эти случая. Достаточно рассмотреть одно из них и, получив ответ в алгебраической форме, записать выражение для второго граничного значения.*

# 18. ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

*Сопротивление качению одного тела (катка) по поверхности другого тела (основания) называется* ***трением качения****.*

Трение качения возникает при наличии деформации шероховатых поверхностей тел в точке контакта.

В самом деле, если поверхности катка и основания абсолютно твердые, то их контакт будет точечным и даже при наличии даже сколь угодно малой сдвигающей силы $S$ (рис 18.1).

$$\sum m_K F \neq 0 \quad \forall S .$$

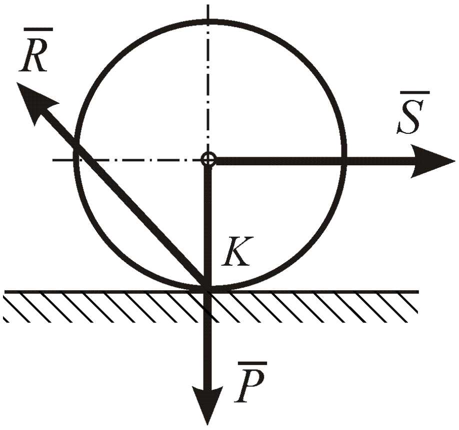



**Рис.18.1**

Следовательно, в данном случае трения качения нет.

При наличии деформации на участке контакта реакция основания представляет собой систему распределенных сил. После приведения этих сил к нижней точке катка они заменяются одной *результирующей силой* и одной *результирующей парой.*

Результирующую силу обычно изображают двумя составляющими $N$ и $F$. Пару сил обозначим $m_{\text{тр}}$ (рис. 18.2).

Нормальная составляющая $N$ реакции основания препятствует вдавливанию катка в основание. Сила трения скольжения $F$ препятствует его скольжению по основанию. Качению катка препятствует пара $m_{\text{тр}}$ трения качения. Модуль момента пары сил трения качения служит мерой сопротивления качению катка по опорной поверхности.

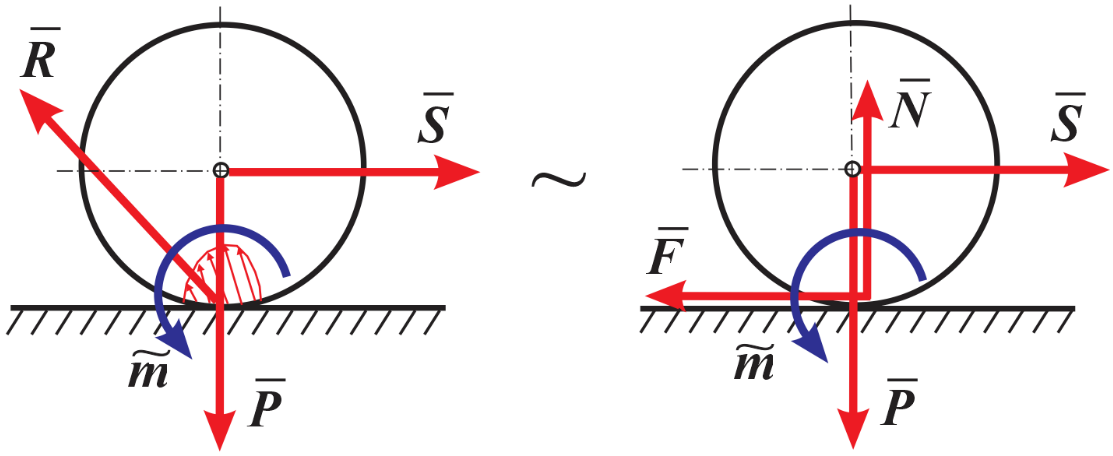



**Рис. 18.2**

Момент пары трения качения направлен против поворота катка из занимаемого положения, который он совершает или готов совершить. Модуль момента $m_{тр}$ пары трения качения при покое катка (трение покоя) может иметь любое значение между нулем и максимальным (или предельным) значением

$$0 \le m_{тр} \le m_{max} .$$

Максимальное значение модуля момента пары трения качения пропорционально нормальному давлению

$$m_{тр} = k\,N,$$

где $k$ - *коэффициент трения качения*, который зависит от материала и состояния трущихся поверхностей. Он имеет размерность длины и обычно измеряется в сантиметрах.

В частности, при качении стали по стали $k \approx 0{,}03$ см.

## ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Уравнения задач на равновесие тела на ***шероховатой деформируемой поверхности*** состоят из условий равновесия сил, приложенных к телу после освобождения от связей, и уравнения трения качения, которое является равенством

$$m_{тр} = k\,N,$$

если рассматривается ***критическое*** равновесие, или неравенством

$$m_{тр} \leq k\,N,$$

если рассматривается ***докритическое*** равновесие

Поскольку во втором случае система уравнений задачи содержит одно неравенство, то для искомой величины получится область, ограниченная предельными значениями этой величины, соответствующими критическим равновесиям катка при качении в одну и другую сторону.

Модуль силы трения скольжения при отсутствии проскальзывания меньше критического значения и определяется неравенством

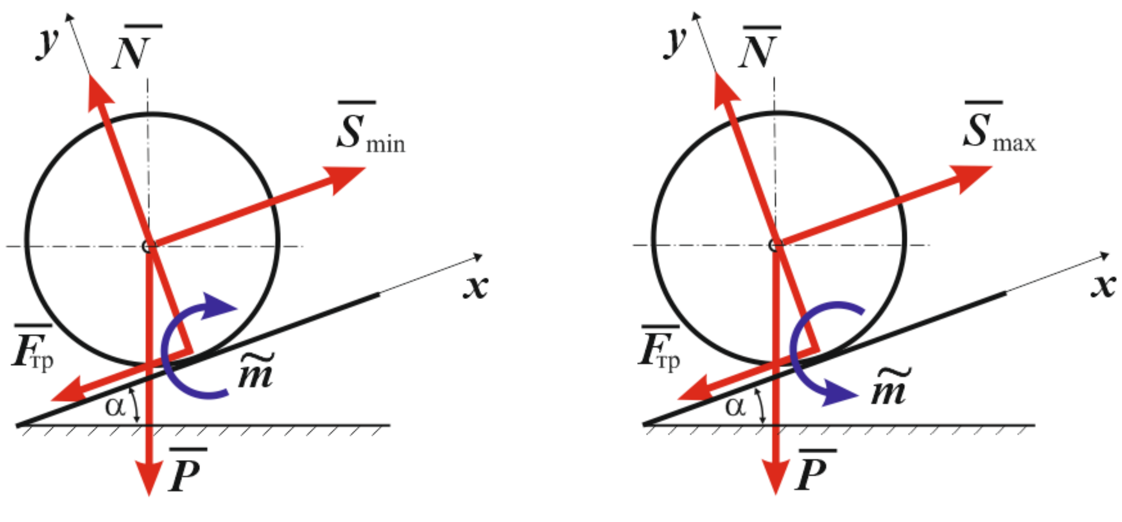
$$F < f\,N.$$

***Например:***

Каток, изображенный на рисунке 18.3, покоящийся на самотормозящей шероховатой деформируемой наклонной плоскости, может находиться в двух предельных состояниях равновесия.

Одно из них (рис. 18.3а.) предшествует качению вниз. Здесь $S = S_{min}$ еще удерживает каток на наклонной плоскости.

Второе предельное равновесие (рис.18.3б) предшествует качению катка вверх под действием силы $S_{max}$.




**а** **б**

**Рис. 18.3**

При всех $S_{min} \leq S \leq S_{max}$. равновесие катка будет докритическим.

Составим уравнения критического равновесия катка радиуса $r$, предшествующего его качению вниз (рис. 18.3а.).

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_x = S_{\min} + F - P\sin\alpha = 0,\\
&\sum F_y = N - P\cos\alpha = 0,\\
&\sum m_D F = P\,r\sin\alpha - m - S_{\min}\,r = 0.
\end{aligned}\right\}\tag{18.1}$$

Уравнения предельного равновесия катка, предшествующего движению его вверх, будут следующими:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_x = S_{\min} - F - P\sin\alpha = 0,\\
&\sum F_y = N - P\cos\alpha = 0,\\
&\sum m_D F = Pr\sin\alpha + m - S_{\min}\,r = 0.
\end{aligned}\right\}\tag{18.2}$$

Как видно, уравнения (18.1) и (18.2) отличаются только знаками моментов пары трения качения и силы трения.

Модуль пары трения качения найдется по формуле

$$m_{\text{тр}} = k\,N. \tag{18.3}$$

Модуль силы трения скольжения при отсутствии проскальзывания меньше предельного, и его можно найти из уравнений равновесия.

Решая систему уравнений (18.1; 18.2) вместе с уравнением (18.3) получим:

$$S_{\min} = P\left(\sin\alpha - \frac{k}{r}\cos\alpha\right),$$

$$S_{\max} = P\left(\sin\alpha + \frac{k}{r}\cos\alpha\right).$$

Отметим, что значения $S_{\min}$ и $S_{\max}$ отличаются знаками перед членами, содержащими коэффициент трения качения. Следовательно, при решении задач, в которых возможны два предельных положения равновесия, достаточно рассмотреть одно из них и, получив ответ в алгебраической форме, найти из него второе предельное значение области определения искомой величины.

Модуль силы трения скольжения в обоих случаях будет один и тот же:

$$F = P\,\frac{k}{r}\cos\alpha.$$

# *БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК*

1. Полецкий А.Т. Статика твёрдого тела: Текст лекций. – 2-е изд., пере-раб.–Челябинск, ЧПИ, 1987.–105 с.

2. Пономарева, С.И. Теоретическая механика. Трение: курс лекций / С.И. Пономарева, Е.П. Черногоров. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 37 с.

## Оглавление