

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)
Кафедра «Техническая механика»

531(07)
Ч-493

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
ДИНАМИКА**
методические указания
к решению задач

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2018

УДК 531(07)
Ч-493

*Одобрено
учебно-методической комиссией
аэрокосмического факультета*

Рецензент:
Кафедра прикладной механики ЮУрГАУ

Ч-493 Теоретическая механика. Динамика: методические указания к решению задач / сост.: Е.П. Черногоров, Ю.Г. Прядко, А.Г. Игнатъев — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2018. — 164 с.

Методические указания предназначены для самостоятельной и аудиторной работы при изучении раздела «Динамика» курса теоретической механики. В работе приводятся краткие сведения по теории, даются основные алгоритмы решения задач.

Примеры подбирались таким образом, чтобы для их решения не требовались громоздкие вычисления, но были необходимы понимание основных законов механики и умение применять нужные зависимости.

Методические указания могут быть полезными не только студентам, но и преподавателям, читающим курс теоретической механики в техническом вузе.

Составители приносят благодарность Г.И. Евгеньевой за ценные советы при оформлении методических указаний.

УДК 531(07)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2018

1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Рассмотрим движение точки M по кривой L под действием силы \vec{F} (рис. 1.1).

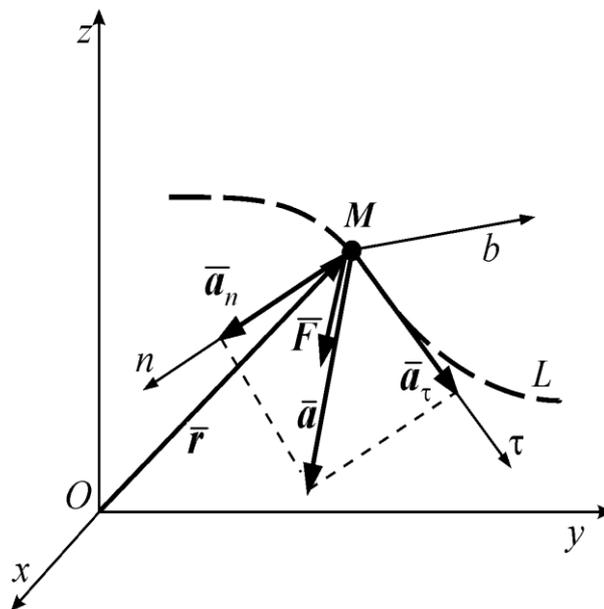


Рис.1.1

Основной закон динамики материальной точки

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

может быть записан так:

а) в векторной форме:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

б) в координатной форме:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z,$$

где F_x, F_y, F_z – проекции силы \vec{F} на оси координат;

в) в естественной форме:

$$ma_\tau = F_\tau, \quad ma_n = F_n, \quad ma_b = F_b.$$

Подставляя в последние уравнения

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho}, \quad a_b = 0,$$

получим

$$m \frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{v_\tau^2}{\rho} = F_n, \quad F_b = 0.$$

Здесь F_τ, F_n, F_b – проекции силы \bar{F} на естественные оси координат;

Полученные уравнения и представляют собой дифференциальные уравнения движения точки соответственно в векторной, координатной и естественной формах.

1.2. Две основные задачи динамики

Первая (прямая) задача: зная закон движения материальной точки и ее массу, определить, под действием какой силы такое движение может происходить.

Например, закон движения дан в координатной форме:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Найти действующую на точку силу.

Задача решается дифференцированием уравнений движения:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z,$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

и особой сложности не представляет.

Вторая (обратная) задача: зная действующие на точку силы, ее массу, а также её начальное положение и начальную скорость, определить закон движения точки.

В общем случае сила \bar{F} является функцией времени, а также положения и скорости точки: $\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v})$.

Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = F(t, \bar{r}, \bar{v}).$$

Необходимо отыскать функцию $\bar{r}(t)$. Для этого нужно проинтегрировать дифференциальное уравнение второго порядка, векторное (или три скалярных уравнения). После интегрирования получим уравнение

$$\bar{r} = \bar{r}(t, \bar{C}_1, \bar{C}_2).$$

Наличие постоянных интегрирования показывает, что точка под действием данной силы может совершать целый класс движений. Чтобы конкретизировать решение задачи, нужно найти постоянные интегрирования. Для их нахождения используют начальные условия движения.

Начальными условиями движения точки называются величины, определяющие начальное положение и начальную скорость точки:

$$\text{при } t = t_0 \Rightarrow \bar{r} = \bar{r}_0, \bar{v} = \bar{v}_0.$$

Начальные условия определяют единственное решение системы дифференциальных уравнений.

Такая задача, в которой требуется найти частное решение, удовлетворяющее определенным начальным условиям, получила название *задача Коши* (начальная задача). Постановка задач механики в форме задач Коши предполагает, что те взаимодействия между данной материальной точкой и окружающими ее телами, которые произошли до момента исследования движения этой точки, должны учитываться не путем введения силы, а заданием начального положения точки и ее начальной скорости.

Задача интегрирования в квадратурах системы дифференциальных уравнений в общем случае довольно трудна и решается лишь в некоторых частных случаях.

Уравнения и законы динамики были выведены для свободной материальной точки.

Если рассматривать движение несвободной материальной точки, то можно воспользоваться принципом освобождения связей.

Алгоритм решения задач динамики материальной точки

При решении задач динамики следует придерживаться определенного порядка, устанавливающего программу операций, выполнение которых достаточно для решения задачи. Строгое и последовательное выполнение этой программы в каждой задаче даст необходимые навыки и умение разбираться в задачах любой сложности.

Для решения задач динамики материальной точки предлагается следующая программа операций (*алгоритм*):

- 1) выбрать материальную точку и указать систему отсчета, в которой движение этой точки будет рассматриваться;
- 2) показать заданные силы, действующие на выбранную точку;

- 3) назвать связи, наложенные на эту точку, и заменить их реакциями;
- 4) выписать силы, под действием которых совершается движение точки;
- 5) составить дифференциальные уравнения движения точки, с помощью которых найти неизвестные величины, или использовать для этой цели общие теоремы динамики.

К каждому пункту программы сделаем пояснения и указания относительно рационального применения.

1. Выбор точки, движение которой необходимо рассмотреть для решения задачи, определяется следующим: надо рассматривать движение той точки, кинематические характеристики и силы взаимодействия которой с другими телами требуется найти по условию задачи. Часто выбор точки не представляет затруднений, так как он однозначно определен условием задачи.

Обязательно надо указывать систему отсчета, в которой рассматриваем движение точки. Положение точки в этой системе отсчета показываем для произвольного момента времени.

2. Когда рассматриваем движение точки в неинерциальном пространстве, к числу заданных сил, приложенных к ней, относятся переносная и добавочная силы инерции (силы Эйлера).

3. Реакцию шероховатой связи на точку, движение которой рассматриваем, показываем двумя составляющими: силой нормального давления \bar{N} и силой трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$.

4. Силы, под действием которых движется материальная точка, выписываем для того, чтобы не пропустить какую-либо из сил при выполнении следующего пункта программы.

5. Дифференциальные уравнения движения точки можно составить в координатной или естественной формах. При этом второй формой предпочтительнее пользоваться, когда заранее известна траектория точки. К дифференциальным уравнениям надо добавить начальные условия движения точки, необходимые для нахождения постоянных интегрирования.

Пример 1.1

Материальная точка массой m брошена с поверхности Земли с начальной скоростью v_0 , образующей угол α с горизонтом (рис. 1.2). Принимая во внимание, что сила тяжести точки постоянна, и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) закон движения точки; 2) траекторию точки; 3) высоту полёта точки при данном угле α ; 4) угол α , при котором высота полёта точки будет максимальной; 5) дальность полёта точки при данном угле α ; 6) угол α , при котором дальность полёта точки будет максимальной.

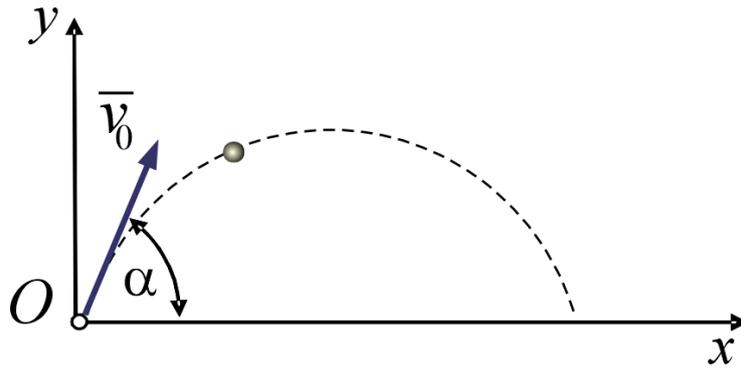


Рис. 1.2

Решение

1. Рассмотрим движение материальной точки в пространстве Земли (рис. 1.3). Поместим начало отсчёта O в начальном положении движущейся точки и направим ось Oy по вертикали вверх, а ось Ox выберем так, чтобы вектор начальной скорости точки v_0 лежал в плоскости Oyz . В этой системе отсчёта начальные условия будут следующими:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x = x_0 = 0, & y = y_0 = 0, \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha, & \dot{y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

Изображаем в произвольном положении движущуюся точку M и действующие на неё силы (рис. 1.3).

2. *Заданные силы:* единственной силой, действующей на точку, является постоянная сила тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$, направленная по вертикали вниз.

3. *Связи:* нет.

4. Точка движется под действием силы (\bar{P}) .

5. Составим дифференциальные уравнения движения точки в координатной форме:

$$m\ddot{x} = P_x, \quad m\ddot{y} = P_y.$$

Проекции силы \bar{P} на оси координат:

$$P_x = 0, \quad P_y = -mg.$$

Подставляя эти величины в дифференциальные уравнения движения точки, получаем

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -mg.$$

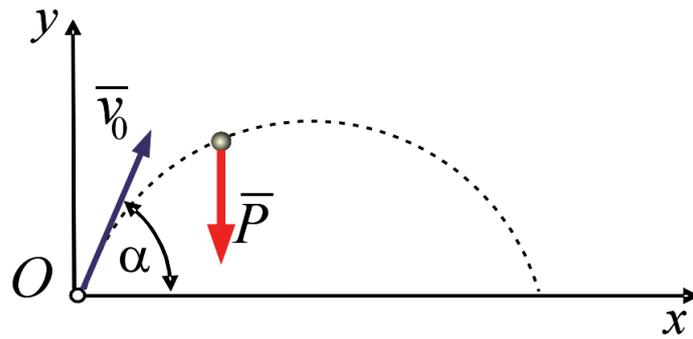


Рис. 1.3

или после сокращений на m

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

Проинтегрировав один раз каждое из составленных дифференциальных уравнений движения, найдём:

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = -gt + C_2.$$

Удовлетворяя начальным условиям, будем иметь:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = v_0 \sin \alpha.$$

Подставляя эти значения C_1, C_2 в найденные выше решения, придём к уравнениям:

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha.$$

Интегрируя каждое из этих уравнений, получаем:

$$x = v_0 t \cos \alpha + C_3, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + C_4.$$

Подстановка начальных условий даёт $C_3 = C_4 = 0$, и мы окончательно находим уравнения движения точки в виде:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

Исключая из этих уравнений время t , получаем уравнение траектории точки в форме, содержащей только координаты точки:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Полученное уравнение есть уравнение параболы, ось симметрии которой параллельна оси Oy .

Для нахождения высоты полёта H точки найдём максимум функции

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \cos \alpha:$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha = 0; \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g};$$

$$y_{\max} = -\frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Таким образом,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Отсюда следует, что высота полёта будет максимальной при $\alpha = 90^\circ$ и

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Чтобы найти дальность полёта L движущейся точки, подставим в уравнение траектории этой точки координаты точки A ($x = L$, $y = 0$), в которой траектория пересекает ось Ox . Тогда получим

$$0 = -\frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + L \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда найдём

$$L = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{g}.$$

Из этой формулы следует, что $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$ и максимальная дальность

полёта будет при $\alpha = 45^\circ$.

Пример 1.2

Материальная точка массы m брошена с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (рис. 1.4). Пренебрегая сопротивлением воздуха и принимая во внимание, что сила притяжения точки к Земле изменяется по закону всемирного тяготения Ньютона обратно пропорционально квадрату расстояния точки от центра Земли и прямо пропорционально массам точки и Земли, найти скорость точки как функцию этого расстояния.

Решение

1. Рассмотрим движение точки относительно неподвижной Земли. Поместим начало отсчёта O в центре Земли и направим ось Ox по траектории точки в сторону движения этой точки. Тогда начальные условия будут: при $t=0$ $x = x_0 = R$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = v_0$.

Изобразим движущуюся точку в произвольном положении.

2. *Заданные силы:* на эту точку будет действовать одна сила – сила притяжения точки к Земле \vec{F} , направленная по вертикали вниз. По условию задачи модуль силы \vec{F} определяется по закону всемирного тяготения:

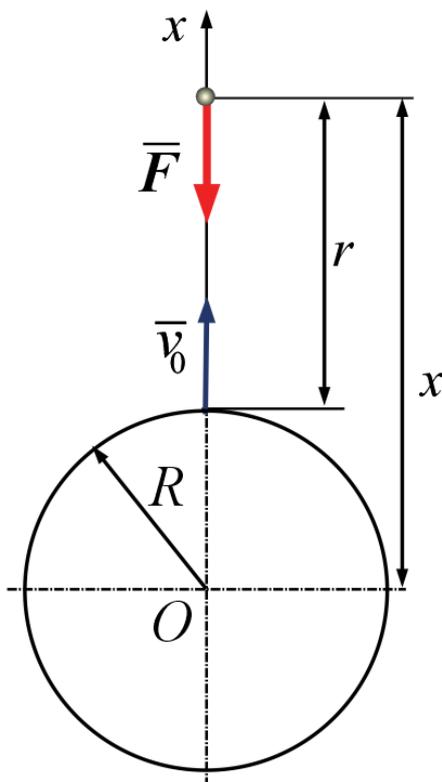


Рис. 1.4

$$F = k \frac{mM}{x^2},$$

где m – масса точки, M – масса Земли, k – гравитационная постоянная, x – расстояние материальной точки от центра Земли.

На поверхности Земли, при $x = R$ (где R – радиус Земли), сила тяжести удовлетворяет условию:

$$F = mg = k \frac{mM}{R^2},$$

т.е. $kM = gR^2$, где g – ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

В итоге получим

$$F = \frac{mgR^2}{x^2}.$$

Сила тяжести представляет собой частный случай сил всемирного тяготения.

3. *Связи:* нет.

4. Точка движется под действием силы (\bar{F}).

5. Составим дифференциальные уравнения движения точки в координатной форме:

$$m\ddot{x} = F_x.$$

Подставляя выражение для силы \bar{F} в уравнение движения, получаем

$$\ddot{x} = -g \frac{R^2}{x^2}.$$

В данном случае сила, действующая на точку, зависит только от координаты этой точки, поэтому мы понизим порядок составленного дифференциального уравнения при помощи формулы:

$$\ddot{x} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

При этом получим:

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = -g \frac{R^2}{x^2},$$

или, по разделении переменных,

$$v_x dv_x = -g \frac{R^2}{x^2} dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдём

$$\frac{v_x^2}{2} = \frac{R^2 g}{x} + C_1.$$

Так как при $t = 0$ $x = R$, $v_x = v_0$, то

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{R^2 g}{R} + C_1.$$

Отсюда найдём

$$C_1 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{R^2 g}{R}.$$

Поставив это значение C_1 , получим

$$\frac{v_x^2}{2} = \frac{R^2 g}{x} - \frac{R^2 g}{R} + \frac{v_0^2}{2}.$$

Решив это уравнение относительно v_x , найдём искомый закон скорости

$$v_x = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2Rg(R-x)}{x}}.$$

Используя этот закон скорости, можем найти наибольшую высоту, на которую поднимается брошенная материальная точка.

В тот момент, когда материальная точка достигает наибольшей высоты ($x_{\max} = h$), её скорость будет равна нулю, т.е.

$$0 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Rg(R-h)}{h}}.$$

Решая это уравнение относительно h , найдём

$$h = \frac{2R^2 g}{2Rg - v_0^2}.$$

Отсюда видно, что при $v_0^2 < 2Rg$ точкой будет достигнута некоторая наибольшая высота h , после чего эта точка начнёт падать обратно на Землю, а при $v_0^2 = 2Rg$ движущаяся точка будет всё время удаляться от Земли.

Пример 1.3

Тело массы m падает в воздухе с небольшой (по сравнению с радиусом Земли) высоты с начальной скоростью, равной нулю, и испытывает сопротивление воздуха. Найти закон поступательного движения тела, скорость тела в зависимости от времени и от пройденного этим телом пути и предельное значение скорости тела при неограниченно продолжающемся падении, считая силу сопротивления воздуха пропорциональной второй степени скорости: $R = \mu v^2$, где μ – коэффициент сопротивления.

Решение

1. Рассмотрим движение тела в пространстве Земли. Так как тело движется поступательно, то мы можем рассмотреть его как материальную точку с массой m . Поместим начало отсчёта O в начальном положении дви-

жущейся точки и направим ось по вертикали вниз (рис. 1.5). Тогда начальные условия будут: при $t = 0$ $x = x_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$. Изображаем в произвольном положении M движущуюся точку и действующие на неё силы.

2. *Заданные силы:*

– сила тяжести точки $\bar{P} = m\bar{g}$, направленная по вертикали вниз; так как материальная точка движется вблизи поверхности Земли, то её можно считать постоянной;

– сила сопротивления воздуха $R = \mu v^2$, направленная по вертикали вверх; при этом коэффициент сопротивления μ , зависящий от плотности воздуха, формы тела и площади проекции тела на плоскость, перпендикулярную к вектору скорости \bar{v} тела, также можно принять за постоянную величину.

3. *Связи:* нет.

4. Материальная точка движется под действием сил: (\bar{P}, \bar{R}) .

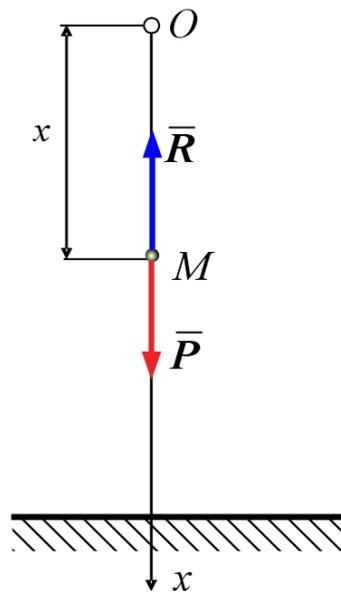


Рис. 1.5

5. Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки

$$m \ddot{x} = \sum F_x = P - R = mg - \mu v^2 = mg \left(1 - \frac{\mu}{P} v^2 \right).$$

Разделим на m ,

$$\ddot{x} = g \left(1 - \frac{\mu}{P} v^2 \right)$$

Если обозначить через c скорость точки, при которой сила сопротивления воздуха равна силе тяжести точки (что имеет место при равномерном падении точки), то $P = \mu c^2$, откуда $\frac{\mu}{P} = \frac{1}{c^2}$. Поэтому дифференциальное уравнение примет вид:

$$\ddot{x} = \frac{g}{c^2}(c^2 - v^2),$$

или

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{c^2}(c^2 - v^2),$$

так как $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$ и в нашей задаче всегда $v_x = v$. Это – уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2} dt.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, находим:

$$\frac{1}{2c} \ln \frac{c+v}{c-v} = \frac{g}{c^2} t + C_1.$$

Подставляя сюда начальные условия, найдём, что $C_1 = 0$. Предыдущее уравнение принимает вид

$$\frac{1}{2c} \ln \frac{c+v}{c-v} = \frac{g}{c^2} t.$$

Из этого уравнения находим скорость тела в зависимости от времени (закон скорости):

$$v = c \frac{e^{\frac{2gt}{c}} - 1}{e^{\frac{2gt}{c}} + 1}.$$

Умножив числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части этого равенства, на $e^{-\frac{gt}{c}}$, найдём:

$$v = c \frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}.$$

Умножив числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части этого равенства на $e^{-\frac{gt}{c}}$, найдём:

$$v = c \frac{1 - e^{-\frac{2gt}{c}}}{1 + e^{-\frac{2gt}{c}}}.$$

Мы видим, что с возрастанием t величина $e^{-\frac{2gt}{c}}$ убывает, стремясь при $t \rightarrow \infty$ к нулю. Отсюда следует, что скорость падения тела v с возрастанием t возрастает, стремясь в пределе к постоянной величине c . Эта величина называется предельной скоростью падения $v_{max} = c = \sqrt{\frac{P}{\mu}}$. Эта скорость возрастает с увеличением веса тела (или точки) и с уменьшением коэффициента сопротивления.

Таким образом, при $v_0 = 0$ падающее в воздухе тело не может получить скорости, большей, чем c . Оно сперва быстро набирает скорость, но с течением времени его падение всё более приближается к равномерному падению со скоростью c .

Чтобы найти скорость тела в зависимости от пройденного пути, исключим из дифференциального уравнения (1) переменное t , для чего производную $\frac{dv}{dt}$ представим в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Получим следующее дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{g}{c^2} (c^2 - v^2);$$

разделив здесь переменные, получим:

$$\frac{v dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2} dx.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем:

$$-\frac{1}{2} \ln(c^2 - v^2) = \frac{g}{c^2} x + C_2.$$

Подставляя начальные условия: $t = 0$, $x = 0$, $v = 0$, находим, $C_2 = -\frac{1}{2} \ln c^2$. Подставляя это значение C_2 , получим:

$$-\frac{1}{2} \ln \frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{g}{c^2} x,$$

или

$$\frac{c^2 - v^2}{c^2} = e^{-\frac{2gx}{c^2}}.$$

Отсюда окончательно находим скорость тела в зависимости от пройденного пути:

$$v = c \sqrt{1 - e^{-\frac{2gx}{c^2}}}.$$

Перейдём теперь к определению закона движения. Для этого обратимся к зависимости скорости от координаты x . Подстановкой $v = \frac{dx}{dt}$ получим:

$$\frac{dx}{dt} = c \frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}.$$

или, после разделения переменных,

$$dx = c \frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}} dt.$$

Преобразуем:

$$dx = \frac{c^2}{g} \frac{d \left(e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}} \right)}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}},$$

Интегрированием этого уравнения найдём

$$x = \frac{c^2}{g} \ln \left(e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}} \right) + C_3.$$

Подставим начальные условия: при $t = 0$ $x = 0$. Найдём $C_3 = -\frac{c^2}{g} \ln 2$, и,

следовательно, закон движения тела имеет вид:

$$x = \frac{c^2}{g} \ln \frac{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}{2}.$$

При больших t слагаемое $e^{-\frac{gt}{c}}$ будет много меньше слагаемого $e^{\frac{gt}{c}}$ и поэтому слагаемым $e^{-\frac{gt}{c}}$ практически можно пренебречь.

Тогда будем иметь:

$$x = \frac{c^2}{g} \ln \frac{e^{\frac{gt}{c}}}{2} = ct - \frac{c^2}{g} \ln 2,$$

т.е. движение по истечении некоторого промежутка времени практически становится равномерным.

Пример 1.4

Материальная точка M , брошена под углом α к горизонту со скоростью v_0 . В начальный момент времени точка находилась в положении M_0 . При движении точка испытывает сопротивление среды. Сила сопротивления находится по формуле:

$$\bar{R} = -\mu \bar{v},$$

где $\mu = 0,7m$, (m – масса точки).

Построить траекторию движения точки, а также графики изменения абсолютной скорости точки.

Решение

1. Рассмотрим движение точки в пространстве неподвижного основания.

Поместим начало отсчёта O в начальном положении движущейся точки и направим ось Oy по вертикали вверх, а ось Ox выберем так, чтобы вектор начальной скорости точки v_0 лежал в плоскости Oxy (рис. 1.6). В этой системе отсчёта начальные условия будут следующими:

$$\text{при } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 = 0, & y = y_0 = 0, \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha, & \dot{y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

Изображаем в произвольном положении движущуюся точку M и действующие на неё силы.

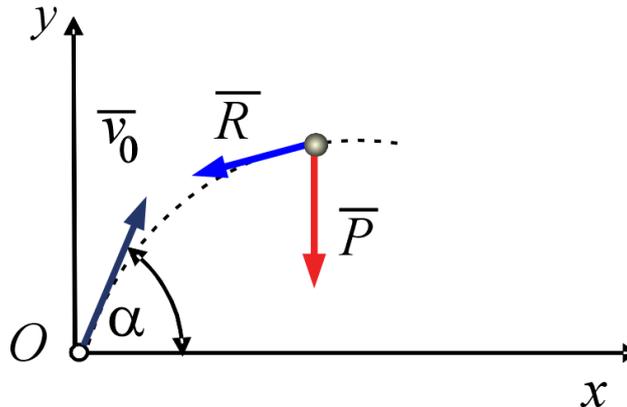


Рис. 1.6

2. *Заданные силы*: сила тяжести \bar{P} , $P = mg$; сила сопротивления среды \bar{R} , направленная по касательной к траектории против движения, $R = \mu v$.

3. *Связи*: нет.

4. Точка движется под действием сил: (\bar{P}, \bar{R}) .

5. Составим дифференциальные уравнения движения точки:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx} = -R_x = -\mu v_x; \\ m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky} = -P - R_y = -mg - \mu v_y. \end{cases}$$

Разделив на m , получаем

$$\begin{cases} \ddot{x} = -0,7 \dot{x}; \\ \ddot{y} = -g - 0,7 \dot{y}. \end{cases}$$

Решим систему дифференциальных уравнений в MATHCAD.

Вычислительный блок *Given/Odesolve*

Вычислительный блок для решения одного ОДУ, реализующий численный метод Рунге-Кутты, состоит из трех частей:

Given — ключевое слово;

ОДУ и начальное условие, записанное с помощью логических операторов, причем начальное условие должно быть в форме $y(t_1) = b$;

Odesolve(t, t₁) — встроенная функция для решения ОДУ относительно переменной t на интервале (t_0, t_1) .

Допустимо, и даже часто предпочтительнее, задание функции **Odesolve(t, t₁, step)** с тремя параметрами, где **step**— внутренний параметр численного метода, определяющий количество шагов, в которых метод Рунге-Кутты, будет рассчитывать решение дифференциального уравнения. Чем больше **step**, тем с лучшей точностью будет получен результат, но тем больше времени будет затрачено на его поиск. Помните, что подбором этого параметра можно заметно (в несколько раз) ускорить расчеты без существенного ухудшения их точности.

Пример решения задачи Коши для ОДУ первого порядка $y' = y - y^2$ посредством вычислительного блока приведен в листинге.

Листинг. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка

```
Given
d
— y(t) = y(t) - y(t)2
dt
y(0) = 0.1
y := Odesolve(t, 10)
```

Не забывайте о том, что вставлять логические операторы следует при помощи панели инструментов Boolean (Булевы операторы). При вводе с клавиатуры помните, что логическому знаку равенства соответствует сочетание клавиш **<Ctrl>+<=>**. Символ производной можно ввести как средствами панели Calculus (Вычисления), как это сделано в листинге, так и в виде штриха, набрав его с помощью сочетания клавиш **<Ctrl>+<F7>** Выберите тот или иной способ представления производной из соображений наглядности представления результатов – на ход расчетов он не влияет.

Mathcad требует, чтобы конечная точка интегрирования ОДУ лежала правее начальной: $t_0 < t_1$, иначе будет выдано сообщение об ошибке. Как можно заметить, результатом применения блока **Given/odesolve** является функция $y(t)$, определенная на промежутке (t_0, t_1) . Следует воспользоваться обычными средствами Mathcad, чтобы построить ее график или получить

значение функции в какой-либо точке указанного интервала, например, $y(3) = 0.691$.

Пользователь имеет возможность выбирать между двумя модификациями численного метода Рунге-Кутты. Для смены метода необходимо нажатием правой кнопки мыши на области функции **odesolve** вызвать контекстное меню и выбрать в нем один из двух пунктов: **Fixed** (Фиксированный шаг) или **Adaptive** (Адаптивный). По умолчанию применяется первый из них, т. е. метод Рунге-Кутты с фиксированным шагом.

Проинтегрировав каждое из составленных дифференциальных уравнений движения, найдём (рис. 1.7):

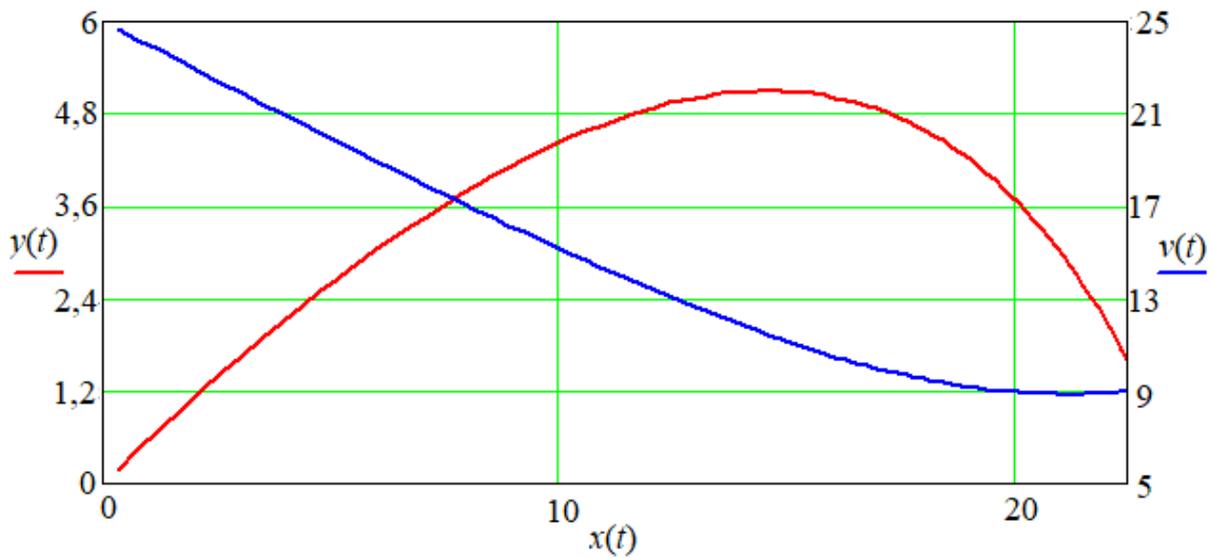


Рис. 1.7

1.3. Динамика несвободной материальной точки

Уравнения и законы динамики были выведены для свободной материальной точки. Рассмотрим теперь движение несвободной материальной точки, свобода движения которой ограничена связями (рис. 1.8).

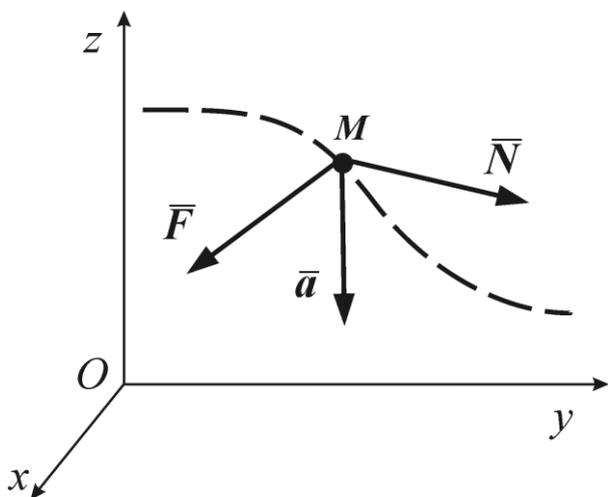


Рис. 1.8

Основное уравнение динамики несвободной материальной точки можно получить с помощью **принципа освобождения связей**: не нарушая движения несвободной точки, её можно сделать свободной, если отбросить связи и заменить их реакциями.

Применяя к «свободной» точке M , движущейся под действием сил (\bar{F}, \bar{N}) основное уравнение динамики получаем:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}.$$

Это – основное уравнение динамики несвободной точки.

Пример 1.5. Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, принужденная двигаться по окружности в вертикальной плоскости. Радиус этой окружности называется длиной математического маятника.

Пусть математический маятник представляет собой материальную точку массой m подвешенную на нерастяжимой, невесомой нити длиной l и совершающую движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Найти закон малых качаний маятника.

Решение

1. Рассмотрим движение маятника в пространстве неподвижного основания (рис. 1.9).

В качестве системы координат возьмем естественные оси τ и n . Начало отсчёта в точке M_0 , положительное направление указано. Положение маятника будем определять углом φ отклонения нити от равновесного положения.

2. *Заданные силы*: сила тяжести $\bar{P}, P = mg$

3. Связь: нить, её реакция \bar{N} .

4. Движение маятника совершается под действием сил (\bar{P} , \bar{N}).

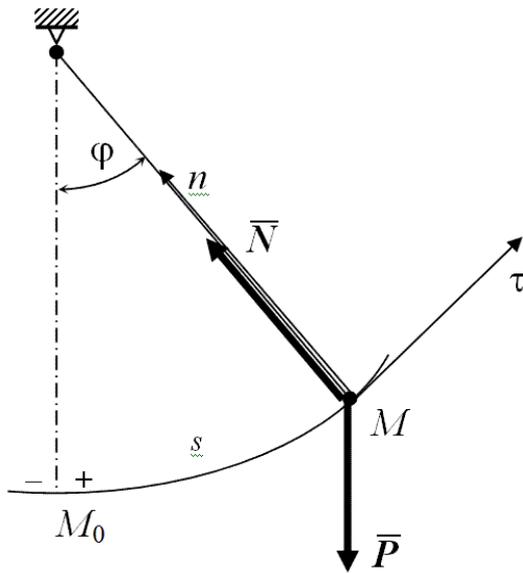


Рис. 1.9

5. Составим дифференциальные уравнения движения маятника в естественной форме:

$$\begin{cases} m \frac{dv_\tau}{dt} = -P \sin \varphi, \\ m \frac{v_\tau^2}{l} = -P \cos \varphi + N. \end{cases}$$

Второе из этих уравнений служит для нахождения величины силы \bar{N}

$$N = m g \cos \varphi + \frac{m v_\tau^2}{l}.$$

С помощью первого уравнения, после подстановки в него $v_\tau = \dot{s} \Rightarrow l \dot{\varphi}$, получается дифференциальное уравнение качаний маятника

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0, \text{ где } k = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением и в элементарных функциях не интегрируется.

Когда исследуются малые качания маятника, можно полагать $\sin \varphi \approx \varphi$. В этом случае дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдем закон малых качаний математического маятника:

$$\varphi = A \sin(k t + \alpha),$$

где амплитуда A и начальная фаза α являются константами интегрирования и определяются с помощью начальных условий движения:

$$t = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_0; \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

Как видно, малые качания математического маятника меняются по гармоническому закону. Период этих качаний

$$T = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Поскольку период T малых качаний маятника не зависит от начальных условий движения его $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$, то малые качания математического маятника называют изохронными.

Возникает вопрос, когда качания маятника можно считать малыми. Оказывается, что при амплитуде $A = 20^\circ$ ошибка периода T составляет 0,8 %, при $A = 40^\circ \sim 3$ %.

1.4. Динамика относительного движения материальной точки

Рассмотрим движение точки M относительно двух систем отсчёта, одна из которых $O\xi\eta\zeta$ неподвижна, а другая $Axuz$ движется известным образом относительно первой. Пусть на точку M действует сила \bar{F} , являющаяся результатом взаимодействия этой точки с другими телами. Составим уравнения движения этой точки по отношению к подвижной системе отсчёта $Axuz$.

Дифференциальные уравнения движения точки в неинерциальном пространстве составляются так же, как уравнения движения в инерциальном пространстве, если к действующим на точку силам прибавить переносную и кориолисову силы инерции (*динамическая теорема Кориолиса*).

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k.$$

Это основное уравнение динамики точки в неинерциальном пространстве.

Величины $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_k$, имеющие размерность силы, назовем соответственно *переносной* и *кориолисовой* силами инерции точки.

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e; \quad \bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k.$$

Заметим, что силы инерции $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_k$ по своему определению не являются результатом механического взаимодействия точки с другими материальными объектами внешнего мира и поэтому не являются для точки реальными физическими силами. Появление этих сил целиком обусловлено движением неинерциальной системы отсчета $Axuz$ по отношению к инерциальной системе $O\xi\eta\zeta$ и движением точки относительно неинерциальной системы отсчета. $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_k$ представляют собой поправки на неинерциальность системы отсчёта $Axuz$.

В частном случае, если система $Axyz$ движется поступательно, равномерно и прямолинейно, $a_e = a_k = 0$ и тогда уравнение динамики точки в неинерциальном пространстве будет иметь вид

$$m\bar{a}_r = \bar{F}.$$

При решении задач с применением дифференциальных уравнений движения в неинерциальной системе отсчёта необходимо в число заданных сил, действующих на точку, ввести переносную и кориолисову силы инерции.

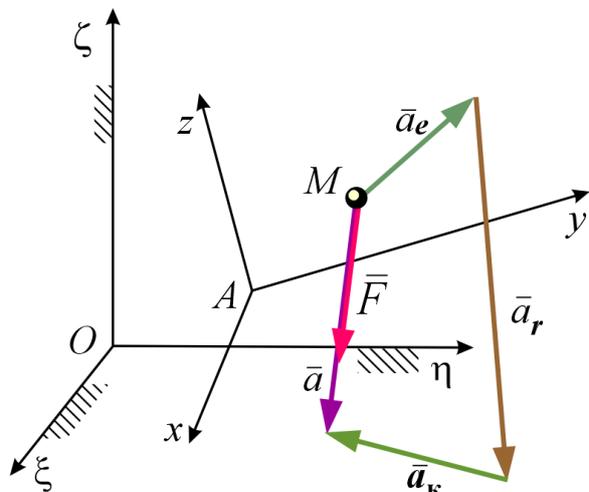


Рис. 1.10

Пример 1.6

Трубка длиной l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей под углом α к оси трубки (рис. 1.11). В трубку положили шарик массой m без начальной относительной скорости. Найти скорость вылета шарика из трубки, а также его давление на стенки, как функцию координаты x , если начальная координата шарика $x_0 = 0,5l$. Трением пренебречь.

Решение

1. Рассмотрим движение шарика в пространстве трубки. Начало координат подвижной системы отсчёта, связанной с трубкой, возьмем на оси вращения, в точке A и ось Ax направим вдоль трубки (см. рис. 1.11).

2. Заданные силы: сила тяжести \bar{P} , ($P = mg$).

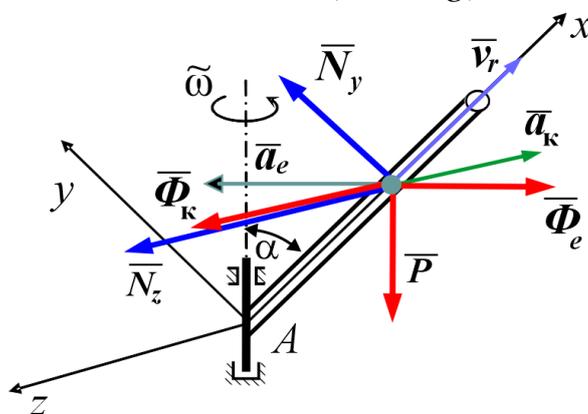


Рис 1.11

Поскольку трубка является неинерциальной системой отсчёта, то к этим силам следует добавить переносную и кориолисову силы инерции $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_k$

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_e &= -m\bar{a}_e; \bar{a}_e = \bar{a}_e^n; a_e^n = x\omega^2 \sin \alpha \Rightarrow \Phi_e = mx\omega^2 \sin \alpha; \\ \bar{\Phi}_k &= -m\bar{a}_k; \bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r; a_k = 2\dot{x}\omega \sin \alpha; \Phi_k = 2m\dot{x}\omega \sin \alpha.\end{aligned}$$

3. *Связи*: гладкая поверхность трубки, её реакция \bar{N} (N_z , N_y) направлена перпендикулярно к оси Ax .

4. Рассмотрим движение шарика под действием сил:

$$(\bar{P}, \bar{\Phi}_e, \bar{\Phi}_k, \bar{N}_y, \bar{N}_z).$$

5. Составим дифференциальные уравнения относительного движения шарика:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -P \cos \alpha + \Phi_e \sin \alpha, \\ m\ddot{y} &= N_y - P \sin \alpha - \Phi_e \cos \alpha, \\ m\ddot{z} &= N_z + \Phi_k.\end{aligned}$$

Поскольку движение происходит в направлении оси x , то уравнением движения шарика можно переписать в виде

$$\ddot{x} = -g \cos \alpha + x\omega^2 \sin^2 \alpha.$$

Представим относительную скорость шарика как функцию координаты x :

$$\dot{x} = v_r(x),$$

тогда

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} v_r(x) = \frac{dv_r}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v_r \cdot \frac{dv_r}{dx}.$$

Уравнение движения шарика примет вид:

$$v_r \frac{dv_r}{dx} = -g \cos \alpha + x\omega^2 \sin^2 \alpha.$$

Умножив обе части уравнения на dx , получим уравнение в полных дифференциалах:

$$v_r dv_r = -g \cos \alpha dx + \omega^2 \sin^2 \alpha x dx.$$

Интегрируя это уравнение, находим относительную скорость шарика как функцию координаты x :

$$\frac{v_r^2}{2} = -g \cos \alpha x + \omega^2 \sin^2 \alpha \frac{x^2}{2} + C,$$

где произвольная постоянная C определяется из начальных условий:

$$x_0 = 0,5l, \quad V_{r0} = 0,$$

$$C = g \cos \alpha x_0 - \omega^2 \sin^2 \alpha \frac{x_0^2}{2} = 0,5gl \cos \alpha - 0,125\omega^2 l^2 \sin^2 \alpha.$$

Тогда

$$v_r^2 = -g \cos \alpha (2x - l) + \omega^2 \sin^2 \alpha (x^2 - 0,25l^2).$$

В момент вылета шарика из трубки $x = l$ и скорость будет

$$v_r = \sqrt{0,75\omega^2 l^2 \sin^2 \alpha - gl \cos \alpha}.$$

Теперь можно найти составляющие реакции трубки N_y и N_z :

$$N_y = P \sin \alpha + \Phi_e \cos \alpha = mg \sin \alpha + m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$N_z = -\Phi_k = -2m\dot{x}\omega \sin \alpha = -2m\omega \sin \alpha \left[-gl \cos \alpha + 0,75\omega^2 l^2 \sin^2 \alpha \right]^{1/2}.$$

2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

2.1. Теоремы о количестве движения

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из $\{A_k\}_n$ материальных точек в инерциальной системе отсчета $Oxyz$. Силы, действующие на точки системы, разделим на внешние $\{\bar{F}_k^e\}_n$ и внутренние $\{\bar{F}_k^i\}_n$.

Количеством движения механической системы называют сумму количеств движений точек системы:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k.$$

Вектор \bar{Q} называют также *главным вектором количеств движения точек механической системы*.

$$\text{Размерность количества движения } [Q] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Поскольку скорость центра масс механической системы равна

$$\bar{v}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k}{M}, \quad \text{то} \quad M \bar{v}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k,$$

где $M = \sum_{k=1}^n m_k$ – масса системы.

Получаем

$$\bar{Q} = M \bar{v}_c.$$

Количество движения механической системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Проекция вектора количества движения системы на оси прямоугольной декартовой системы координат соответственно:

$$Q_x = M v_{Cx}; \quad Q_y = M v_{Cy}; \quad Q_z = M v_{Cz}.$$

Количество движения твердого тела может быть найдено по тем же формулам, как для механической системы.

Теорема о количестве движения механической системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на точки системы.*

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{U}^e.$$

Проецируя (2.2) на оси неподвижной системы координат, получим:

$$\frac{dQ_x}{dt} = U_x^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = U_y^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = U_z^e.$$

Производные по времени от проекций количества движения механической системы на оси координат равны проекциям на те же оси главного вектора внешних сил, действующих на точки системы.

Если масса всей системы $M = \sum_{k=1}^n m_k$ остается постоянной, то можно представить записать

$$M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{U}^e, \text{ или } M \bar{a}_C = \bar{U}^e.$$

Это уравнение выражает теорему о движении центра масс механической системы: *центр масс механической системы движется как материальная точка с массой равной массе всей системы под действием силы, равной главному вектору внешних сил, действующих на точки системы.*

Проецируя равенство на оси координат, получаем:

$$m\ddot{x}_C = U_x^e; \quad m\ddot{y}_C = U_y^e; \quad m\ddot{z}_C = U_z^e.$$

Это дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы в координатной форме.

Пусть главный вектор внешних сил, действующих на точки системы, равен нулю, т.е. $\bar{U}^e = 0$. Тогда получаем:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{Q} = \text{const.}$$

Это закон сохранения количества движения в данном пространстве: *если главный вектор внешних сил, действующих на точки системы, равен нулю, то количество движения системы остается постоянным по величине и направлению.*

Для системы, масса которой постоянна, получаем закон сохранения движения центра масс:

$$\bar{U}^e = 0 \Rightarrow M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{v}_C = \text{const.}$$

Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то скорость центра масс системы остается постоянной по величине и направлению.

Предположим, что $\bar{U}^e \neq 0$, но одна из его проекций, равна нулю, тогда получаем

$$U_x^e = 0 \Rightarrow \frac{dQ_x}{dt} = 0 \Rightarrow Q_x = \text{const.}$$

Для системы с постоянной массой

$$\bar{U}_x^e = 0 \Rightarrow M \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = \text{const.}$$

Эти равенства выражают закон сохранения проекции количества движения и закон сохранения проекции скорости центра масс.

Алгоритм решения задач на общие теоремы динамики механической системы

1. Выбрать механическую систему, движение которой необходимо рассмотреть для решения задачи, и указать пространство, в котором рассматривать это движение.
2. Указать внешние заданные силы, действующие на точки системы.
3. Назвать внешние связи, наложенные на систему, и заменить их реакциями.
4. Выписать все внешние и внутренние силы, действующие на точки механической системы.
5. Применить общие теоремы динамики для определения искомых величин.

Пример 2.1

Электромотор (рис. 2.1, а), массы статора и ротора которого соответственно равны M и m , может свободно скользить по неподвижным горизонтальным направляющим.

Ось вращения ротора проходит через центр тяжести O_1 статора, а центр тяжести O_2 ротора (рис. 2.1, б) расположен на малом расстоянии r (эксцен-

триситет ротора) от оси вращения. Пренебрегая силами трения между статором и направляющими, определить движение статора и реакцию направляющих. Какова будет эта реакция, если мотор жестко закреплен на основании?

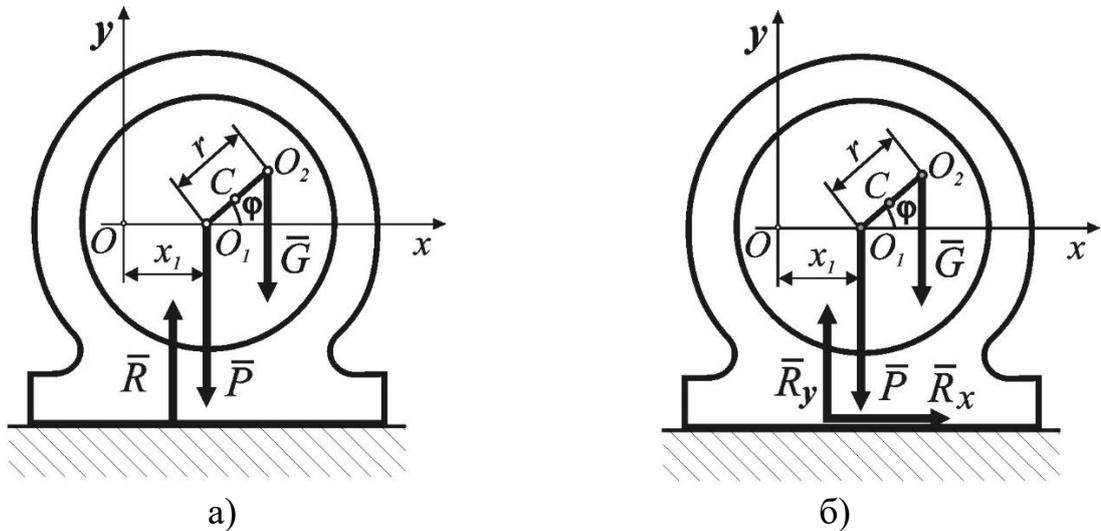


Рис. 2.1

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из ротора и статора, в пространстве неподвижного основания.

2. *Заданными внешними силами*, приложенными к системе, будут сила тяжести статора \bar{P} и сила тяжести ротора \bar{G} ($P = Mg$, $G = mg$).

3. *Связь*: гладкая поверхность основания; её реакция \bar{R} .

4. Механическая система движется под действием сил:

$$(\bar{P}, \bar{G}, \bar{R}, \{F_k^i\}).$$

5. Для решения задачи составим дифференциальные уравнения движения центра масс при незакрепленном моторе:

$$(M + m)\ddot{x}_C = 0; \quad (M + m)\ddot{y}_C = R - Mg - mg.$$

Координаты центра масс C системы, состоящей из статора и ротора, равны:

$$x_C = \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m}, \quad y_C = \frac{My_1 + my_2}{M + m} = \frac{m}{M + m}y_2,$$

где x_1 и $y_1 = 0$ — координаты центра тяжести O_1 статора, а x_2 , y_2 — координаты центра тяжести O_2 ротора (рис. 1), причем все координаты берутся по отношению к системе координат Oxy , связанной с неподвижным фундаментом.

Если через ω обозначить угловую скорость ротора, то координаты центра масс ротора соответственно равны:

$$x_2 = x_1 + r \cos \varphi = x_1 + r \cos \omega t,$$

$$y_2 = r \sin \varphi = r \sin \omega t.$$

Дважды дифференцируя эти выражения и подставляя эти значения в дифференциальные уравнения движения центра масс, получаем:

$$M \ddot{x}_1 + m \ddot{x}_1 - mr\omega^2 \cos \omega t = 0,$$

$$-mr\omega^2 \sin \omega t = R - Mg - mg.$$

Из первого уравнения можно получить уравнение движения статора, из второго – переменное давление мотора на направляющие. Имеем

$$\ddot{x}_1 = \frac{m}{M + m} r\omega^2 \cos \omega t,$$

откуда

$$\dot{x}_1 = \frac{m}{M + m} r\omega \sin \omega t + C_1 \Rightarrow x_1 = -\frac{m}{M + m} r \cos \omega t + C_1 t + C_2.$$

Замечая, что в начальный момент (до запуска мотора) статор был неподвижен, т. е. $\dot{x}_1 = 0$ при $t = 0$, находим $C_1 = 0$. Помещая начало координат O в начальное положение (при $\varphi = 0$) центра масс C системы, будем иметь (индекс 0 характеризует начальный момент движения):

$$C_2 = x_{10} + \frac{m}{M + m} r = \frac{Mx_{10} + m(x_{10} + r)}{M + m} = x_{C0} = 0.$$

Окончательно уравнение движения статора будет иметь вид

$$x_1 = -\frac{m}{M + m} r \cos \omega t.$$

Это – гармонические колебания с амплитудой

$$a = \frac{m}{M + m} r$$

и частотой, равной угловой скорости вращения ротора.

Из второго уравнения находим

$$R = (M + m)g - mr\omega^2 \sin \omega t.$$

Максимальное и минимальное значения опорной реакции:

$$R_{\max} = (M + m)g + mr\omega^2,$$

$$R_{\min} = (M + m)g - mr\omega^2.$$

Условие отсутствия вертикального движения статора имеет вид

$$M + m \left(1 - \frac{r\omega^2}{g} \right) \geq 0,$$

т.е. угловая скорость должна удовлетворять условию

$$\omega^2 \leq \frac{M + m}{m} \frac{g}{r}.$$

При невыполнении этого условия, т.е. при достаточно больших угловых скоростях, статор придет в вертикальное движение.

Если мотор закреплен в направляющих, то центр статора O_1 будет неподвижен и его можно принять за начало координат ($x_1 = y_1 = 0$). Опорная реакция \bar{R} , будет иметь в этом случае две проекции: горизонтальную и вертикальную (рис. 2.1,б)

Дифференциальные уравнения движения центра масс будут иметь вид

$$(M + m)\ddot{x}_c = R_x, \quad (M + m)\ddot{y}_c = R_y - Mg - mg,$$

причем,

$$x_c = \frac{m x_2}{M + m}, \quad y_c = \frac{m y_2}{M + m}.$$

Из этих уравнений находим реакции:

$$R_x = m\ddot{x}_2 = -mr\omega^2 \cos \omega t, \quad R_y = -(M + m)g - mr\omega^2 \sin \omega t.$$

Вертикальная реакция сохранила прежний вид, а за счет уничтожения горизонтальных колебаний появилась горизонтальная реакция. Реакция эта переменна по величине и направлению; максимальное её значение по абсолютной величине равно

$$|R_x|_{\max} = mr\omega^2.$$

Пример 2.2

По борту стоящего свободно на воде катера массой 600 кг и длиной 5 м с носа на корму переходит человек массой 80 кг (рис. 2.2). Пренебрегая сопротивлением воды, определить направление и величину перемещения катера.

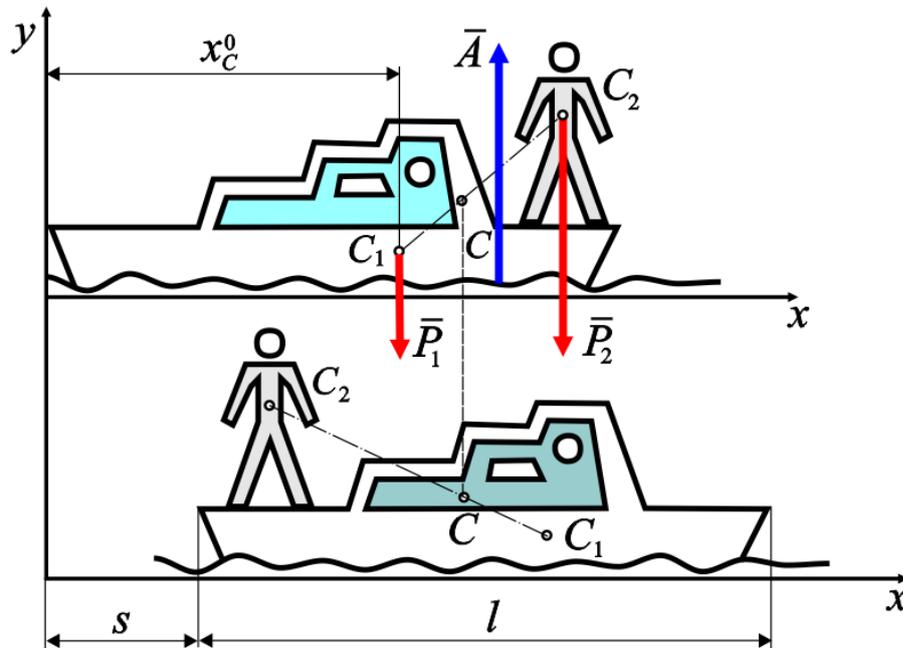


Рис. 2.2

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы катер–человек в пространстве Земли.
2. *Внешние заданные силы:* сила тяжести катера \bar{P}_1 , сила тяжести человека \bar{P}_2 , сила Архимеда \bar{A} .
3. *Внешние связи:* нет.
4. Движение системы происходит под действием сил:

$$\left(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{A}, \{ \bar{F}_k^i \} \right).$$

5. Составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы вдоль оси x :

$$m \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e \Rightarrow m \ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = \text{const.}$$

Поскольку в начальный момент времени система находилась в покое, т.е. $\dot{x}_{C0} = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = 0$. Следовательно, $x_C = \text{const}$.

Найдем x_C^0 и x_C в начальном и конечном положениях системы (рис. 2.2):

$$x_C^0 = \frac{m_1 x_{C1}^0 + m_2 l}{m_1 + m_2}; \quad x_C = \frac{m_1 (S + x_{C1}) + m_2 S}{m_1 + m_2}.$$

Так как $x_C^0 = x_C$, то получаем

$$m_1 x_{C1}^0 + m_2 l = m_1 S + m_1 x_{C1}^0 + m_2 S,$$

отсюда

$$S = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \Rightarrow S = 0,59 \text{ м.}$$

Катер передвинется вперёд на 0,59 м.

Пример 2.3

С кормы катера массой 600 кг, стоящего перпендикулярно причалу, на причал прыгает человек массой 80 кг. Какую скорость приобретет при этом катер, если скорость человека относительно катера в момент отталкивания от него равна 2,5 м/с.

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы катер–человек в пространстве Земли (рис. 2.3).
2. *Внешние заданные силы:* сила тяжести катера \bar{P}_1 , сила тяжести человека \bar{P}_2 , сила Архимеда \bar{A} .
3. *Внешние связи:* нет.
4. Движение системы происходит под действием сил:

$$\left(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{A}, \{ \bar{F}_k^i \} \right).$$

5. Применим теорему о количестве движения системы в проекции на ось x :

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0 \Rightarrow \frac{dQ_x}{dt} = 0 \Rightarrow Q_x = \text{const}.$$

Так как в начальный момент времени система находилась в покое, т.е. $Q_{0x} = 0$ то $Q_x = 0$.

Количество движения системы состоит из суммы количеств движения катера и человека

$$Q_x = Q_{1x} + Q_{2x},$$

где $Q_{1x} = m_1 v_{1x}$; $Q_{2x} = m_2 v_{2x}$.

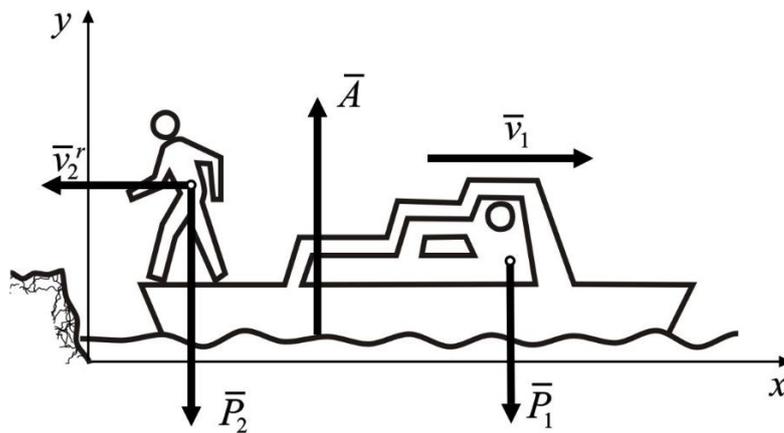


Рис. 2.3

Сделав движение человека в пространстве Земли сложным и связав подвижное пространство с катером, найдём

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_2^r + \bar{v}_2^e \quad \text{где } v_2^r = 2,5 \text{ м/с, а } \bar{v}_2^e = \bar{v}_1.$$

Проецируя последнее векторное равенство на ось X , получим

$$v_{2x} = v_1 - v_2^r. \quad v_{2x} = v_1 - v_2^r.$$

Тогда

$$Q_x = m_1 v_1 + m_2 v_1 - m_2 v_2^r = 0.$$

Откуда найдем скорость катера

$$v_1 = \frac{m_2 v_2^r}{m_1 + m_2} \Rightarrow 0,29 \text{ м/с.}$$

Пример 2.4

В условиях примера 3 определить путь S , который пройдет катер до остановки, если со стороны воды на него действует сила сопротивления

$$\bar{R} = -\alpha \bar{v}_1, \text{ где } \alpha = 50 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}.$$

Решение

1. Рассмотрим движение катера в пространстве Земли (рис. 2.4).
2. *Заданные внешние силы:* сила тяжести катера \bar{P}_1 , сила Архимеда \bar{A} , сила сопротивления воды \bar{R} .
3. *Внешние связи:* нет.
4. Катер движется под действием сил:

$$\left(\bar{P}_1, \bar{A}, \bar{P}_2, \bar{R}, \{ \bar{F}_k^i \} \right).$$

5. Составим дифференциальное уравнение движения центра масс катера в проекции на ось x :

$$m_1 \ddot{x}_C = -\alpha \dot{x} \Rightarrow \ddot{x}_C = -\frac{\alpha}{m} \dot{x}_C.$$

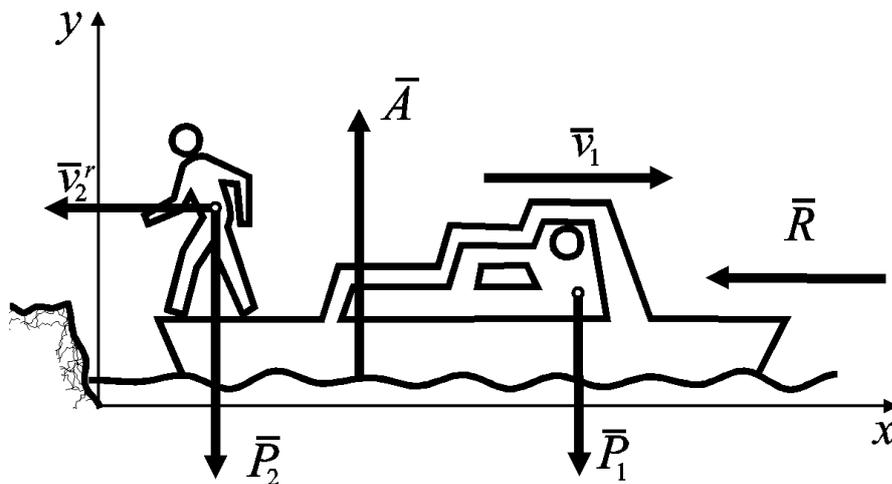


Рис. 2.4

Выражение для \ddot{x}_C представим в виде:

$$\frac{d \dot{x}_C}{d x_C} \cdot \frac{d x_C}{d t} = -\frac{\alpha}{m} \dot{x}_C \text{ или } d \dot{x}_C = -\frac{\alpha}{m} d x_C.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение

$$\int_{v_1}^0 d\dot{x}_C = -\frac{\alpha}{m} \int_0^S dx_C ,$$

найдем

$$S = \frac{m_1 v_1}{\alpha}.$$

Путь S , пройденный катером до остановки равен

$$S = \frac{600 \cdot 0,29}{50} = 3,48 \text{ м.}$$

Пример 2.5

Механизм, состоящий из груза A массой 50 кг, блока B массой 80 кг (большой радиус $R = 30$ см, меньший $r = 10$ см) и цилиндра E массой 120 кг радиусом $R_E = r/2$, установлен на призме D массой 210 кг, находящейся на горизонтальной плоскости. Трение между призмой и плоскостью отсутствует. Груз A получает перемещение $S = 1,2$ м относительно призмы вдоль ее поверхности влево; $\alpha = 75^\circ$ (рис. 2.5). Куда и на какое расстояние переместится призма?

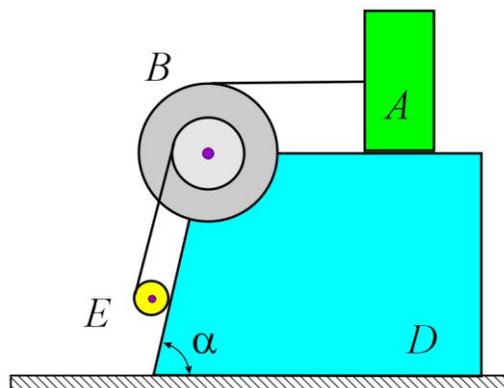


Рис. 2.5

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из груза A , блока B , и цилиндра E , установленных на призме D в пространстве неподвижного основания. Задаем систему координат.

2. Внешние заданные силы: силы тяжести тел A , B , E , D :

$$\bar{G}_A, \bar{G}_B, \bar{G}_E, \bar{G}_D.$$

3. *Внешние связи*: гладкая поверхность, её реакция \bar{N} .

4. Применим к системе теорему о движении центра масс в проекции на горизонтальную ось x .

$$M \frac{dv_{Cx}}{dt} = \sum F_{kx} = 0 \Rightarrow v_{Cx} = \text{const.}$$

Поскольку в начальный момент времени система находилась в покое, т.е. $\dot{x}_C^0 = 0 \Rightarrow v_{Cx} = 0$. Следовательно, $x_C = \text{const}$.

Найдем x_C^0 , x_{C0} и x_C в начальном и конечном положениях системы:

$$x_C^0 = \frac{m_A x_{CA}^0 + m_B x_{CB}^0 + m_E x_{CE}^0 + m_D x_{CD}^0}{m_A + m_B + m_E + m_D};$$

$$x_C^0 = \frac{m_A (x_{CA}^0 + \Delta_A) + m_B (x_{CB}^0 + \Delta_D) + m_E (x_{CE}^0 - \Delta_E) + m_D (x_{CD}^0 + \Delta_D)}{m_A + m_B + m_E + m_D}.$$

Здесь через x_{CA} , x_{CB} , x_{CE} , x_{CD} обозначены центры масс тел системы, Δ_A , Δ_B , Δ_E и Δ_D обозначены абсолютные смещения центров масс тел.

Так как $x_C^0 = x_C$, $x_{C0} = x_C$, то получаем:

$$m_A \Delta_A + (m_B + m_D) \Delta_D + m_E \Delta_E = 0.$$

Абсолютное смещение тел A , B и E представим, как сумму относительного смещения, зависящего от величины S относительного смещения груза A , и неизвестного переносного смещения Δ_D , равного абсолютному смещению призмы, относительно которой задавалось смещение S . Направление оси x определяет знаки смещений: налево с минусом, направо с плюсом.

Предполагаем, что призма сместится вправо. Перемещение центра цилиндра E относительно призмы и перемещение груза A связаны так же, как связаны их скорости.

Цилиндр E совершает плоское движение. Абсолютное смещение его центра в проекции на ось x равно $\Delta_D - S_E \cos \alpha$, где S_E — смещение центра цилиндра вдоль наклонной поверхности призмы.

Выразим S_E через S . Для этого свяжем скорости груза A и центра масс цилиндра E . Мгновенный центр скоростей цилиндра находится в точке касания призмы, поэтому скорость его центра масс относительно призмы вдвое меньше скорости нити, накручиваемой на обод.

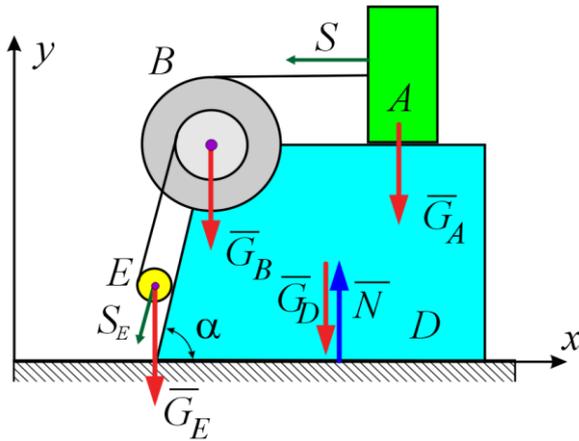


Рис. 2.6

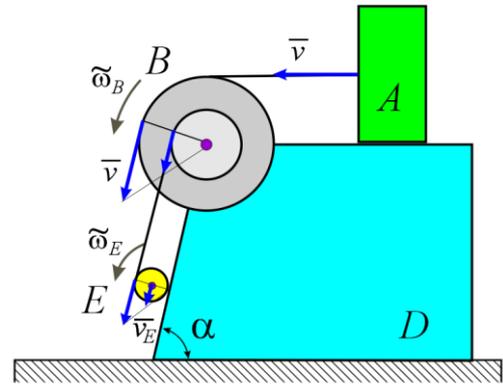


Рис. 2.7

Скорость груза A выражаем через угловую скорость блока (рис. 2.7):

$$v_E = 0,5\omega_B r, \quad v_A = \omega_B R.$$

Исключая отсюда ω_B , имеем связь скоростей:

$$v_E = 0,5v_A \frac{r}{R}.$$

Интегрируя это соотношение при нулевых начальных значениях, получаем искомую зависимость:

$$S_E = 0,5S_A \frac{r}{R}.$$

Находим выражение абсолютных смещений всех тел через Δ_D и S :

$$\Delta_A = \Delta_D - S, \quad \Delta_B = \Delta_D, \quad \Delta_E = \Delta_D - 0,5S \frac{r}{R} \cos \alpha.$$

Подставляя в это уравнение абсолютные смещения, получаем уравнение

$$m_A \Delta_A + m_B \Delta_B + m_E \Delta_E + m_D \Delta_D = 0.$$

$$m_A (\Delta_D - S) + m_B \Delta_D + m_E (\Delta_D - 0,5Sr / R \cos \alpha) + m_D \Delta_D = 0.$$

Решая это уравнение относительно Δ_D , получим:

$$\Delta_D = \frac{m_A S + m_E 0,5Sr / R \cos \alpha}{m_A + m_B + m_E + m_D} = 14,39.$$

Призма D переместится вправо на 14,39 см.

Предупреждение типичных ошибок

1. В знаменателе ответа должна стоять сумма масс всех тел системы. Если вместо суммы масс возникла разность, это значит, что при вычислении абсолютного смещения получилась ошибка в знаке. Следите за соответствием направления координатной оси и направлением перемещения.

2. Внутренние силы не влияют на решение задачи. Так, если дополнить условия задач трением качения цилиндров о призму, то коэффициент трения в решение не войдет. А вот малейшее трение между призмой и неподвижным основанием испортит задачу настолько, что уравнение D применять будет уже нельзя, так как не выполняется условие равенства нулю проекций сил на горизонтальную ось. Для более ясного представления задачи можно считать, что призма находится на тонкой пленке воды или масла на идеально полированном столе.

2.2. Теоремы о кинетическом моменте

Кинетический момент точки относительно оси

Кинетическим моментом точки относительно оси назовем алгебраический момент проекции количества движения точки на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 2.8):

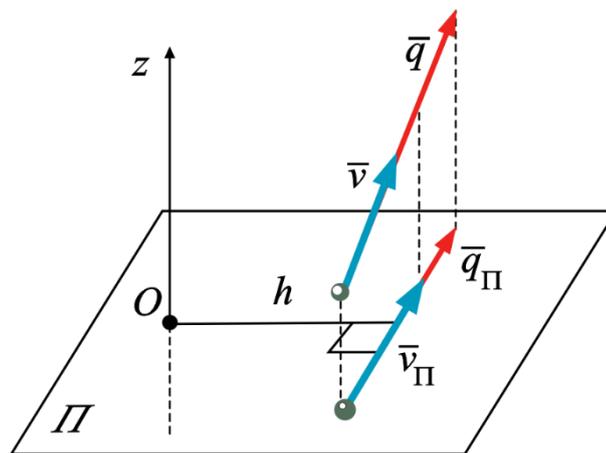


Рис. 2.8

$$k_z = \text{mom}_O(\bar{q}_\Pi) = \pm m v_\Pi h.$$

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на алгебраическую угловую скорость.

$$K_z = I\tilde{\omega}.$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы или теорему о кинетическом моменте механической системы в дифференциальной форме:

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно какого-либо неподвижного центра или оси равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра или оси.

$$\frac{d \bar{K}_O}{d t} = \sum_{k=1}^n \overline{mom}_O \bar{F}_k^e.$$

Спроецировав на оси координат получим:

$$\frac{d K_x}{d t} = \sum_{k=1}^n mom_x \bar{F}_k^e; \quad \frac{d K_y}{d t} = \sum_{k=1}^n mom_y \bar{F}_k^e; \quad \frac{d K_z}{d t} = \sum_{k=1}^n mom_z \bar{F}_k^e.$$

Можно также сформулировать теорему о кинетическом моменте механической системы относительно центра масс: *производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра масс равна главному моменту внешних сил системы относительно центра масс.*

$$\frac{d \bar{K}_C^r}{d t} = \bar{L}_C^e.$$

Здесь $\bar{L}_C^e = \sum_{k=1}^n \overline{mom}_C \bar{F}_k^e$ – главный момент внешних сил системы относительно центра масс.

носительно центра масс.

Из теоремы о кинетическом моменте можно, как следствие, получить законы сохранения кинетического момента.

1. Если главный момент внешних сил системы относительно центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра постоянен по модулю и направлению:

$$\sum_{k=1}^n \overline{mom}_O \bar{F}_k^e = 0 \Rightarrow \bar{K}_O = \text{const.}$$

2. Если главный момент внешних сил системы относительно какой-либо оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси остается постоянным:

$$\sum_{k=1}^n mom_z \bar{F}_k^e = 0 \Rightarrow K_z = \text{const.}$$

Пример 2.6

Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат, за концы которого ухватились две обезьянки A и B одинакового веса (рис. 2.9 а). Что произойдёт с обезьянкой B , если обезьянка A станет подниматься по канату со скоростью u относительно каната?

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы (блок, канат, обезьянки) в пространстве основания.
2. Заданные внешние силы: силы тяжести обезьян, \bar{P}_A, \bar{P}_B ; ($P_A = P_B = P$).
3. Внешние связи: подшипник O блока, его реакция \bar{R}_O .
4. Механическая система движется под действием сил:

$$\left(\bar{P}_A, \bar{P}_B, \bar{R}_O, \left\{ \bar{F}_k^i \right\}_n \right).$$

5. Применим теорему о кинетическом моменте системы относительно оси z вращения блока

$$\frac{d K_z}{d t} = \sum_{k=1}^n m_z \bar{F}_k^e = 0.$$

Следовательно,

$$K_z = \text{const}, \text{ так как } K_{z0} = 0 \Rightarrow K_z = 0.$$

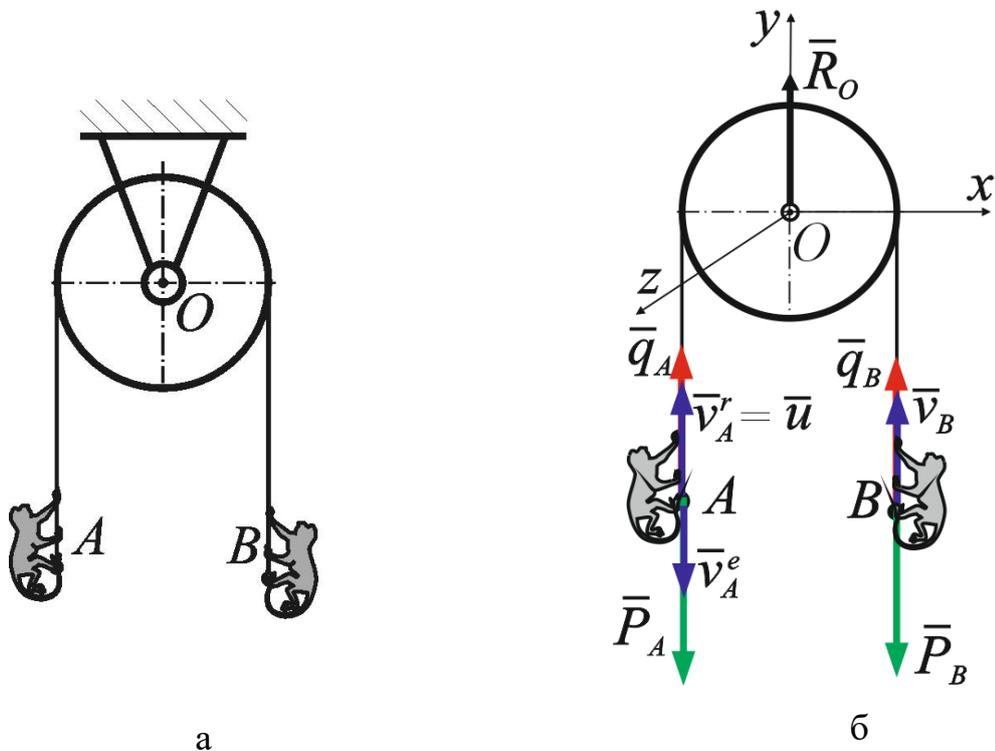


Рис. 2.9

Составим кинетический момент системы относительно оси z :

$$K_z = K_z(A) + K_z(B),$$

где $K_z(A)$ и $K_z(B)$ – моменты количеств движения обезьянок относительно оси блока.

Количество движения обезьянки B : $\bar{q}_B = \frac{P}{g} \bar{v}_B$.

Чтобы найти количество движения обезьянки A , представим её движение в пространстве основания сложным, связав подвижную систему отсчёта с канатом, модуль скорости которого равен v_B .

По теореме сложения скоростей имеем

$$\bar{v}_A = \bar{v}_A^r + \bar{v}_A^e,$$

где

$$\bar{v}_A^r = \bar{u}, \text{ а } \bar{v}_A^e = \bar{v}_B.$$

Проецируя векторное равенство на ось y , найдём

$$v_{Ay} = u - v_B; \quad q_{Ay} = \frac{P}{g}(u - v_B),$$

тогда

$$K_z = m_z \bar{q}_A + m_z \bar{q}_B;$$

$$K_z = -\frac{P}{g}(u - v_B)r + \frac{P}{g}v_B r = 0.$$

Откуда получим

$$-u + 2v_B = 0 \Rightarrow v_B = \frac{u}{2} \text{ и } v_A = u - v_B = \frac{u}{2}.$$

Т.е. скорости обезьянок в пространстве основания одинаковы и равны $u/2$. Как висели они одна напротив другой, так и будут подниматься вверх. Только одна при этом работает, а другая просто катается.

Пример 2.7

По горизонтальной круглой платформе радиуса $R = 1$ м и веса $P = 200$ Н, имеющей в начальный момент времени $t_0 = 0$ угловую скорость $\omega_0 = 2$ с⁻¹ движется материальная точка M с массой $m = 1$ кг согласно закону $\sigma = 0,8 + 0,4 \cos(0,5\pi t)$. Определить угловую скорость ω платформы в момент времени $t = 1$ с. если угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 2.10).

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из платформы (твёрдое тело) и материальной точки M в пространстве основания $Oxuz$ (рис. 2.11).

2. *Внешние заданные силы:* силы тяжести платформы \bar{P} и материальной точки \bar{G} .

3. *Внешние связи:* цилиндрический, подшипник A и сферический подшипник B . По условию задачи реакции \bar{R}_A и \bar{R}_B связей не надо определять, поэтому покажем их произвольно, не раскладывая на составляющие. Так как трением в подшипниках пренебрегаем, то линии действия сил \bar{R}_A и \bar{R}_B должны пересекать ось Oz .

4. Внешние и внутренние силы, под действием которых движется рассматриваемая система: $(\bar{P}, \bar{G}, \bar{R}_A, \bar{R}_B, \{F_k^i\})$.

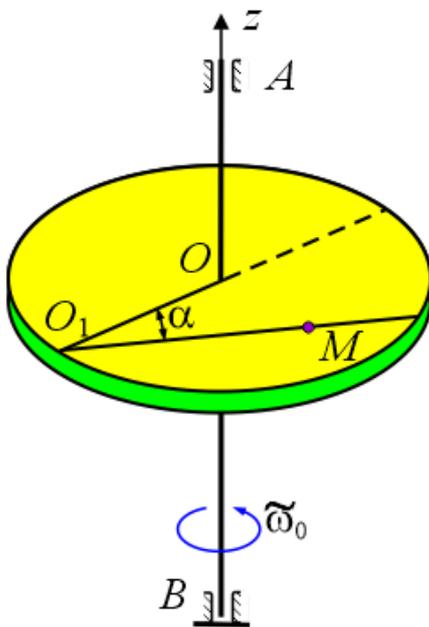


Рис. 2.10

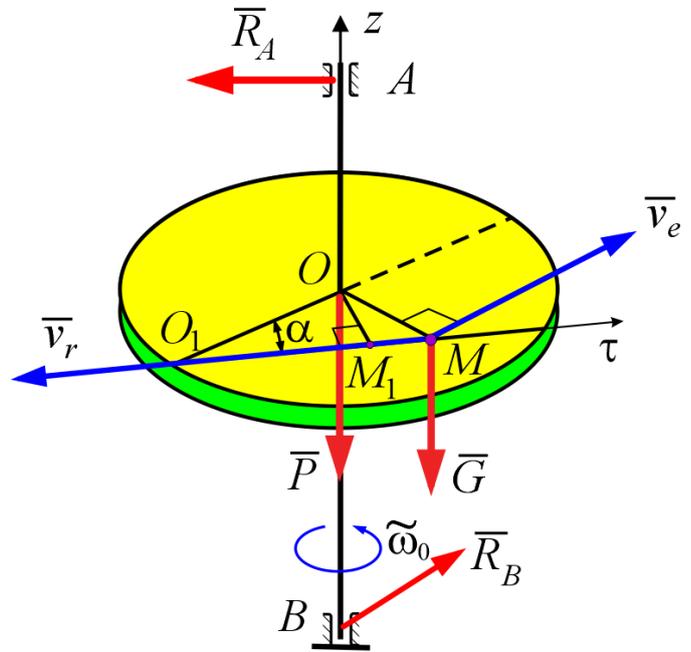


Рис. 2.11

5. Для нахождения угловой скорости $\tilde{\omega}$ платформы в момент $t=1$ с воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси Oz :

$$\frac{d K_z}{d t} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_z \bar{F}_k^e = 0,$$

так как все внешние силы или параллельны оси, или пересекают ее. Следовательно, кинетический момент системы относительно оси сохраняется во все время движения:

$$K_z^t = \text{const} = K_{z0}.$$

где K_{z0} – кинетический момент системы в начальный момент времени, а K_z^t – в момент времени $t = 1$ с.

В любой момент времени кинетический момент системы складывается из кинетического момента $K_{z\text{пл}}$ платформы и кинетического момента $K_{z\text{т}}$ материальной точки:

$$K_z = K_{z\text{пл}} + K_{z\text{т}}.$$

В начальный момент времени

$$K_{z\text{пл}} = J_z \omega_0 = \frac{PR^2 \omega_0}{2g} = 20,4 \frac{\text{кг м}^2}{\text{с}},$$

а в момент времени $t = 1$ с $\Rightarrow K_{z\text{пл}} = I_z \tilde{\omega} = 10,2 \tilde{\omega}$. Знак $K_{z\text{пл}}$ будет зависеть от знака алгебраической величины угловой скорости платформы.

Кинетический момент $K_{z\text{т}}$ материальной точки относительно оси вращения платформы находится как момент количества ее движения:

$$K_{z\text{пл}} = \text{mom}_z (m\bar{v}),$$

где \bar{v} – скорость точки в пространстве основания.

Для нахождения \bar{v} представим движение точки M сложным, связав подвижное пространство с платформой. Из теоремы сложения скоростей точки имеем:

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e.$$

Относительную скорость точки найдём через её проекцию на ось τ :

$$v_r^\tau = \dot{\sigma} = -0,2\pi \sin(0,5\pi t).$$

В начальный момент $t = 0$ $v_r^r = 0$, а в момент $t = 1$ с $v_r^r = -0,63 \frac{\text{М}}{\text{с}}$.

Переносная скорость $v_r^e = OM\omega$, $\bar{v}_r^e \perp \bar{\omega}$.

В начальный момент $v_r^e = 1,18 \frac{\text{М}}{\text{с}}$, $\bar{v}_r^e \perp \bar{\omega}_0$, а в момент $t = 1$ с –
 $v_r^e = 5,1 \frac{\text{М}}{\text{с}}$.

Теперь кинетический момент K_{zT} материальной точки M найдем так:

$$K_{zT} = mom_z(m\bar{v}_e) + mom_z(m\bar{v}_r).$$

В начальный момент $K_{zT} = mom_z(m\bar{v}_e) = 0,7 \frac{\text{кг М}^2}{\text{с}}$.

В момент времени $t = 1$ с:

$$K_{zT} = mom_z(m\bar{v}_e) + mom_z(m\bar{v}_r) = m\omega OM^2 - mv_r R \sin \alpha.$$

Из закона сохранения кинетического момента системы относительно оси находим угловую скорость платформы в момент времени $t = 1$ с.

$$\tilde{\omega} = 2,59 \text{с}^{-1}.$$

Пример 2.8

Эпициклический механизм, расположенный в вертикальной плоскости (рис. 2.12), имеет массу водила m , массу колеса M , длину водила l , радиус колеса r . Найти угловое ускорение водила в функции от угла φ . Колесо – однородный диск, водило – однородный стержень.

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из водила и подвального колеса относительно неподвижного основания.

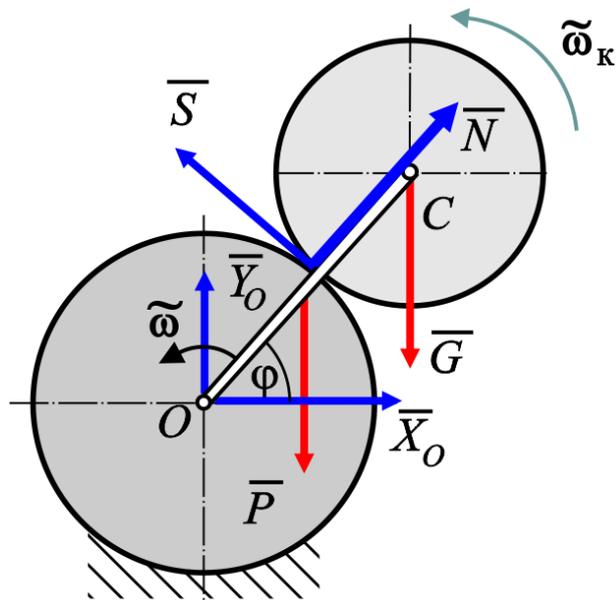


Рис. 2.12

2. Заданные внешние силы: силы тяжести водила и колеса: \bar{P} , \bar{G} .

$$P = mg; \quad G = Mg.$$

3. Внешние связи: неподвижный шарнир O , его реакции – \bar{X}_O , \bar{Y}_O ; шероховатая поверхность колеса, реакции – \bar{S} , \bar{N} .

4. Механизм движется под действием сил:

$$\left(\bar{P}, \bar{G}, \bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{S}, \bar{N}, \{ \bar{F}_k^i \}_n \right).$$

5. Применим теорему о кинетическом моменте системы относительно оси, проходящей через центр O :

$$\frac{d\tilde{K}_O}{dt} = \sum \tilde{m}_O \bar{F}_k^e = -P \frac{l}{2} \cos \varphi - Gl \cos \varphi + S(l-r).$$

Кинетический момент системы найдется как сумма кинетических моментов водила и колеса:

$$\tilde{K}_O = \tilde{K}_{O_{\text{вод}}} + \tilde{K}_{O_{\text{кол}}} = \frac{ml^2}{3} \tilde{\omega} + M \tilde{\omega} l l + \frac{M r^2}{2} \tilde{\omega}_k.$$

Поскольку $\omega_k = \frac{l\omega}{r}$, то получаем

$$\tilde{K}_O = \tilde{\omega} \left(\frac{ml^2}{3} + M l^2 + \frac{M r l}{2} \right) = \tilde{\omega} I^*.$$

Здесь $I^* = \frac{ml^2}{3} + M l^2 + \frac{M r l}{2}$ – приведенный момент инерции.

В итоге

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} I^* = S(l-r) - \left(\frac{m}{2} + M \right) l g (\cos \varphi).$$

Теперь рассмотрим движение колеса относительно его центра масс:

$$\frac{d\tilde{K}_C^r}{dt} = \sum_{k=1}^n \tilde{m}_C F_k^e = -S r \Rightarrow \tilde{\varepsilon} \frac{M r l}{2} = -S r \Rightarrow S = -\tilde{\varepsilon} \frac{M l}{2}.$$

Откуда находим

$$\tilde{\varepsilon} I^* = -\tilde{\varepsilon} \frac{M l}{2} (l-r) - l \left(\frac{M}{2} + m \right) \cos \varphi.$$

В итоге получим

$$\tilde{\varepsilon} = -\frac{l\left(\frac{M}{2} + m\right)g \cos \varphi}{I^* + \frac{Ml}{2}(l-r)} = -\frac{(M+2m)lg(\cos \varphi)}{2I^* + Ml(l-r)}.$$

2.3. Работа и мощность силы

Рассмотрим движение точки M под действием силы \bar{F} . Пусть \bar{r} – радиус-вектор точки относительно начала системы отсчета $Oxyz$ (рис. 2.13).

Элементарная работа силы – величина равная скалярному произведению вектора силы на вектор $d\bar{r}$ элементарного перемещения точки приложения силы:

$$\delta A = \bar{F} \cdot d\bar{r} \Rightarrow \begin{cases} \delta A = F ds \cos \alpha, \\ \delta A = F \cos \alpha \cdot d\sigma = F_\tau d\sigma, \\ \delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \\ \delta A = \bar{F} \cdot \bar{v} dt. \end{cases}$$

Здесь α – угол между силой и скоростью точки, $ds = |d\bar{r}|$ – путь, пройденный точкой за время dt , $d\sigma$ – приращение дуговой координаты точки, F_x, F_y, F_z – проекции силы на оси координат.

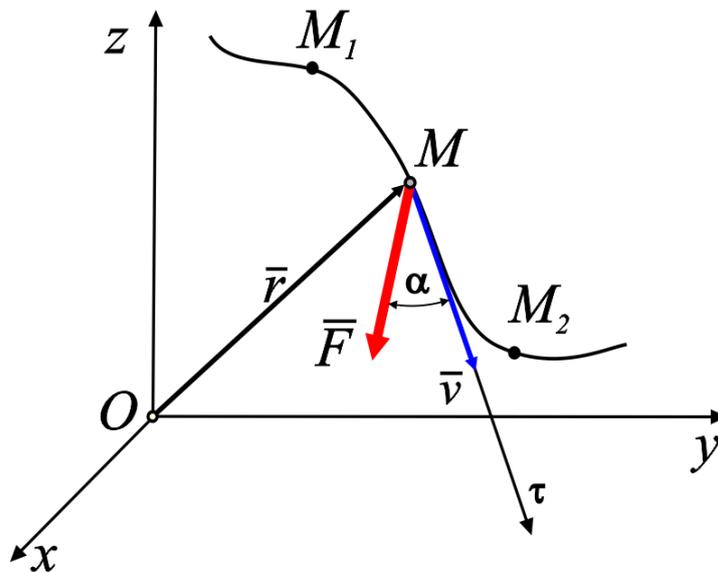


Рис.2.13

Работой силы на конечном перемещении $M_0 M$ называется интеграл от элементарных работ на этом перемещении

$$A_{M_0 M} = \int_{M_0}^M \delta A = \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_0}^x F_x dx + \int_{y_0}^y F_y dy + \int_{z_0}^z F_z dz = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{\sigma_0}^{\sigma} F_{\tau} d\sigma.$$

Если $\vec{F} = \text{const}$ и путь прямолинеен (рис. 2.14), то можем записать

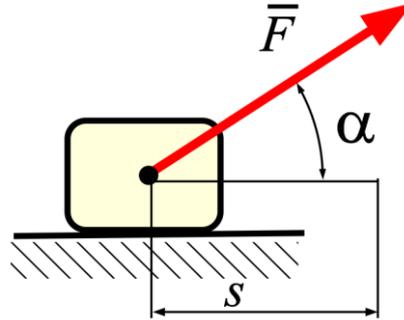


Рис. 2.14

$$A = F s \cos \alpha.$$

Размерность работы силы

$$[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Мощность (работоспособность) силы – отношение элементарной работы к промежутку времени, в течение которого эта работа совершена:

$$W = \frac{\delta A}{dt} \Rightarrow \begin{cases} W = \vec{F} \cdot \vec{v} = F v \cos \alpha, \\ W = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}, \\ W = F_{\tau} v_{\tau}. \end{cases}$$

$$A = \int_{t_0}^t W dt.$$

Размерность мощности $[W] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$

В качестве единицы мощности часто используют *лошадиную силу*:

$$1 \text{ л.с.} = 735,5 \text{ Вт} = 0,7355 \text{ кВт}.$$

Очевидно, что работа и мощность системы сил равна сумме работ и мощностей сил системы.

Примеры вычисления работы

Работа силы тяжести (рис. 2.15)

Силу тяжести тела вблизи поверхности Земли считаем постоянной:

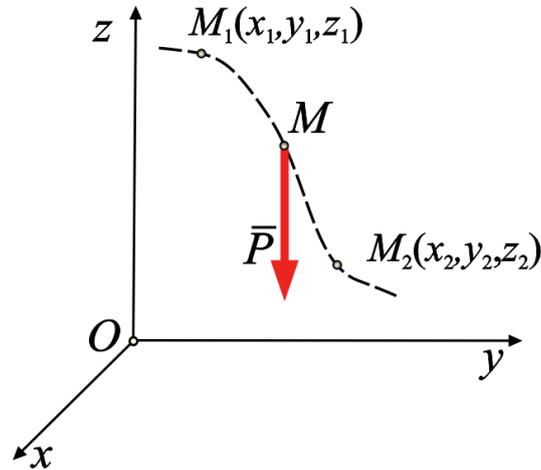


Рис. 2.15

$$P_x = P_y = 0, \quad P_z = -m g .$$

При перемещении точки из положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положение $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\delta A_p = P_x dx + P_y dy + P_z dz = P_z dz = -m g dz .$$

$$A_{1,2} = - \int_{z_1}^{z_2} m g dz = -m g \int_{z_1}^{z_2} dz = -m g \Delta z .$$

Работа силы тяжести не зависит от формы пути и равна произведению веса тела на изменение высоты центра тяжести.

Работа силы упругости (рис. 2.16)

Будем рассматривать линейную силу упругости, когда

$$F_x = -c (x - x_0) ,$$

где x_0 – длина недеформированной пружины.

Тогда элементарная работа

$$\delta A = F_x dx = -F dx = -c (x - x_0) dx .$$

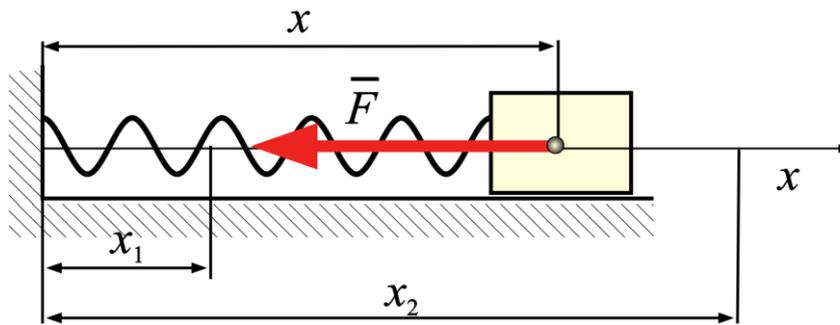


Рис. 2.16

Полная работа силы упругости пружины

$$A_{1,2} = - \int_{x_1}^{x_2} c(x - x_0) dx = - \frac{c(x - x_0)^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = - \frac{c(\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2)}{2},$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2$ – деформации пружины в начальном и конечном положениях движущегося тела.

Мощность пары сил, приложенной к твердому телу

$$W_{PQ} = \bar{m}_{PQ} \cdot \bar{\omega}.$$

Работа внутренних сил механической системы

Элементарная работа сил взаимодействия между точками системы равна взятому с обратным знаком произведению одной из сил взаимодействия на изменение расстояния между точками.

Для твердого тела, расстояние между точками которого остается неизменным, сумма работ и сумма мощностей внутренних сил равна нулю.

Пример 2.9

Однородный диск радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальному основанию, имея скорость центра \bar{v}_C и испытывая сопротивление качению. Коэффициент трения качения k . Масса диска m . Найти мощность сил, приложенных к диску.

Решение

1. Рассмотрим движение диска относительно неподвижного основания (рис. 2.17).
2. *Внешние заданные силы:* сила тяжести диска: $\bar{P} = m \bar{g}$.

3. *Внешние связи:* шероховатая, деформируемая поверхность. Её реакции: \bar{N} , \bar{F} , \tilde{m} .

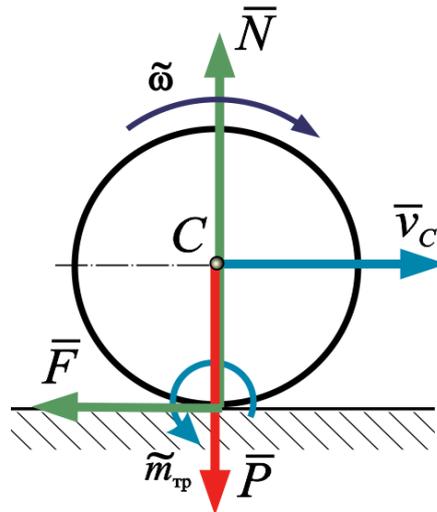


Рис. 2.17

4. Диск движется под действием системы внешних сил: $(\bar{P}, \bar{N}, \bar{F}, \tilde{m})$.
 5. Находим сумму мощностей сил, приложенных к диску:

$$W = \bar{P} \cdot \bar{v}_C + \bar{N} \cdot \bar{v}_K + \bar{F} \cdot \bar{v}_K + \tilde{m} \tilde{\omega} = -k N \omega = -k m g \frac{v}{r}.$$

2.4. Кинетическая энергия точки и механической системы

Рассмотрим движение механической системы $\{A_k\}_n$ точек в пространстве инерциальной системы отсчета $Oxyz$. Пусть m_k – масса точки A_k , \bar{v}_k – ее скорость.

Кинетической энергией точки назовем скалярную величину равную половине произведения массы точки на квадрат ее скорости

$$T = \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы материальных точек определяется как сумма кинетических энергий точек системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2.$$

Кинетическая энергия всегда положительная величина. Размерность кинетической энергии $[T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$.

Кинетическая энергия твердого тела

Для твердого тела можем записать

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} v^2 dm.$$

Здесь M – масса тела, dm – масса элементарного объема, v – скорость этого объема.

Рассмотрим частные случаи движения твердого тела.

1. Поступательное движение

Здесь все точки тела движутся одинаково со скоростью центра масс, поэтому

$$T = \frac{M v_C^2}{2}.$$

2. Вращение тела вокруг неподвижной оси (рис. 2.18)

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} v^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(M)} \omega^2 h^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int_{(M)} h^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2.$$

3. Плоское движение (рис. 2.19)

В этом случае движение тела можно представить, как поступательное со скоростью полюса и вращательное вокруг оси, проходящей через полюс, перпендикулярно основной плоскости. Взяв за полюс центр масс, получаем:

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{z_C} \omega^2}{2},$$

где I_{z_C} – момент инерции относительно оси Z проходящей через центр масс C .

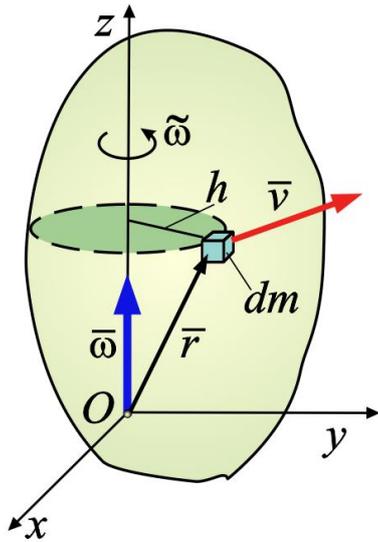


Рис. 2.18

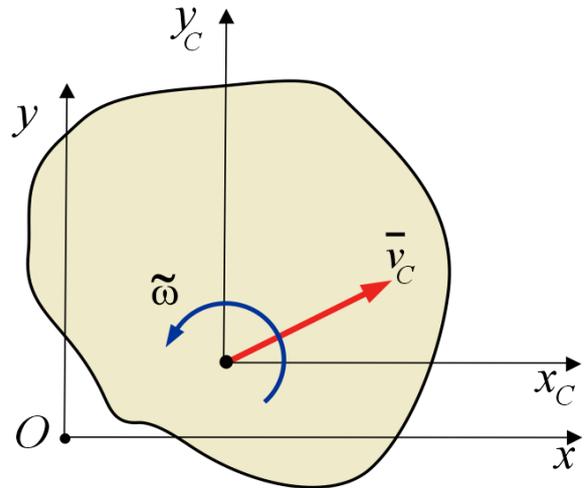


Рис. 2.19

Пример 2.10

Найти кинетическую энергию однородного диска радиуса R и массы m , который катится без проскальзывания и имеет скорость центра масс v_C .

Диск совершает плоское движение.

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{z_C} \omega^2}{2}; \quad I_{z_C} = \frac{m r^2}{2}; \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

В итоге получим:

$$T = \frac{3}{4} m v_C^2.$$

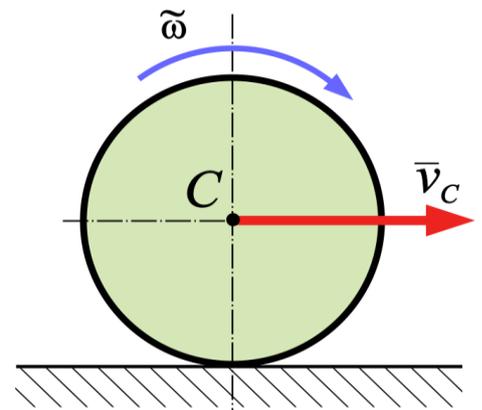


Рис. 2.20

2.5. Теоремы о кинетической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: *приращение кинетической энергии механической системы на элементарном перемещении равно элементарной работе внешних и внутренних, действовавших на точки механической системы на этом перемещении.*

$$dT = \sum_{k=1}^n \delta A_k^e + \sum_{k=1}^n \delta A_k^i. \quad (2.1)$$

Разделив последнее уравнение на dt будем иметь:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n W_k^e + \sum_{k=1}^n W_k^i.$$

Это теорема о производной кинетической энергии по времени (теорема о $\frac{dT}{dt}$): *производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на точки механической системы.*

Проинтегрировав обе части уравнения (2.1) на некотором перемещении из положения I в положение II, получим

$$T_{II} - T_I = \sum_{k=1}^n A_{k,I,II}^e + \sum_{k=1}^n A_{k,I,II}^i.$$

Это теорема о кинетической энергии в интегральной форме: *приращение кинетической энергии механической системы на конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил системы на этом перемещении.*

Решение задач

Теоремой о кинетической энергии удобно пользоваться в том случае, когда система является неизменяемой. В этом случае можно исключить из рассмотрения все неизвестные внутренние силы.

Теорему об изменении кинетической энергии применяют там, где силы постоянны или зависят от положения, и нужно определить скорость в начале или в конце перемещения или путь, пройденный телом.

Теорему о $\frac{dT}{dt}$ очень удобно применять для нахождения ускорения системы.

Пример 2.11

Найти, какую скорость необходимо сообщить ракете массой m на поверхности Земли, чтобы она поднялась на высоту H . Соппротивлением воздуха пренебрегаем. Сила земного тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Земли.

Решение

1. Рассмотрим движение ракеты как материальной точки в пространстве неподвижной Земли (рис. 2.21).

2. Внешние заданные силы: сила притяжения

Земли \vec{F} . Её модуль $F = \frac{k}{x^2}$.

Если при $x = R$, имеем $F = mg$, то

$$k = mgR^2, \text{ откуда } F = \frac{mgR^2}{x^2}.$$

3. Внешние связи: нет.

4. Ракета движется под действием одной силы (\vec{F}).

5. По теореме об изменении кинетической энергии будем иметь

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_F.$$

В начале движения

$$x = R + H \Rightarrow v = v_0.$$

Работа силы \vec{F} найдется как

$$A_F = - \int_{H_0}^H \frac{mgR^2}{x^2} dx = \frac{mgR^2}{x} \Big|_R^{R+H} = mgR^2 \left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right) = - \frac{mgR^2 H}{R(R+H)}.$$

Получаем

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -mgR \frac{H}{(R+H)}, \quad (2.2)$$

откуда $v_0 = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}$.

Поставим вопрос иначе: на какую максимальную высоту поднимется ракета, стартующая со скоростью v_0 ?

Из уравнения (2.2) получаем

$$(H+R) \frac{mv_0^2}{2} = mgRH,$$

или

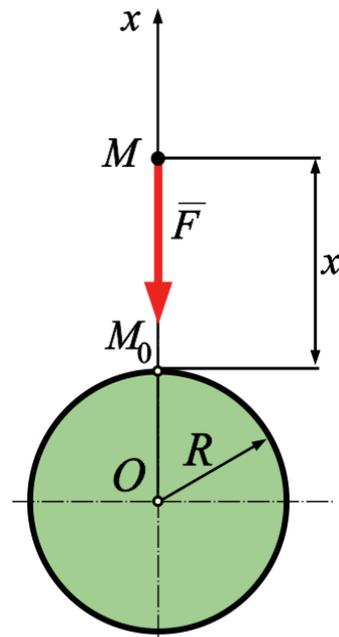


Рис. 2.21

$$v_0^2 H + v_0^2 R = 2gRH,$$

иначе,

$$H(2gR - v_0^2) = v_0^2 R.$$

Окончательно находим

$$H = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}.$$

При начальной скорости

$$v_0 > \sqrt{2gR} \approx 11,2 \cdot 10^3 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

ракета уйдет из сферы земного притяжения.

Пример 2.12

Груз массы m опускается на канате с постоянной скоростью v_0 . Определить дополнительное растяжение каната при мгновенной остановке его верхнего конца, если длина каната l , его модуль упругости E .

Решение

1. Рассмотрим движение груза в пространстве неподвижного основания (рис. 2.22).

2. *Внешние заданные силы:* сила тяжести груза \bar{P} ; $P = mg$.

3. *Внешние связи:* канат, его реакция \bar{N} .

4. Груз движется под действием внешних сил:

$$(\bar{P}, \bar{N}).$$

5. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии на участке растяжения каната от момента остановки каната до момента остановки груза

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i.$$

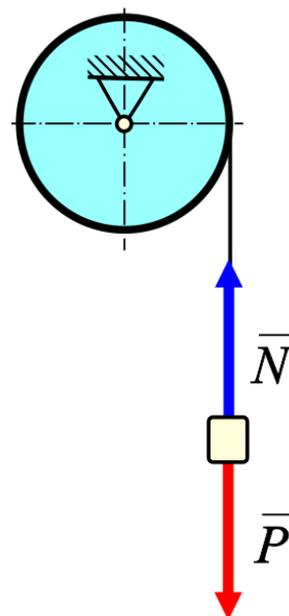


Рис. 2.22

В момент остановки каната $T_0 = \frac{mv^2}{2}$. В момент остановки груза $T = 0$.

Сумма работ внешних сил:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = A_P + A_N = P \Delta l + A_N.$$

Вычислим работу силы \bar{N} – работу силы упругости. При равномерном движении канат подвержен статической деформации, $\lambda_{ст}$ определяемой соотношением $N = c \lambda_{ст}$, следовательно, работа силы упругости:

$$A_N = -\frac{c}{2} \left((\Delta l + \lambda_{ст})^2 - \lambda_{ст}^2 \right),$$

где $\lambda_{ст}$ – начальное удлинение каната, а $\Delta l + \lambda_{ст}$ – его конечное удлинение.

Тогда

$$-\frac{mv^2}{2} = P \Delta l - \frac{c}{2} \left((\Delta l + \lambda_{ст})^2 - \lambda_{ст}^2 \right),$$

$$mv^2 = c \Delta l^2 + 2c \lambda_{ст} \Delta l + c \lambda_{ст}^2 - c \lambda_{ст}^2 - 2P \Delta l.$$

С учетом, что $N = c \lambda_{ст}$, запишем:

$$mv^2 = c \Delta l^2 + 2c \lambda \Delta l - 2c \lambda \Delta l.$$

Кроме того, учтем, что жесткость каната $c = \frac{ES}{l}$, где E – модуль Юнга,

S – площадь сечения, l – длина каната.

Дополнительное растяжение каната Δl найдётся как

$$\Delta l = v \sqrt{\frac{m}{c}} = v \sqrt{\frac{ml}{ES}}.$$

Можем также найти динамическое напряжение в канате:

$$\sigma_d = \frac{E \Delta l}{l} = v \sqrt{\frac{mE}{Sl}}$$

Пример 2.13

В маятнике Максвелла однородный цилиндр весом G и радиусом R , падая вниз без начальной скорости разматывает нить. Определить скорость оси цилиндра в зависимости от высоты его опускания. Весом нити пренебречь.

Решение

1. Рассмотрим движение цилиндра в пространстве неподвижного основания (рис. 2.23).

2. *Внешние заданные силы:* сила тяжести цилиндра \bar{G} .

3. *Внешние связи:* нить, её реакция \bar{S} .

4. Цилиндр движется под действием сил

$$(\bar{S}, \bar{G}, \{\bar{F}_k^i\}_n).$$

5. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме

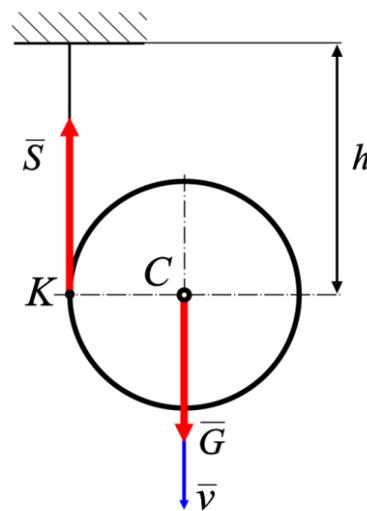


Рис. 2.23

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i.$$

Сумма работ внутренних сил абсолютно твердого цилиндра

$$\sum_{k=1}^n A_k^i = 0.$$

Сумма работ внешних сил

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = A_G + A_S = Gh + 0,$$

Кинетическая энергия цилиндра в начальном и конечном положениях найдётся как

$$T_0 = 0, \quad T = \frac{3}{4} \frac{G}{g} v_C^2.$$

Получаем

$$\frac{3}{4} \frac{G}{g} v_C^2 = Gh, \quad \Rightarrow \quad v_C = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}.$$

Пример 2.14

Груз A весом P при помощи нерастяжимой нити, перекинутой через блок B весом Q и радиусом r , приводит в движение каток D весом G и радиусом R (рис. 2.24). Коэффициент трения качения катка равен k .

Определить скорость и ускорение груза A после того, как он опустится на s . Блок и каток считать однородными цилиндрами.

Весом нити и ее проскальзыванием на блоке пренебречь. В начальный момент времени система находилась в покое.

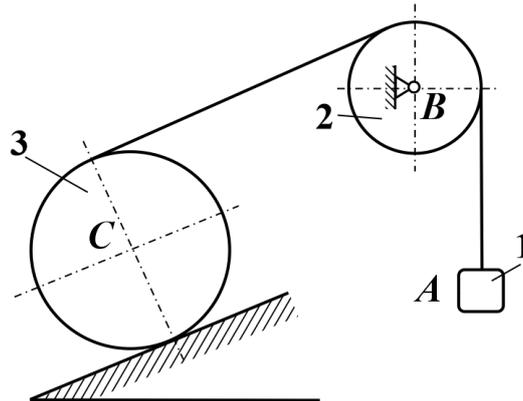


Рис. 2.24

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из блока B , груза A , катка D и нити в пространстве основания (рис. 2.25).

2. *Внешние заданные силы:* силы тяжести груза, блока, катка – \bar{P} , \bar{Q} , \bar{G} .

3. *Внешние связи:* цилиндрический подшипник B для блока и шероховатая деформируемая поверхность для катка.

Реакцию подшипника показываем двумя составляющими \bar{X}_B , \bar{Y}_B . Реакцию шероховатой деформируемой поверхности на каток показываем нормальной составляющей \bar{N} , силой трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$ и парой трения качения $\tilde{m}_{\text{тр}}$.

4. Движение системы происходит под действием следующих сил:

$$\left(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{G}, \bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{N}, \bar{F}_{\text{тр}}, \tilde{m}_{\text{тр}}, \{ \bar{F}_k^i \} \right),$$

где через $\{ \bar{F}_k^i \}$ обозначены все внутренние силы.

5. Для нахождения скорости груза A воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы при перемещении груза на расстояние S

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

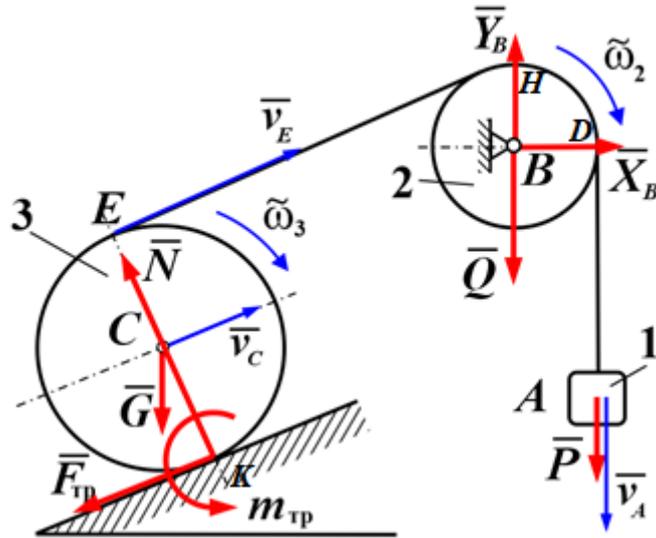


Рис. 2.25

В начальный момент времени система находилась в покое. Поэтому $T_0 = 0$.

Проведем кинематический расчет системы.

Пусть скорость груза v_A . Так как нить нерастяжима и не проскальзывает на блоке, то модули скоростей точек на ободу блока равны v_A .

$$v_D = v_H = v_E = v_A$$

Блок совершает вращательное движение. Его угловая скорость $\omega_2 = v_A / r$

Каток совершает плоское движение. Его угловую скорость ω_3 найдем, разделив модуль скорости точки E на расстояние KE от точки до мгновенного центра скоростей K катка

$$\omega_3 = \frac{v_A}{KE} = \frac{v_A}{2r}.$$

Скорость центра C катка $v_C = \omega_3 KC = 0,5v_A$.

Находим кинетическую энергию системы в конечном положении

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Груз A движется поступательно. Его кинетическая энергия

$$T_1 = \frac{Pv_A^2}{2g}.$$

Блок B совершает вращательное движение. Его кинетическая энергия

$$T_2 = \frac{1}{2} I_B \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Qr^2}{2g} \cdot \frac{v_A^2}{r^2} = \frac{Qv_A^2}{4g}.$$

Каток C совершает плоское движение. Его кинетическая энергия

$$T_2 = \frac{P}{2g} v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_3^2 = \frac{G}{2g} \cdot \frac{v_A^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{GR^2}{2g} \cdot \frac{v_A^2}{4R^2} = \frac{3G}{16g} v_A^2.$$

Следовательно, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{v_A^2}{2g} \left(P + \frac{Q}{2} + \frac{3G}{8} \right).$$

Сумма работ всех внешних сил равна:

$$\sum A_k^e = A_P + A_Q + A_G + A_{X_B} + A_{Y_B} + A_N + A_{F_{тр}} + A_{m_{тр}}.$$

Работа силы равна нулю, если точка приложения силы неподвижна. По этой причине равна нулю работа силы тяжести блока и реакций подшипника

$$A_Q = A_{X_B} = A_{Y_B} = 0.$$

Работы сил \vec{N} и $\vec{F}_{тр}$, приложенных к катку в точке K , также равны нулю, так как элементарное перемещение этой точки равно нулю:
 $A_N = A_{F_{тр}} = 0.$

Работа силы тяжести \vec{P} груза: $A_P = P \cdot s.$

Работа силы тяжести \vec{G} катка

$$A_G = Gs \cos(90^\circ + \alpha) = -0,5Gs \sin \alpha,$$

так как путь, пройденный центром тяжести катка, $s_C = 0,5s.$

Работа пары трения качения $m_{тр}$ будет равна:

$$A_{m_{тр}} = -m_{тр} \cdot \varphi = -\frac{k}{2R} Gs \cos \alpha,$$

так как угол поворота катка $\varphi = \frac{s}{2R}.$

Заметим, что связь между элементарными перемещениями каких-либо точек такая же, как и между скоростями этих точек.

Таким образом.

$$\sum A_k^e = s \left(P - \frac{1}{2} G \sin \alpha - \frac{k}{2R} G \cos \alpha \right).$$

Сумма работ внутренних сил равна нулю, так как тела системы твердые, нить нерастяжима и проскальзывание между ними отсутствует.

Теперь находим скорость груза A после того, как он опустится на расстояние s

$$v_A = \sqrt{\frac{2gs(2PR - GR\sin\alpha - Gk\cos\alpha)}{R(8P + 4Q + 3G)}}.$$

Для нахождения ускорения груза a_A . продифференцируем по времени полученное выражение, предполагая переменным путь s , проделанный грузом

$$\frac{dv_A}{dt} = \sqrt{\frac{g(2PR - GR\sin\alpha - Gk\cos\alpha)}{2sR(8P + 4Q + 3G)}} \frac{ds}{dt}.$$

Так как $a_A = \frac{dv_A}{dt}$, $v_A = \frac{ds}{dt}$, то учитывая последнее выражение, получим

$$a_A = \frac{g(2PR - GR\sin\alpha - Gk\cos\alpha)}{R(8P + 4Q + 3G)}.$$

Заметим, что ускорение груза A можно найти с помощью теоремы о производной кинетической энергии системы по времени. Дифференцируя по времени выражение для кинетической энергии системы, находим

$$\frac{dT}{dt} = \left(P + \frac{Q}{2} + \frac{3G}{8} \right) \frac{v_A a_A}{g}.$$

Сумма мощностей всех внешних сил равна:

$$\sum W_k = W_P + W_Q + W_G + W_{X_B} + W_{Y_B} + W_N + W_P + W_{F_{тр}} + W_{m_{тр}}$$

Мощности сил N и $F_{тр}$, приложенных к точке K , равны нулю, так как скорость этой точки равна нулю.

$$W_N = W_{F_{тр}} = 0.$$

Мощности сил Q , Y_B , X_B равны нулю, так как скорость точки B равна нулю

$$W_Q = W_{X_B} = W_{Y_B} = 0.$$

Мощности сил тяжести P и G равны:

$$W_P = \bar{P} \cdot \bar{v}_A = P \cdot v_A; \quad W_G = \bar{G} \cdot \bar{v}_C = -0,5G \cdot v_A \sin \alpha.$$

Мощность пары трения качения

$$N_{m_{\text{тр}}} = \tilde{m}_{\text{тр}} \cdot \tilde{\omega}_3 = -\frac{k}{2R} G v_A \cos \alpha.$$

Сумма мощностей всех внешних сил равна:

$$\sum W_k^e = \left(P - 0,5G \sin \alpha - \frac{k}{2R} G \cos \alpha \right) v_A.$$

Сумма мощностей внутренних сил равна нулю, так как тела системы твердые, нить нерастяжима и проскальзывание между ними отсутствует

$$\sum W_k^i = 0.$$

В итоге находим

$$a_A = \frac{4g(2PR - GR \sin \alpha - Gk \cos \alpha)}{R(8P + 4Q + 3G)}.$$

Пример 2.15

Груз 1 массой $m_1 = 60$ кг при помощи нерастяжимой нити, перекинутой через блок 2 массой $m_2 = 30$ кг и радиусами $r_2 = 30$ см и $R_2 = 60$ см, приводит в движение каток 3 массой $m_3 = 120$ кг и радиусом $R_3 = 30$ см (рис. 2.26). Радиус инерции блока 2 $\rho_2 = 30$ кг. Каток считать однородным сплошным цилиндром

Определить ускорение центра катка и натяжение нити между катком и блоком. Весом нити и ее проскальзыванием на блоке пренебречь.

Решение

1. Рассмотрим движение МС состоящей из груза 1, блока 2, катка 3 и нитей в пространстве неподвижного основания (рис. 2.27).

2. *Внешние заданные силы:* силы тяжести тел:

$$\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, P_1 = m_1 g, P_2 = m_2 g, P_3 = m_3 g$$

3. *Внешние связи:*

– неподвижная опора B , её реакции: \bar{X}_B, \bar{Y}_B ;

– шероховатая недеформируемая горизонтальная поверхность, её реакции: \bar{N} , $\bar{F}_{\text{тр}}$.

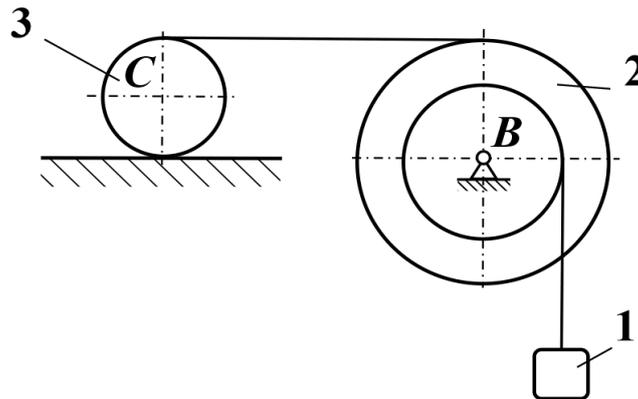


Рис. 2.26

4. Движение МС происходит под действием сил:

$$\left(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{N}, \bar{F}_{\text{тр}}, \{ \bar{F}_k^i \} \right).$$

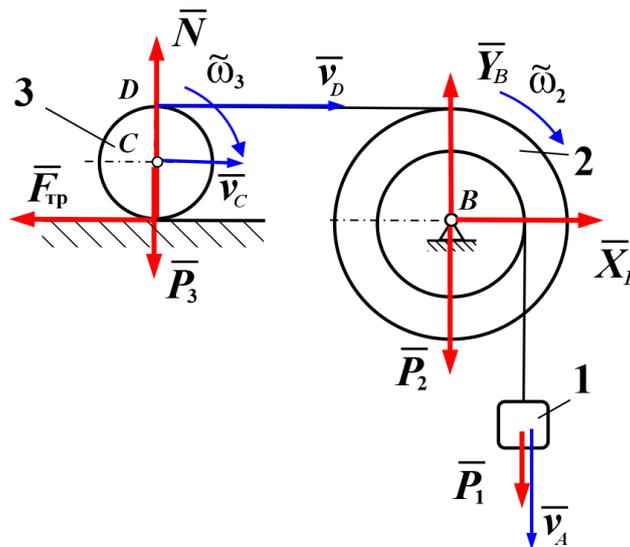


Рис. 2.27

5. Для решения задачи воспользуемся теоремой о производной кинетической энергии

$$\frac{dT}{dt} = \sum W_k^e + \sum W_k^i.$$

Кинетическая энергия МС равна сумме кинетической энергии её тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

где $T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ – кинетическая энергия груза 1; $T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2}$ – блока 2;

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{I_3 \omega_C^2}{2} \text{ – катка 3.}$$

Здесь: ω_2 и ω_3 – угловые скорости блока и катка (рис. 2.29); v_A и v_C скорость груза 1 и центра C катка 3; $I_2 = m_2 \rho_2^2$ – момент инерции блока относительно оси B ; $I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}$ – момент инерции катка относительно оси C .

Выразим угловые скорости ω_2 и ω_3 и скорость груза v_A через скорость центра катка:

$$\omega_2 = \frac{2v_C}{r_2}; \quad \omega_3 = \frac{v_C}{R_3}; \quad v_A = \frac{2r_2 v_C}{R_3}$$

Теперь для кинетической энергии получим $T = \frac{M v_C^2}{2}$,

$$\text{где } M = \left(2m_1 \frac{r_2^2}{R_2^2} + 2m_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + \frac{3}{2} m_3 \right).$$

Подсчитаем теперь мощности сил, действующих на механическую систему

$$W_{P_1} = P_1 v_A. \quad W_{P_2} = W_{X_B} = W_{Y_B} = W_N = W_{F_{тр}} = 0,$$

так как скорости точек приложения этих сил равны нулю; $W_{P_3} = 0$, так как сила \bar{P}_3 перпендикулярна скорости \bar{v}_C точки ее приложения.

Сумма мощностей внутренних сил равна нулю, так как эти силы попарно равны и противоположны, а все тела системы считаем абсолютно твёрдыми и нити нерастяжимыми. Следовательно, $\sum W_k^i = 0$.

Сумма мощностей сил, действующих на МС может быть записана как:

$$\sum W_k^e + \sum W_k^i = F^* v_C, \text{ где } F^* = \frac{2m_1 g r_2}{R_2}.$$

$$\text{Теперь имеем } \frac{d}{dt} \left(\frac{M v_C^2}{2} \right) = F^* v_C.$$

Отсюда найдём

$$Mv_C \frac{dv_C}{dt} = F^* v_C \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} = a_C = \frac{F^*}{M} = 0,0098 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}.$$

Для нахождения силы натяжения нити между блоком и катком необходимо расчленить систему по нити и рассмотреть движение какой-либо из частей системы.

1. Рассмотрим движение катка 3 (рис. 2.30) в пространстве основания.
2. Заданные силы: \bar{P}_3 , $P_3 = m_3 g$.
3. Связи: горизонтальная шероховатая недеформируемая поверхность, её реакции \bar{N} , $\bar{F}_{\text{тр}}$ и нить, её реакция \bar{S}_{23} .
4. Движение катка происходит под действием сил:

$$\left(\bar{P}_3, \bar{N}, \bar{F}_{\text{тр}}, \bar{S}_{23}, \{ \bar{F}_k^i \} \right).$$

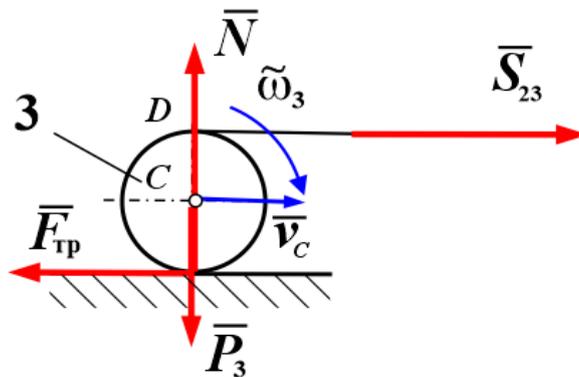


Рис. 2.30

5. Воспользуемся теоремой о производной кинетической энергии

$$\frac{dT_3}{dt} = \sum W_k^e + \sum W_k^i$$

Кинетическая энергия катка $T_3 = \frac{3}{4} m_3 v_C^2$.

Мощности сил, действующих на каток:

$$\sum W_k^i = 0, W_{P_3} = W_N = W_{F_{\text{тр}}} = 0, \sum W_k^e = 2S_{23} v_C.$$

По теореме о кинетической энергии теперь получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3m_3 v_C^2}{4} \right) = 2S_{23} v_C \Rightarrow 2 \frac{3m_3 v_C a_C}{4} = 2S_{23} v_C \Rightarrow S_{23} = \frac{3}{4} m_3 a_C = 8,85 \text{кН}.$$

3. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

3.1. Принцип Даламбера для материальной точки

Рассмотрим движение материальной точки массой m в пространстве инерциальной системы отсчета $Oxyz$ (рис. 3.1). Пусть точка движется под действием активных сил, равнодействующая которых \bar{F} . На точку наложены связи, \bar{N} – равнодействующая сил реакций этих связей.

Дифференциальное уравнение движения точки может быть записано в виде

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}.$$

Это уравнение можно записать так

$$\bar{F} + \bar{N} + (-m\bar{a}) = 0.$$

Обозначим $-m\bar{a} = \bar{\Phi}$, назовем эту силу – *силой инерции точки*.

Получим

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi} = 0.$$

В таком случае можно сформулировать принцип Даламбера для материальной точки:

В каждый момент времени активные силы, действующие на материальную точку, силы реакции связей вместе с силой инерции точки, образуют уравновешенную систему сил.

$$(\bar{F}, \bar{N}, \bar{\Phi}) \sim 0.$$

С помощью принципа Даламбера можно для решения задач динамики использовать методы статики. Но надо иметь в виду, что мы лишь составили дифференциальное уравнение, а решать его придется, как обычно. Силу инерции можно записать в проекциях на оси неподвижной и подвижной системы отсчета (рис. 3.1).

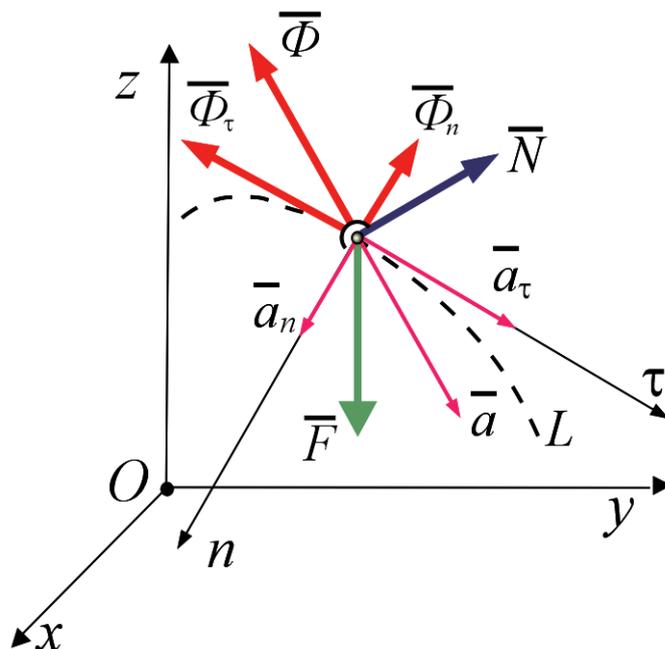


Рис. 3.1

$$\begin{cases} \Phi_x = -m\ddot{x}, \\ \Phi_y = -m\ddot{y}, \\ \Phi_z = -m\ddot{z}. \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi_n = -m\frac{v^2}{r}, \\ \Phi_\tau = -m\frac{dv_\tau}{dt}, \\ \Phi_\delta = 0. \end{cases}$$

Принцип Даламбера наиболее целесообразно применять в том случае, когда нужно определить неизвестные силы, т.е. при решении первой задачи динамики.

При этом решение задачи динамики в каждом случае необходимо проводить в следующем порядке.

1. Указать, движение какого тела и в какой системе отсчета рассматривается.
2. Указать заданные силы, действующие на точку.
3. Назвать связи и заменить их реакциями.
4. Указать силу инерции точки.
5. Выписать уравновешенную по принципу Даламбера систему сил.
6. Составить условия равновесия этих сил.

Условия равновесия являются уравнениями для нахождения неизвестных в задачах величин.

Пример 3.1

Найти ускорение, с которым надо двигать гладкую наклонную плоскость горизонтально, чтобы шарик массой m , положенный на нее, не скатывался (рис. 3.2).

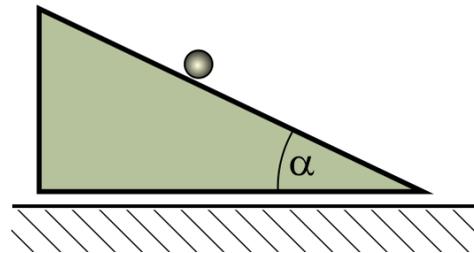


Рис. 3.2

Решение

1. Рассмотрим движение шарика в пространстве неподвижного основания, полагая, что ускорение \bar{a} клина выбрано таким, что шарик не скатывается.

2. Заданные силы: сила тяжести \bar{G} ; $G = mg$.

3. Связь: гладкая поверхность клина. Реакция поверхности \bar{N} .

4. Движение шарика совершается под действием двух сил \bar{G} и \bar{N} . Чтобы применить принцип Даламбера к решению задачи, введем в рассмотрение силу инерции шарика:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}, \quad \Phi = ma..$$

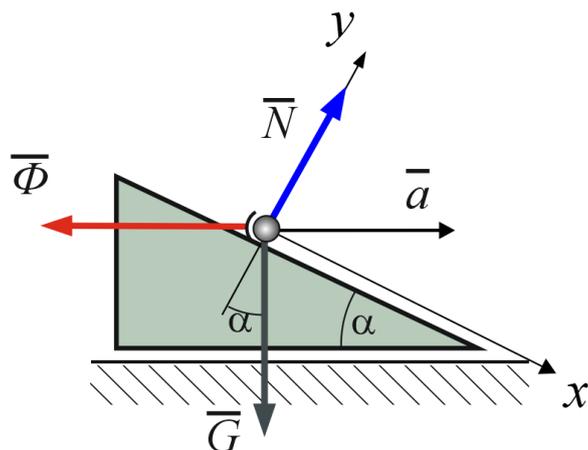


Рис. 3.3

5. По принципу Даламбера имеем $(\bar{G}, \bar{N}, \bar{\Phi}) \sim 0$, (рис. 3.3).

6. Составим уравнения равновесия данной системы сил:

$$\sum F_x = G \sin \alpha - \Phi \cos \alpha = 0, \quad mg \sin \alpha - ma \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = -G \cos \alpha + N - \Phi \sin \alpha = 0, \quad -mg \cos \alpha + N - ma \sin \alpha = 0.$$

Решая данные уравнения, получим:

$$a = g \operatorname{tg} \alpha, \quad N = m(g \cos \alpha + g \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha).$$

Пример 3.2

Сосуд в форме круглого цилиндра с вертикальной осью вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω вместе с находящейся в ней жидкостью (рис. 3.4).

Найти форму свободной поверхности жидкости.

Решение

1. Рассмотрим движение частицы жидкости M массой m на свободной поверхности как материальной точки и проведем через эту точку и через ось цилиндра плоскость, которая пересечет свободную поверхность жидкости по линии BOA . Найдем уравнение этой линии в координатах xOz .

2. *Заданные силы:* сила тяжести частицы \bar{G} ; $G = mg$.

3. *Связи:* остальные частицы жидкости; если пренебречь вязкостью, то реакция \bar{N} будет направлена по нормам к поверхности жидкости в точке M .

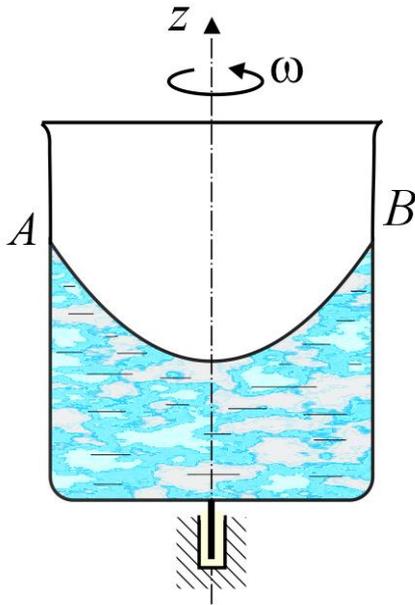


Рис. 3.4

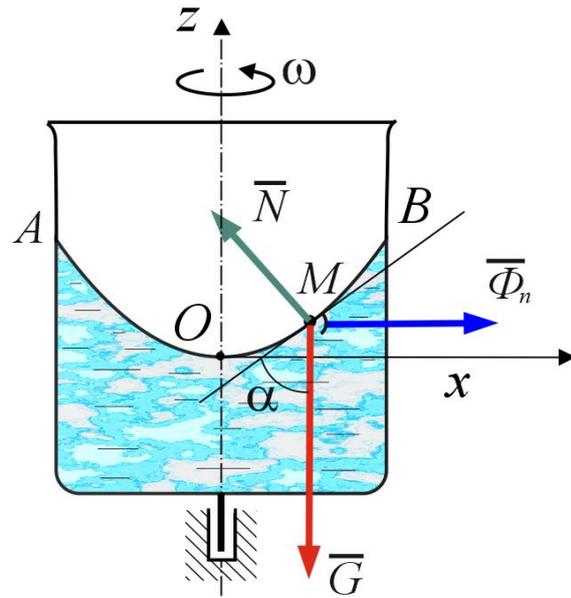


Рис. 3.5

4. *Силы инерции:* при равномерном вращении сосуда частица будет иметь нормальное ускорение, следовательно, сила инерции будет центробежной, направленной по радиусу \$r\$ от оси вращения \$z\$.

$$\Phi = \frac{mv^2}{x} = mx\omega^2,$$

5. По принципу Даламбера \$(\bar{N}, \bar{G}, \bar{\Phi}) \sim 0\$ (рис. 3.5).

6. Проецируя эти силы на касательную к \$AOB\$ в точке \$M\$ получим

$$mx\omega^2 \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0,$$

Отсюда получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2}{g} x, \text{ а так как } \operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dx}, \text{ то } \frac{dz}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x, \quad y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C.$$

Если начало координат взять в точке \$O\$ то \$C = 0\$.

Уравнение \$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2\$ – уравнение параболы и, следовательно, свобод-

ная поверхность жидкости представляет собою параболоид вращения вокруг оси \$z\$.

Пример 3.3

Шарик массой m , подвешенный на нити длиной l , представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить отклонена на угол φ (рис. 3.6).

Найти этот угол, если угловая скорость вращения шарика равна ω .

Решение

1. Рассмотрим движение шарика относительно неподвижного основания.

2. Заданные силы: $\bar{P} = m\bar{g}$.

3. Связь: нить, её реакция – \bar{N} .

4. Введем силу инерции точки:
– ускорение точки:

$$\bar{a} = \bar{a}^n; a_n = \omega^2 l \sin \varphi;$$

её сила инерции:

$$\bar{\Phi} = m\omega^2 l \sin \varphi.$$

5. По принципу Даламбера $(\bar{P}, \bar{N}, \bar{\Phi}) \sim 0$.

6. Составим уравнения равновесия данной системы сил:

$$\sum F_\tau = 0, \quad \sum F_n = N \sin \varphi - m\omega^2 l \sin \varphi = 0,$$

$$\sum F_b = mg - N \cos \varphi = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos \varphi}.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$\frac{mg}{\cos \varphi} - m\omega^2 l = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l \cos \varphi}.$$

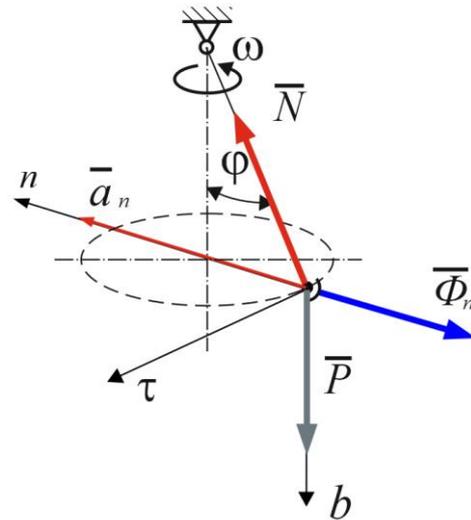


Рис. 3.6

3.2. Принцип Даламбера для механической системы

Рассмотрим движение механической системы $\{M_k\}_n$ материальных точек в пространстве инерциальной системы отсчета $Oxyz$ (рис. 3.7),

Пусть $\{\bar{F}_k^e\}_n$ – внешние силы, действующие на точки системы, а $\{\bar{F}_k^i\}_n$ внутренние силы системы. \bar{a}_k – ускорение некоторой точки M_k , масса которой m_k . $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$ – сила инерции этой точки.

Принцип Даламбера для отдельной точки записывается в виде:

$$\left(\bar{\Phi}_k, \bar{F}_k^e, \bar{F}_k^i\right) \sim 0.$$

Для всей механической системы его можно представить так:

$$\left(\left\{\bar{F}_k^e\right\}_n ; \left\{\bar{F}_k^i\right\}_n ; \left\{\bar{\Phi}_k\right\}_n\right) \sim 0.$$

Силы внешние и внутренние, действующие на М.С. вместе с силами инерции частиц системы образуют уравновешенную систему сил.

Чтобы решить какую-либо задачу динамики с помощью принципа Даламбера нужно составить условия равновесия системы сил. Причем, поскольку главный вектор и главный момент внутренних сил равен нулю, то предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\left(\left\{\bar{F}_k^e\right\}_n, \left\{\bar{\Phi}_k\right\}_n\right) \sim 0.$$

Пример 3.4

Найти связь между угловой скоростью вращения стержня AB длиной l и массой m и углом отклонения его от вертикали φ (рис. 3.8).

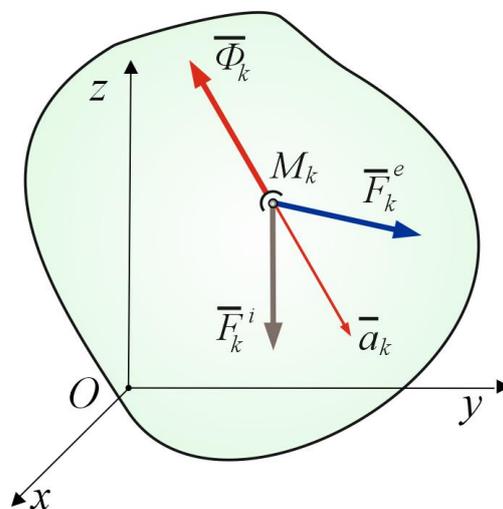


Рис. 3.7

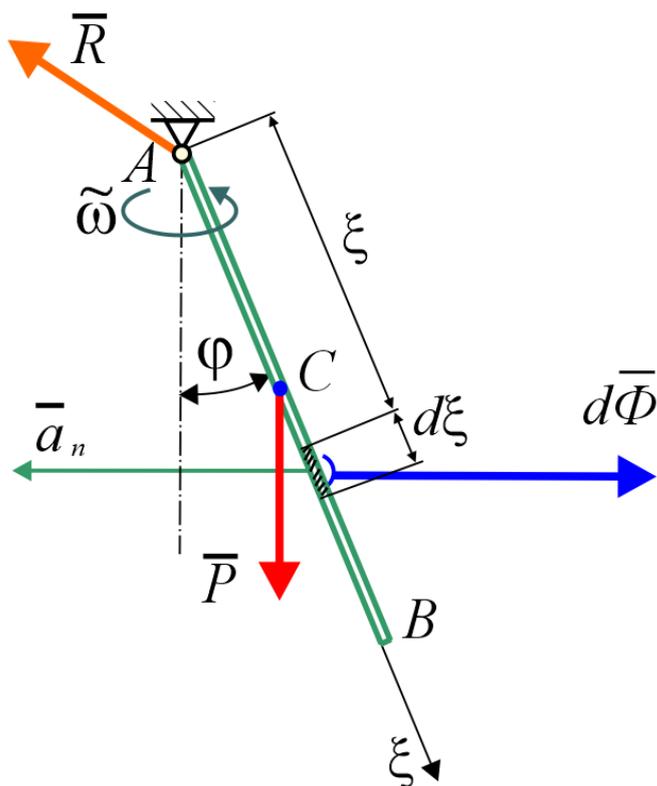


Рис. 3.8

Решение

1. Рассмотрим движение частиц dm составляющих стержень в пространстве неподвижного основания.

2. Заданные силы: сила тяжести – \bar{P} ; $P = mg$.

3. Связь: шарнир A . Его реакция – \bar{R}_A .

4. Введем в рассмотрение силы инерции частиц стержня. Произвольная частица стержня имеет массу

$$dm = \frac{M}{l} d\xi,$$

и ускорение

$$a_n = \omega^2 \xi \sin \varphi.$$

Следовательно, сила инерции частицы равна:

$$d\Phi = \frac{M}{l} \omega^2 \xi \sin \alpha d\xi$$

и направлена от оси вращения.

5. Запишем принцип Даламбера для данной системы

$$(\bar{P}, \bar{R}_A, \{d\bar{\Phi}\}) \sim 0.$$

6. Для решения задачи используем лишь одно условие равновесия:

$$\sum m_A F = -\frac{Pl}{2} \sin \varphi + \int_0^l m_A d\Phi = 0.$$

Вычисляя интеграл в данном уравнении, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^l m_A d\Phi &= \int_0^l \xi \cos \varphi \frac{M}{l} \omega^2 \xi \sin \varphi d\xi = \frac{M \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi}{3l} \xi^3 \Big|_0^l = \\ &= \frac{M \omega^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi}{3}. \end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$\frac{M g l}{2} \sin \varphi = \frac{M \omega^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi}{3} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{3}{2} \frac{g}{l \omega^2}.$$

Пример 3.5

Для системы, состоящей из двух шаров массы которых m_1 и m_2 , укрепленных на невесомых стержнях C_1D и C_2K , соединенных с невесомым валом AB , вращающемся с угловой скоростью ω , изображенной на рисунке 3.9 определить реакции сферического подшипника A и цилиндрического подшипника B .

Дано: $\omega = 4\text{с}^{-1}$; $m_1 = 22\text{кг}$; $m_2 = 12\text{кг}$; $AB = 1,9\text{м}$; $CK = 1\text{м}$; $CD = 0,3\text{м}$; $\alpha = 30^\circ$; $AD = 0,6\text{м}$; $AK = 1,6\text{м}$.

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы в пространстве неподвижного основания. Проведем координатные оси и изобразим действующие на систему силы.

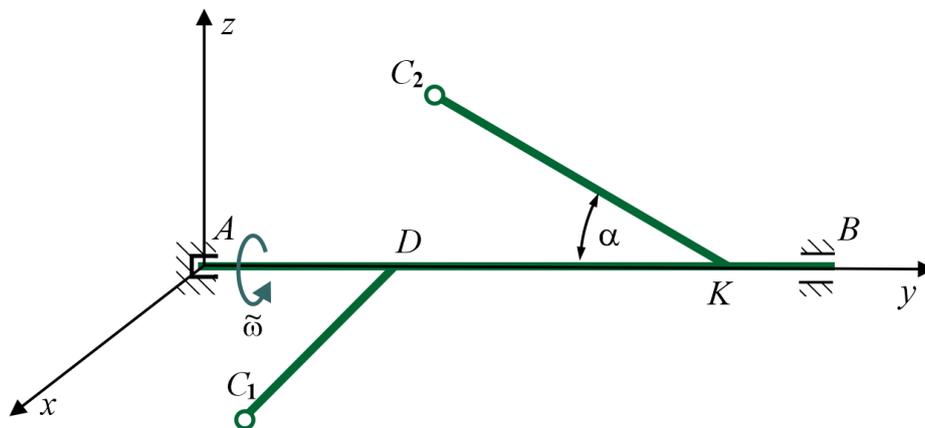


Рис. 3.9

2. Заданные силы: силы тяжести

$$\bar{P}_1, \bar{P}_2; P_1 = m_1 g = 220\text{Н}, P_2 = m_2 g = 120\text{Н}..$$

3. Связи:

- сферический подшипник A . Его реакция может быть представлена тремя составляющими $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$;
- цилиндрический подшипник B . Его реакция может быть представлена двумя составляющими \bar{X}_B, \bar{Z}_B .

4. Введем в рассмотрение силы инерции шаров. Так как вал вращается равномерно то элементы стержня имеют только нормальные ускорения, направленные к оси вращения.

Расстояния центров масс шаров до оси вращения $h_{C_1} = 0,4\text{м}$;

$$h_{C_2} = C_2 K \sin 30^\circ = 0,5\text{м}$$

Ускорения центров масс

$$a_{C_1} = \omega^2 h_{C_1} = 6,4\text{м/с}^2, \quad a_{C_2} = \omega^2 h_{C_2} = 8\text{м/с}^2.$$

Силы инерции

$$\Phi_1 = m_1 a_{C_1} = 140,8\text{Н}, \quad \Phi_2 = m_2 a_{C_2} = 96\text{Н}.$$

5. Запишем принцип Даламбера для данной системы

$$(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Z}_B, \bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2) \sim 0.$$

6.) Составим для данной системы сил шесть уравнений равновесия.

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + \Phi_1 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A = 0;$$

$$\sum F_{kz} = -P_1 - P_2 + Z_A + Z_B + \Phi_2 = 0;$$

$$\sum m_x F_k = (\Phi_2 - P_2) \cdot (AK - KC_2 \cos \alpha) - P_1 AD + Z_B \cdot AB = 0;$$

$$\sum m_z F_k = -\Phi_1 AD - X_B AB = 0.$$

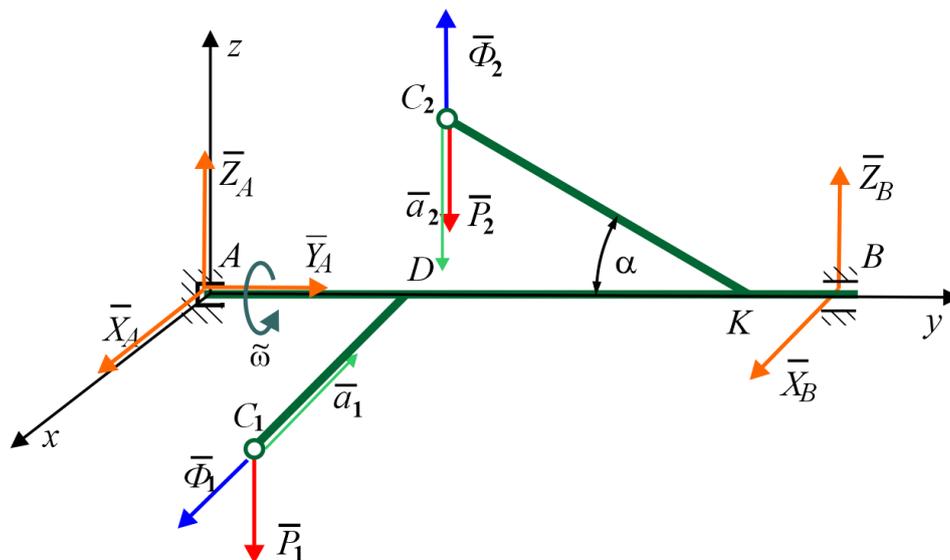


Рис. 3.10

Ответ:

$$Z_B = -78,74\text{Н}; X_B = -44,46\text{Н}; X_A = -96,34\text{Н}; Y_A = 0; Z_A = 45,26\text{Н}.$$

3.3. Приведение сил инерции частиц твердого тела к центру

Любая система сил приведением к выбранному центру A может быть заменена результирующей силой, равной главному вектору сил системы и результирующей парой, равной главному моменту сил системы относительно центра приведения.

Точно также можно привести к центру A и силы инерции частиц твердого тела:

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\bar{\Phi}_A, \bar{m}_A^\Phi),$$

где $\bar{\Phi}_A$ – результирующая сила инерции, а \bar{m}_A^Φ результирующая пара сил инерции частиц твердого тела.

Теперь для твердого тела принцип Даламбера запишем в виде:

$$\left(\left\{ \bar{F}_k^e \right\}_n, \bar{\Phi}_A, \bar{m}_A^\Phi \right) \sim 0.$$

Рассмотрим движение тела в пространстве инерциальной системы отсчета $Oxuz$. Пусть M – масса тела, C – его центр масс.

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M} \int_{(M)} \bar{r} dm; \quad \bar{a}_C = \frac{1}{M} \int_{(M)} \bar{a} dm.$$

\bar{r} – радиус-вектор произвольной частицы тела; \bar{a} – её ускорение; $d\bar{\Phi} = -\bar{a} dm$ – сила инерции частицы.

Результирующая сила инерции тела

$$\bar{\Phi}_A = \int_{(M)} d\bar{\Phi} = \int_{(M)} -\bar{a} dm = -M \bar{a}_C.$$

Результирующая сила инерции тела одинакова для любого центра, направлена противоположно ускорению центра масс и по модулю равна произведению массы тела на ускорение центра масс.

Результирующая пара сил инерции тела:

$$\bar{m}_A^\Phi = \int_{(M)} \bar{m}_A (d\bar{\Phi}) = - \int_{(M)} (\bar{\rho} \times \bar{a}) dm.$$

Результирующая пара сил инерции зависит от выбора центра приведения. Если за центр приведения взять центр масс тела, то получим:

$$\bar{m}_C^\Phi = - \int_{(M)} (\bar{\rho}_C \times \bar{a}) dm.$$

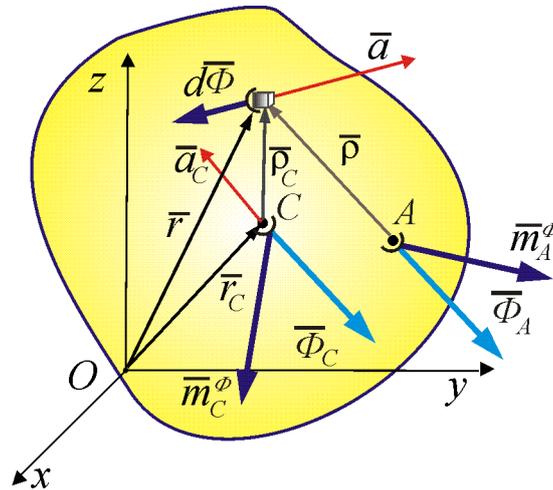


Рис. 3.11

Связав с центром масс пространство Кёнига, получим: $\bar{a} = \bar{a}_C + \bar{a}^r$.
Теперь

$$\bar{m}_C^\Phi = - \int_{(M)} (\bar{\rho}_C \times \bar{a}_C) dm - \int_{(M)} (\bar{\rho}_C \times \bar{a}^r) dm.$$

$$\int_{(M)} (\bar{\rho}_C \times \bar{a}_C) dm = \left(\int_{(M)} (\bar{\rho}_C) dm \right) \times \bar{a} = \bar{S}_C \times \bar{a} = 0.$$

В итоге имеем

$$\bar{m}_C^\Phi = - \int_{(M)} (\bar{\rho}_C \times \bar{a}^r) dm.$$

Результирующая пара сил инерции частиц тела при приведении к центру масс определяется только движением в пространстве Кёнига.

Частные случаи приведения сил инерции к центру

а) Поступательное движение (рис 3.12)

За точку приведения берется центр масс тела. Тело неподвижно в пространстве Кенига $\Rightarrow \bar{m}_C^\Phi = 0$.

Итак:

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim \bar{\Phi}_C; \quad \bar{\Phi}_C = -M \bar{a}_C.$$

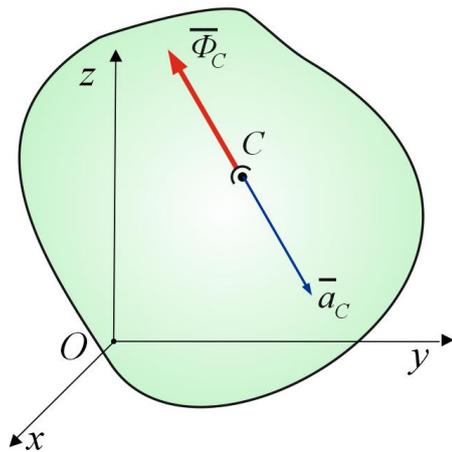


Рис 3.12

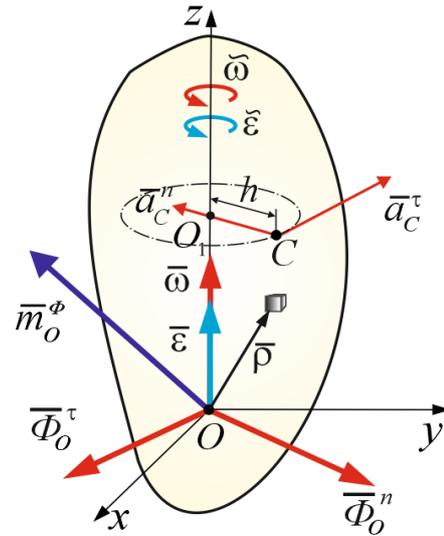


Рис. 3.13

б) Вращение тела вокруг неподвижной оси (рис 3.13)

За центр приведения возьмем точку O на оси вращения.

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\bar{\Phi}_O, \bar{m}_O^\Phi).$$

$$\bar{\Phi}_O = -M \bar{a}_C.$$

Так как ускорение центра масс \bar{a}_C перпендикулярно оси вращения, то результирующая сила инерции $\bar{\Phi}_O$ лежит в плоскости xOy .

Ускорение центра масс равно

$$\bar{a}_C = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau.$$

Результирующая сила инерции найдется по формуле:

$$\bar{\Phi}_O = \bar{\Phi}_O^n + \bar{\Phi}_O^\tau,$$

причем

$$\bar{\Phi}_O^n \parallel \overline{O_1C}, \quad \Phi_O^n = \omega^2 \cdot O_1C; \quad \bar{\Phi}_O^\tau \perp_{\mathcal{U}-\tilde{\varepsilon}} \overline{O_1C}, \quad \Phi_O^\tau = \varepsilon \cdot O_1C.$$

Результирующая пара сил инерции

$$\bar{m}_O^\Phi = - \int_{(M)} (\bar{\rho} \times \bar{a}) dm.$$

После преобразований получим

$$\bar{m}_O^\Phi = \begin{vmatrix} -\omega^2 I_{yz} + \tilde{\varepsilon} I_{xz} \\ \omega^2 I_{xz} + \tilde{\varepsilon} I_{yz} \\ -I_z \tilde{\varepsilon} \end{vmatrix}$$

$$\bar{\Phi}_O = \bar{\Phi}_O^n + \bar{\Phi}_O^\tau, \quad \bar{\Phi}_O^n = -M \bar{a}_c^n, \quad \bar{\Phi}_O^\tau = -M \bar{a}_c^\tau.$$

Частные случаи вращения тела

1. Если тело вращается вокруг главной, нецентральной оси (рис. 3.14), то

$$I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

\bar{m}_O^Φ можем рассмотреть, как алгебраическую величину:

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\tilde{m}_O^\Phi, \bar{\Phi}_O), \quad \bar{\Phi}_O = \bar{\Phi}_O^n + \bar{\Phi}_O^\tau, \quad \tilde{m}_O^\Phi = -\tilde{\varepsilon} J_z.$$

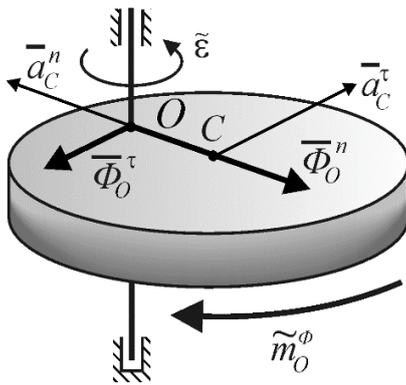


Рис. 3.14

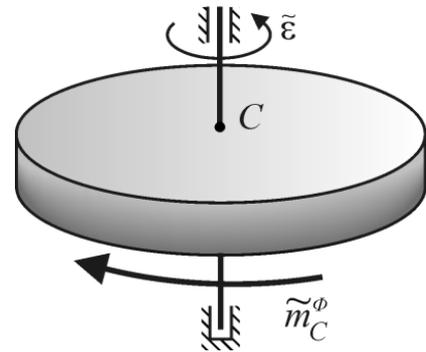


Рис. 3.15

2. Если тело вращается вокруг главной, центральной оси (рис. 3.15), то

$$\bar{\Phi}_C = 0, \Rightarrow \{d\bar{\Phi}\} \sim (\tilde{m}_O^\Phi).$$

д) Плоское движение

Рассмотрим движение тела параллельно плоскости его материальной симметрии (рис 3.16). За центр приведения возьмем центр масс. Относительное движение – вращение вокруг главной центральной оси тела z_c .

$$\tilde{m}_C^\Phi = -J_{z_c} \tilde{\varepsilon}.$$

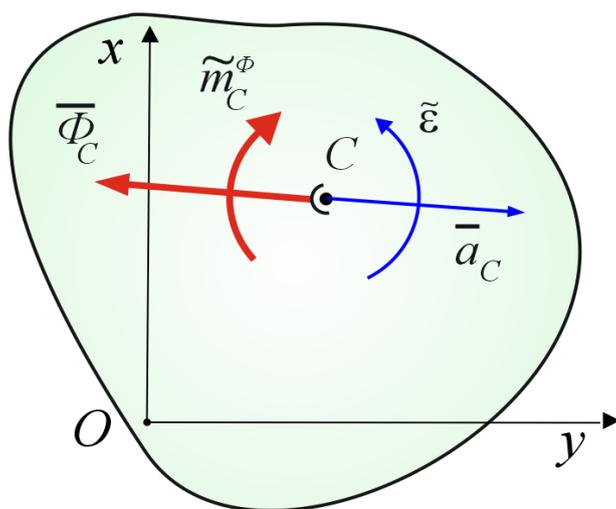


Рис. 3.16

Итак

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\bar{\Phi}_C, \tilde{m}_C^\Phi), \bar{\Phi}_C = -M \bar{a}_C, \tilde{m}_C^\Phi = -I_{z_c} \tilde{\varepsilon}.$$

Решение задач на движение механической системы

Указание. Для решения задач на движение механической системы с помощью принципа Даламбера необходимо применять метод РОЗ (расчленить – отбросить – заменить отброшенные тела силами). Механическая система расчленяется на отдельные тела, из которых она состоит, и рассматривается движение каждого из тел порознь. При этом решение задачи динамики в каждом случае необходимо проводить в следующем порядке.

1. Указать, движение какого тела и в какой системе отсчета рассматривается.
2. Указать заданные силы, действующие на тело,
3. Назвать связи, а) внешние и б) внутренние, и заменить их реакциями.
4. Указать силы инерции данного тела. Приведением к центру заменить силы инерции частиц тела результирующей парой и силой инерции:

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\bar{\Phi}_O, \bar{m}_O^\Phi).$$

5. Выписать уравновешенную по принципу Даламбера систему сил.

6. Составить условия равновесия этих сил.

Условия равновесия являются уравнениями для нахождения неизвестных в задачах величин.

Пример 3.6

Груз массой $m_1 = 200$ кг поднимается при помощи лебедки, установленной на консольной балке AB длиной $2l = 2$ м, конец которой заделан в стенку. Барабан лебедки радиусом $R = 0,5$ м и массой $m_2 = 100$ кг приводится во вращение парой сил с постоянным моментом $M = 1010$ кН·м. Вес балки и корпуса лебедки $G = 250$ кг. Найти натяжение троса, давление на подшипник O барабана и реакцию заделки. Барабан считать однородным диском. Весом троса пренебречь (рис. 3.17).

Решение

Данная механическая система состоит из груза 1. барабана 2. балки 3. троса, корпуса лебедки 5. Так как требуется определить силы взаимодействия между телами этой системы, то воспользуемся методом РОЗ, рассмотрим порознь движение груза барабана и равновесие балки.

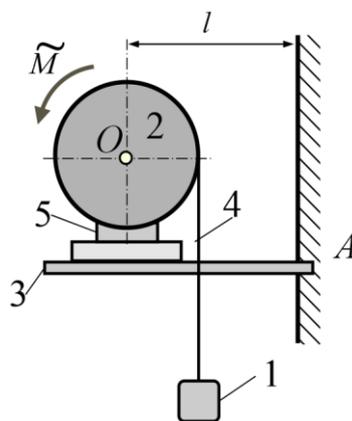


Рис. 3.17

I. Движение груза (рис. 3.18)

1. Рассмотрим движение груза в пространстве основания.

2. Заданная сила, приложенная к грузу: сила тяжести \bar{P} .

$$P = m_1 g = 200 \cdot 9,8 = 1960 \text{ Н.}$$

3. Связи: а) внешние: нет;

б) внутренние: трос, реакция \bar{T}_{21} которого приложена к грузу и направлена вверх по тросу.

4. Так как груз совершает поступательное движение, то силы инерции его частиц заменим равнодействующей силой $\bar{\Phi}_1$, приложенной в центре масс груза и направленной противоположно его ускорению

$$\{d\bar{\Phi}_1\} \sim \bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_1, \quad \Phi_1 = m_1a_1.$$

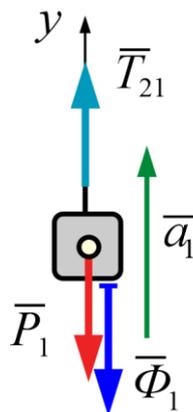


Рис. 3.18

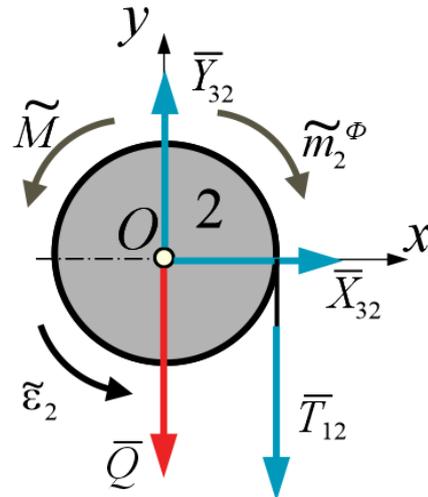


Рис. 3.19

5. Запишем принцип Даламбера для груза:

$$(\bar{P}, \bar{T}_{21}, \bar{\Phi}_1) \sim 0.$$

6. Составим условие равновесия этих сил:

$$\sum F_{ky} = -P + T_{21} - \Phi_1 = 0; \quad T_{21} = m_1(g + a).$$

Для нахождения силы T_{21} натяжения троса необходимо знать ускорение груза.

II. Движение барабана лебедки (рис.3.19)

1. Рассмотрим движение барабана лебедки с частью троса, намотанного не него, в пространстве основания.

2. Заданные силы, приложенные к барабану: сила тяжести барабана \bar{Q} ;

$$Q = m_2g = 100 \cdot 9,8 = 980\text{Н}$$

и пара сил с моментом \tilde{M} .

3. Связи: а) внешние: нет;

б) внутренние:

- подшипник корпуса лебёдки, реакцию подшипника на барабан покажем двумя составляющими $\bar{X}_{32}, \bar{Y}_{32}$;
- свисающая ветвь троса, реакцию свисающей ветви троса обозначим $\bar{T}_{12}, (\bar{T}_{12} = -\bar{T}_{21})$.

4. Силы инерции частиц барабана после приведения их к точке O на оси вращения барабана заменяются равнодействующей парой сил:

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim \tilde{m}_2^\Phi, \tilde{m}_2^\Phi = -I_{zO}\tilde{\varepsilon}_2, m_2^\Phi = I_{zO}\varepsilon_2, I_{zO} = \frac{m_2 R^2}{2}, \varepsilon_2 = \frac{a}{R}, m_2^\Phi = \frac{m_2 a R}{2}.$$

5. Запишем принцип Даламбера для барабана:

$$(\bar{Q}, \tilde{M}, \bar{X}_{32}, \bar{Y}_{32}, \bar{T}_{12}, \tilde{m}_2^\Phi) \sim 0.$$

Составим три условия равновесия этой системы сил:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= X_{32}, \\ \sum F_{ky} &= -Q + Y_{32} - T_{12} = 0, \\ \sum m_O F_k &= M - T_{12}R - m_2^\Phi = 0. \end{aligned}$$

Подставив в последнее уравнение $m_2^\Phi = \frac{m_2 a R}{2}$ получим

$$M - T_{12}R - \frac{m_2 a R}{2} = 0.$$

Решая совместно уравнения находим

$$a = \frac{2(M - m_1 g R)}{R(2m_1 + m_2)} = 0,098 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, T_{12} = m_1 g \frac{(2M - m_2 g R)}{R(2m_1 + m_2)} = 2020 \text{ Н}.$$

Реакции подшипника барабана:

$$X_{32} = 0, Y_{32} = Q + T_{12} = 2120 \text{ Н}.$$

III. Равновесие балки с корпусом лебедки

1. Рассмотрим равновесие балки вместе с корпусом лебедки (рис. 3.20).
2. *Заданные силы:* суммарная сила тяжести \bar{G} балки и корпуса лебедки, линия действия которой проходит через ось вала лебедки.

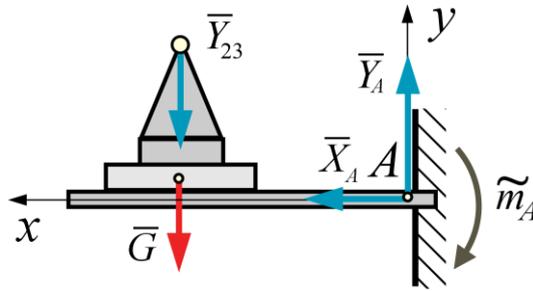


Рис. 3.20

3. Связи: а) внешние: заделка А, реакцию которой покажем силами \bar{X}_A, \bar{Y}_A и парой сил \tilde{m}_A .

б) внутренние: подшипник барабана 2 лебедки, его реакции

$$\bar{X}_{23}, \bar{Y}_{23} \left(\bar{X}_{23} = -\bar{X}_{32}, \bar{Y}_{23} = -\bar{Y}_{32} \right).$$

4. $(\bar{G}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \tilde{m}_A, \bar{X}_{23}, \bar{Y}_{23}) \sim 0$

5. Составим три условия равновесия этих сил:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= X_A = 0; \\ \sum F_y &= -G - Y_{23} + Y_A = 0; \\ \sum \tilde{m}_A \bar{F}_k &= Gl + Y_{23}l - m_A = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$X_A = 0; Y_A = 2370 \text{ кг}; m_A = 23700 \text{ Нм}.$$

Пример 4.2

Для заданной механической системы (рис.3.21), которая движется под действием сил тяжести и пары сил с моментом M , определить ускорение груза 1 и натяжение ветвей нитей. Сопротивление движению не учитывать. Проскальзывание нитей и катков отсутствует.

В задаче приняты следующие обозначения: m – масса тела; R, r – радиусы больших и малых окружностей; ρ – радиус инерции тела вращения относительно его центральной оси.

Дано: $M = 50 \text{ Н м}$; $m_1 = 20 \text{ кг}$; $m_2 = 30 \text{ кг}$; $m_3 = 40 \text{ кг}$; $R_2 = 40 \text{ см}$; $R_3 = 60 \text{ см}$; $r_3 = 40 \text{ см}$; $\alpha = 30^\circ$; $\rho_3 = 50 \text{ см}$, блок 2 – однородный диск.

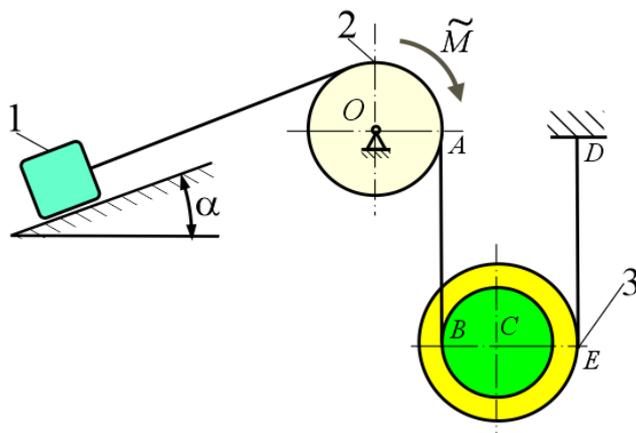


Рис. 3.21

Решение

Рассматриваемая механическая система состоит из: 1 – груза; 2 – неподвижного блока; 3 – подвижного блока; нитей.

1. Движение груза A

1. Рассмотрим движение груза 1 в пространстве основания (рис. 3.22).
2. Заданная сила, приложенная к грузу: сила тяжести его \bar{P} , $P = m_1 g$.
3. Связи: а) внешние – гладкая наклонная плоскость, её реакция \bar{N} , приложенная к подошве груза в точке, положение которой неизвестно; б) внутренние – нить, её реакция \bar{T}_{21} .
4. Силы инерции груза, движущегося поступательно, заменяются равнодействующей силой инерции

$$\{d\bar{\Phi}_1\} \sim \bar{\Phi}_1; \bar{\Phi}_1 = -m_1 \bar{a}_1; (\Phi_1 = m_1 a_1).$$

5. Принцип Даламбера запишем теперь в виде:

$$(\bar{P}_1, \bar{N}, \bar{T}_{21}, \bar{\Phi}_1) \sim 0.$$

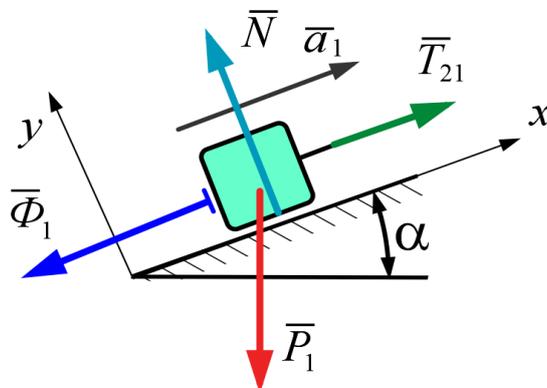


Рис. 3.22

6. Составим только одно условие равновесия этой системы сил, так как реакцию наклонной плоскости определять не требуется.

$$\sum F_{kx} = -P_1 \sin \alpha + T_{21} - \Phi_1 = 0.$$

II. Движение блока 2.

1. Рассмотрим движение блока 2 с прилегающей частью нити в пространстве основания (рис. 3.23).

2. *Заданные силы:* сила тяжести блока \bar{P}_2 и пара сил с моментом \tilde{M} .

3. *Связи:* а) *внешние:* подшипник O ; его реакции \bar{X}_O, \bar{Y}_O .

б) *внутренние:* ветви нити. Их реакции: $\bar{T}_{12}, \bar{T}_{32}$. ($\bar{T}_{12} = -\bar{T}_{21}$).

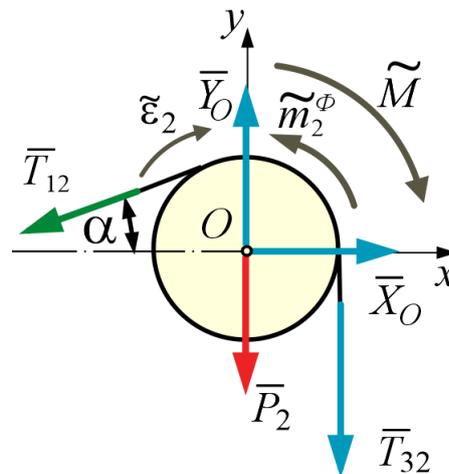


Рис. 3.23

4. Приведением сил инерции частиц блока к центру O , лежащему на главной центральной оси инерции, заменяем их равнодействующей парой сил инерции, лежащей в плоскости диска:

$$\{d\bar{\Phi}_2\} \sim \tilde{m}_2^\phi, \quad \tilde{m}_2^\phi = -\tilde{\varepsilon}_2 I_2,$$

где $I_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2}$ момент инерции диска относительно оси вращения; ε_2 – угловое ускорение блока. Так как нить нерастяжима и скольжение нити по блоку отсутствует, то $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2}$.

5. Принцип Даламбера запишется теперь так

$$\left(\bar{P}_2, \tilde{M}, \bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{T}_{12}, \bar{T}_{32}, \tilde{m}_2^\phi \right) \sim 0.$$

6. Составим только одно условие равновесия

$$\sum m_O F_k = -M + (T_{12} - T_{32})R_2 + m_2^\Phi = 0.$$

III. Движение подвижного блока 3.

1. Рассмотрим движение подвижного блока с прилегающими частями нитей в пространстве основания (рис. 3.24).

2. *Заданные силы*: сила тяжести блока \bar{P}_3 ; $P_3 = m_3 g$.

3. *Связи*: а) *внешние* – нить ED . Её реакция \bar{S} ;

б) *внутренние* – нить BA , её реакция \bar{T}_{23} . ($\bar{T}_{23} = -\bar{T}_{32}$).

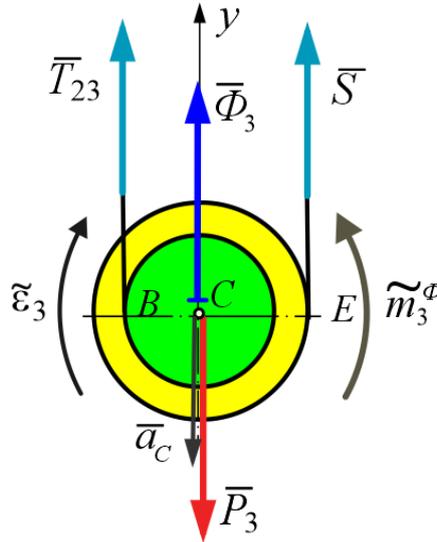


Рис. 3.24

4. *Силы инерции* частиц блока приведением их к центру масс заменяются результирующей силой и результирующей парой

$$\{d\bar{\Phi}_3\} \sim (\bar{\Phi}_3, \tilde{m}_3^\Phi), \quad \bar{\Phi}_3 = -m_3 \bar{a}_C, \quad \tilde{m}_3^\Phi = -\tilde{\epsilon}_3 I_3.$$

где \bar{a}_C – ускорение центра масс блока, $\tilde{\epsilon}_3$ – его угловое ускорение, $I_3 = m_3 \rho_3$ – момент инерции блока относительно его центральной оси, перпендикулярной плоскости блока.

5. По принципу Даламбера силы, приложенные к блоку, и силы инерции его частиц уравниваются. Запись принципа Даламбера имеет вид:

$$(\bar{P}_3, \bar{S}, \bar{T}_{23}, \bar{\Phi}_3, \tilde{m}_3^\Phi) \sim 0.$$

6. Составим два условия равновесия системы

$$\sum F_{ky} = P_3 - S - T_{23} - \Phi_3 = 0,$$

$$\sum m_C F_k = SR_3 - T_{23}r_3 - m_3^{\phi} = 0.$$

К этим уравнениям нужно добавить кинематические соотношения:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{R_3 + r_3}; \quad a_C = \varepsilon_3 R_3 = \frac{a_1 R_3}{R_3 + r_3}.$$

Решая эти уравнения найдем:

$$a_1 = 4,5 \frac{\text{М}}{\text{с}}; \quad T_{12} = T_{21} = 190\text{Н}; \quad T_{32} = T_{23} = 132\text{Н}; \quad S = 260\text{Н}.$$

4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

4.1. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения и равновесия механической системы

Действительные и возможные перемещения

Рассмотрим движение несвободной механической системы материальных точек. Пусть на эту систему будет наложено m стационарных голономных связей, уравнения которых

$$f_i(\{\bar{r}_k\}_n) = 0, \quad i = 1, m.$$

Для одной точки возможным перемещением назовём такое бесконечно малое перемещение, которое может совершить точка из занимаемого ею в данный момент времени положения, не нарушая наложенных на неё связей. Обозначим его $\delta \bar{r}_k$. Это мысленное перемещение, которое могла бы совершить точка при наложенных на неё связях.

Действительное перемещение – это бесконечно малое перемещение точки за время dt под действием приложенных сил и при заданных начальных условиях и наложенных связях. Обозначим его $d \bar{r}_k$. Действительное перемещение принадлежит к числу возможных. Возможное перемещение будет полным дифференциалом радиуса-вектора точки.

Число независимых возможных перемещений равно числу степеней свободы системы.

Возможными скоростями точек системы \bar{v}_k^B будет называть любые скорости точек, дозволяемые связями.

Возможной работой силы \bar{F} на данном возможном перемещении будем называть элементарную работу силы на этом возможном перемещении

$$\delta A_k^B = \bar{F} \cdot \delta \bar{r}_k.$$

Возможной мощностью силы на k -ом возможном перемещении назовём мощность силы \bar{F} при наличии возможной скорости \bar{v}_k^B .

$$\delta W_k^B = \bar{F} \cdot \bar{v}_k^B.$$

Идеальные связи

Связи системы называются идеальными, если сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении точек системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{R_k}^B = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k.$$

При использовании понятия возможной скорости условие идеальности имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n \delta W_{R_k}^B = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \bar{v}_k^B = 0, \quad \forall \bar{v}_k^B$$

Связи: нить, гладкая поверхность, жёсткий стержень, шарниры – идеальны, т.е. их реакция направлена так, что возможная работа и возможная мощность равна нулю. В абсолютно твёрдом теле точки связаны идеальными связями.

Шероховатая поверхность при отсутствии скольжения идеальная связь.

Однако шероховатая поверхность для скользящего тела – реальная связь.

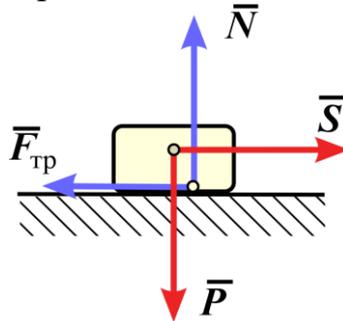


Рис. 4.1

Шероховатая деформируемая поверхность для катка – реальная связь.

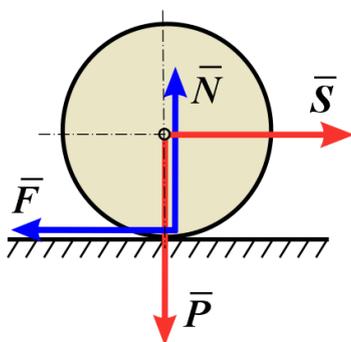


Рис. 4.2

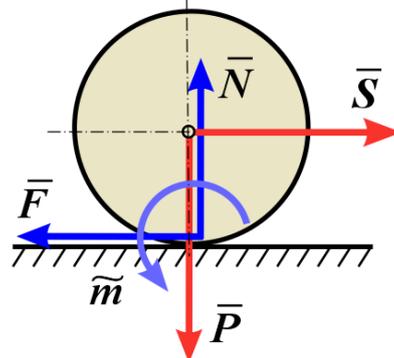


Рис. 4.3

Связи с трением – реальны, т.е. сила трения скольжения и пара трения качения совершают возможную работу.

Связи без трения – идеальны.

Принцип Даламбера – Лагранжа

Этот принцип может быть введён как исходное, основополагающее положение механики, если принять его за аксиому, он может быть основой построения всех положений статики.

В любой момент времени для системы с идеальными, голономными, стационарными удерживающими связями сумма элементарных работ заданных активных сил и даламберовых сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k}^B + \sum_{k=1}^n \delta A_{\Phi_k}^B = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k; \quad (4.1)$$

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k) = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k.$$

или

$$\sum_{k=1}^n W_{F_k}^B + \sum_{k=1}^n W_{\Phi_k}^B = 0, \quad \forall \bar{v}_k^B; \quad (4.2)$$

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k \cdot \bar{v}_k^B + \bar{\Phi}_k \cdot \bar{v}_k^B) = 0, \quad \forall \bar{v}_k^B.$$

Эти уравнения называют ещё *общим уравнением динамики*.

Принцип Даламбера – Лагранжа должен выполняться для любого возможного перемещения, однако, если система имеет s степеней свободы, то только s из этих перемещений, соответствующих изменению обобщённых координат будут независимыми. Значит достаточно выполнение принципа Даламбера – Лагранжа лишь для независимых парциальных движений.

Частным случаем движения является равновесие НМС. При равновесии $\{\bar{\Phi}_k\}_n \sim 0$, поэтому при равновесии получим принцип возможных перемещений.

Для равновесия НМС со стационарными идеальными голономными неосвобождающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении системы равнялась нулю

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k}^B = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k, \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k. \quad (4.3)$$

Условие равновесия может быть сформулировано в виде принципа возможных скоростей или принципа Лагранжа.

Для равновесия НМС со стационарными идеальными, голономными, удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных мощностей равнялась нулю.

$$\sum_{k=1}^n W_{F_k}^B = 0, \quad \forall \bar{v}_k^B; \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \bar{v}_k^B = 0, \quad \forall \bar{v}_k^B. \quad (4.4)$$

Для описания равновесия НМС достаточно выполнения условий (4.3) и (4.4) на каждом из парциальных движений системы.

Стоит подчеркнуть еще одно важное достоинство этого метода, общего уравнения динамики, – реакции связей (идеальных) исключаются при исследовании движения системы.

Иногда это уравнение можно использовать для исследования движения механических систем и в тех случаях, когда не все связи являются идеальными, например, когда имеются связи с трением. Для этого следует к активным силам добавить те составляющие реакций, которые обусловлены наличием сил трения.

Решение задач на равновесие механической системы

Рекомендуется следующий алгоритм решения задач на равновесие механических систем методами аналитической механики

1. Назвать голономную систему с идеальными связями, равновесие которой надо рассмотреть для решения задачи.

2. Определить число степеней свободы системы, выбрать обобщенные координаты.

3. Указать заданные силы, действующие на рассматриваемую механическую систему.

4. Составить математическую модель равновесия системы-

К каждому пункту алгоритма сделаем некоторые пояснения и указания относительно рационального их применения.

1. Для голономных систем с идеальными связями при решении задач, по условию которых не требуется определять реакций связей, рассматривается равновесие заданной (исходной) в условии задачи механической системы.

Если связи неидеальные или по условию задачи требуется найти реакции хакнх-либо связей, то применяют принцип освобождает. Названные связи отбрасываются и их действие заменяется реакциями. Рассматривается

равновесие, полученных голономных систем, на которые уже наложены только идеальные связи.

Если требуется найти не реакцию связи, а ее составляющую по какому-либо направлению, то связь не отбрасывается, а ослабляется таким образом, чтобы новая связь допускала перемещение в этом направлении.

2. При наличии небольшого опыта решения задач число степеней свободы системы можно определять способом последовательного закрепления ее звеньев, совершающих, простейшие движения, т.е. поступательное вдоль заданных направляющих (звено называется ползуном) или вращательное (звено-кривошип), около неподвижной оси

3. Следует иметь в виду, что когда рассматривается равновесие системы, полученной из исходной на основании принципа освобожденности от связей, то реакции отброшенных или ослабленных в исходной системе связей относятся к заданным силам рассматриваемой системы.

4. Математическую модель равновесия системы составляют с помощью общего уравнения динамики.

Решение задач на движение механической системы

Решение задач на движение механической системы с помощью принципа Даламбера-Лагранжа необходимо проводить в следующем порядке.

1. Указать, движение какой механической системы и в какой системе отсчета рассматривается. Изобразить механическую систему в произвольный момент времени. Определить число степеней свободы системы. Выбрать обобщенные координаты в числе, равном числу степеней свободы системы.
2. Указать заданные силы, действующие на механическую систему.
3. Назвать связи и проверить их на идеальность. Реальные связи отбросить и заменить их реакциями.
4. Указать силы инерции данного тела. Приведением к центру заменить силы инерции частиц тел результирующей парой и силой инерции:

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\bar{\Phi}_O, \bar{m}_O^\Phi).$$

5. Выписать систему заданных сил, сил реакций реальных связей и сил инерции тел механической системы.
6. Сообщить виртуальное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом виртуальные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю.
7. Вычислить сумму элементарных работ всех сил на соответствующих виртуальных перемещениях и приравнять эту сумму нулю.
8. Повторить п. 6 – 7 для каждого независимого движения системы.

При применении общего уравнения динамики к системам с двумя и большим числом степеней свободы, в связи с громоздкостью выкладок, можно использовать следующие рекомендации:

1. Сделать предположение о направлении ускорений точек системы.
2. Направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений.
3. Определить знаки элементарных работ сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и избранными направлениями виртуальных перемещений точек системы.
4. Если искомые ускорения оказываются положительными, то сделанные предположения о направлениях ускорений подтверждаются, если отрицательными, то соответствующие ускорения направлены в другую сторону.

Пример 4.1

Определить ускорение груза G (рис. 4.4). Вес цилиндра – P , радиус – r . Цилиндр катится по плоскости без скольжения.

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из груза 1, цилиндра 2 и нити в пространстве неподвижного основания. Система имеет одну степень свободы (в этом легко убедиться, если закрепить груз, имеющий одну степень свободы). В качестве обобщенной координаты выберем перемещение груза – s (рис. 4.5).

2. *Заданные силы:* силы тяжести \bar{P} , \bar{G} цилиндра и груза.
3. *Связи:* – подшипник для блока – идеальная связь;
– шероховатая недеформируемая поверхность для цилиндра – идеальная связь.

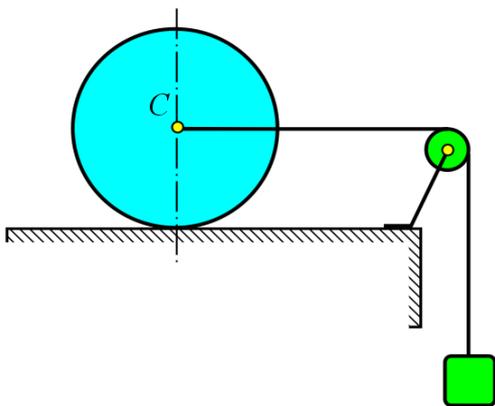


Рис. 4.4

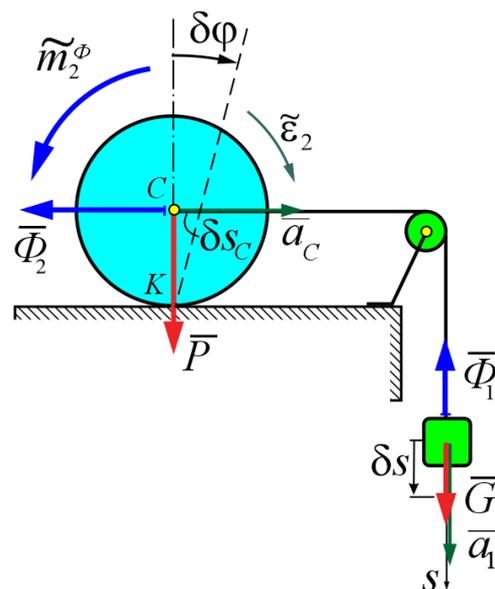


Рис. 4.5

4. Силы инерции:

– сила инерции груза, движущегося поступательно,

$$\{d\bar{\Phi}_1\} \sim \bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_1, \Phi_1 = \frac{Ga_1}{g};$$

– цилиндр совершает плоскопараллельное движение:

$$\{d\bar{\Phi}_2\} \sim (\bar{\Phi}_2, \tilde{m}_2^\Phi), \bar{\Phi}_2 = -m_2\bar{a}_C, \tilde{m}_2^\Phi = -\tilde{\varepsilon}_2 I_2, \Phi_2 = \frac{a_1 P}{g}, m_2^\Phi = \frac{a_1 Pr}{2}.$$

Здесь $a_C = a_1$ – ускорение центра масс цилиндра, $\varepsilon_2 = \frac{a_C}{r} = \frac{a_1}{r}$ – угло-

вое ускорение цилиндра, $I_2 = \frac{m_1 r^2}{2}$ – момент инерции цилиндра относительно его центральной оси, перпендикулярной плоскости цилиндра.

5. Чтобы составить общее уравнение динамики, выпишем все заданные силы вместе с силами инерции

$$(\bar{P}, \bar{G}, \bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \tilde{m}_2^\Phi).$$

6. Для составления общего уравнения динамики даем системе возможное перемещение, сдвинув груз вниз на малую величину δs . Центр цилиндра сместится вправо на величину $\delta s_C = \delta s$, а весь цилиндр повернется вокруг мгновенного центра скоростей K на угол $\delta\varphi = \frac{\delta s_C}{r} = \frac{\delta s}{r}$.

Вычисляем работу сил на этих перемещениях и составляем уравнение возможных работ – общее уравнение динамики,

$$\sum \delta A_k^B = G\delta s - \Phi_1\delta s - \Phi_2\delta s_C - m_2^\Phi\delta\varphi = 0.$$

Подставив значения сил инерции и элементарных перемещений, получим уравнение

$$G\delta s - \frac{Ga_1}{g}\delta s - \frac{Pa_1}{g}\delta s - \frac{Pr a_1}{2g}\delta s = 0.$$

из которого находим $a_1 = \frac{2G}{2G + P}g$.

Пример 4.2

К зубчатой рейке массы m приложена сила T (рис. 4.6). Рейка приводит в движение зубчатое колесо радиуса r и массы m_1 , к которому приложен момент сопротивления M_c . Определить угловое ускорение колеса, считая его однородным диском.

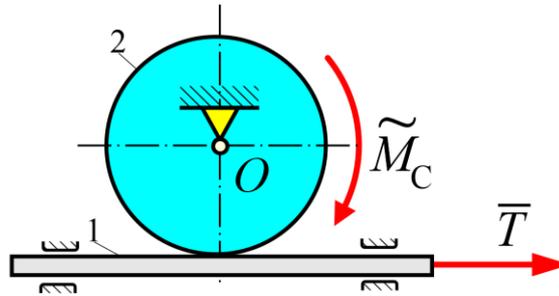


Рис. 4.6

Решение

2. *Заданные силы:* силы тяжести \bar{P} , \bar{G} колеса и рейки, $P = mg$, $G = m_1g$, а также сила \bar{T} и момент сопротивления \tilde{M}_c .

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из рейки 1, и колеса 2 в пространстве неподвижного основания. Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем перемещение рейки – s (рис. 4.7).

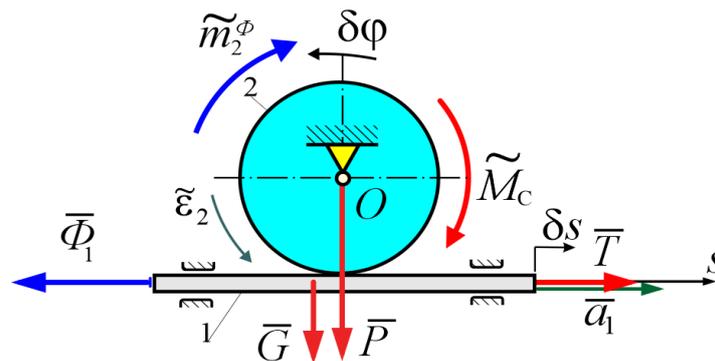


Рис. 4.7

3. *Связи:* – подшипник для колеса – идеальная связь;
– гладкая поверхность для рейки – идеальная связь.

4. *Силы инерции:*

Сила инерции рейки, движущейся поступательно с ускорением \bar{a} ,

$$\{d\bar{\Phi}_1\} \sim \bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_1 = -m\bar{a}, \Phi_1 = ma.$$

Колесо вращается вокруг своей главной и центральной оси инерции с угловым ускорением ε , $\varepsilon = \frac{a}{r}$.

$$\{d\bar{\Phi}_2\} \sim \tilde{m}_2^\Phi, \quad \tilde{m}_2^\Phi = -\tilde{\varepsilon}I_2, \quad m_2^\Phi = \frac{\varepsilon m_1 r^2}{2}.$$

Здесь $I_2 = \frac{m_1 r^2}{2}$ – момент инерции колеса относительно оси вращения.

5. Чтобы составить общее уравнение динамики, выпишем все заданные силы вместе с силами инерции

$$(\bar{P}, \bar{G}, \bar{T}, \tilde{M}_c, \bar{\Phi}_1, \tilde{m}_2^\Phi).$$

6. Запишем основное уравнение динамики.

При сообщении рейке возможного поступательного перемещения δs колесо получит возможное вращательное перемещение $\delta\varphi$, $\delta\varphi = \frac{\delta s}{r}$

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A_k^B = T\delta s - \Phi_1\delta s - M_c\delta\varphi - m_2^\Phi\delta\varphi = 0.$$

Подставив значения сил инерции и элементарных перемещений, получим уравнение

$$T\delta s - m\varepsilon r\delta s - \frac{M_c}{r}\delta s - \frac{m_1\varepsilon r}{2}\delta s = 0.$$

Используя указанные выше зависимости, определяем угловое ускорение колеса:

$$\varepsilon = \frac{Tr - M_c}{m + 0,5m_1}.$$

Пример 4.3

Груз весом $P = 100$ Н при помощи нерастяжимой нити, перекинутой через блок весом $Q = 50$ Н и радиусом r , приводит в движение каток весом $G = 200$ Н и радиусом $R = 0,2$ м. Коэффициент трения качения катка о наклонную плоскость $k = 3$ см. Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$.

Определить ускорение оси A катка и натяжение нити, считая, что проскальзывание отсутствует. Весом нити и трением в подшипнике пренебречь, блок и каток считать однородными дисками (рис. 4.8).

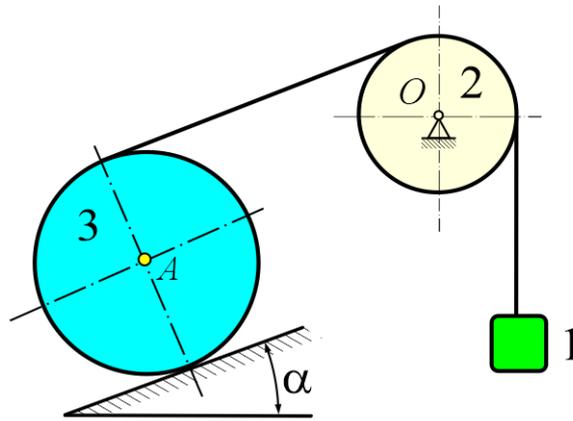


Рис. 4.8

Решение

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из груза 1, блока 2, катка 3 и нити, в пространстве основания. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы (в этом легко убедиться, если закрепить груз, имеющий одну степень свободы). За обобщенную координату примем координату x груза 1.

2. *Заданные силы:* силы тяжести \bar{P} , \bar{Q} , \bar{G} груза, блока, катка.

3. *Связи:* – подшипник для блока – идеальная связь;

– шероховатая деформируемая поверхность для катка – реальная связь.

Идеализируем её, приложив к катку пару трения качения с моментом $\tilde{m}_{\text{тр}}$.

Из рассмотренных ранее задач известно, что $m_{\text{тр}} = kG\cos\alpha$.

4. *Силы инерции:* для нахождения сил инерции тел системы найдём кинематические соотношения.

Действительное движение груза 1 является поступательным со скоростью \bar{v}_1 предполагаемое направление которой показано на рис. 4.9.

Блок 2 вращается около оси C с угловой скоростью $\tilde{\omega}_2$ модуль которой

$\omega_2 = \frac{v_1}{r}$. Каток 3 совершает плоское движение. Скорость точки B катка

направлена по нити и по величине $v_B = v_1$. Качение катка происходит без проскальзывания, поэтому МЦС катка находится в точке K . Следовательно,

модуль ω_3 угловой скорости катка $\omega_3 = \frac{v_B}{KB} = \frac{v_B}{2R}$, а скорость центра катка

$$v_A = \omega_3 KA = 0,5v_1, \quad \bar{v}_A \perp_{\tilde{\omega}_3} \overline{KA}.$$

Дифференцируя по времени соотношения между скоростями, найдём:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_1}{2R}, \quad a_A = \frac{a_1}{2}.$$

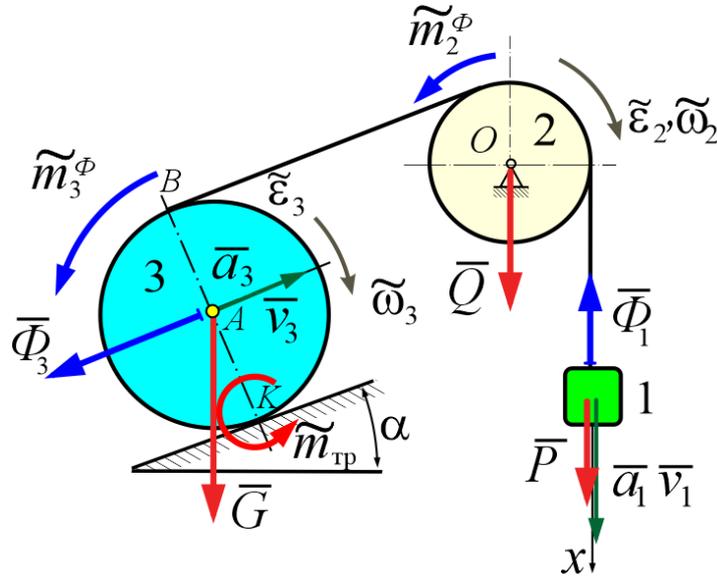


Рис. 4.9

Теперь получаем

$$\{d\bar{\Phi}_1\} \sim \bar{\Phi}_1, \quad \bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_1, \quad \Phi_1 = \frac{P}{g}a_1.$$

$$\{d\bar{\Phi}_2\} \sim \tilde{m}_2^\Phi, \quad \tilde{m}_2^\Phi = -\tilde{\varepsilon}_2 I_2, \quad m_2^\Phi = \frac{Qra_1}{2g}.$$

$$\{d\bar{\Phi}_3\} \sim (\bar{\Phi}_3, \tilde{m}_3^\Phi), \quad \bar{\Phi}_3 = -m_3\bar{a}_3, \quad \tilde{m}_3^\Phi = -\tilde{\varepsilon}_3 I_3, \quad \Phi_3 = \frac{a_1 G}{2g}, \quad m_3^\Phi = \frac{a_1 GR}{4g}.$$

Так как действительное направление ускорения груза \bar{a}_1 неизвестно, то предположим, что векторы \bar{a}_1 и \bar{v}_1 одинаково направлены. Тогда угловые ускорения блока и катка будут направлены так же, как угловые скорости этих тел, а ускорение точки A катка направлено по ее скорости. (На рисунке во избежание загромождения скорости и ускорения изображены одной стрелкой). Силы инерции приложены к центрам тяжести груза и катка и направлены противоположно их ускорениям, а моменты результирующих пар направлены противоположно угловым ускорениям блока и катка.

5. Чтобы составить общее уравнение динамики, выпишем все заданные силы вместе с силами инерции

$$(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{G}, \tilde{m}_{\text{тр}}, \bar{\Phi}_1, \tilde{m}_2^\phi, \bar{\Phi}_3, \tilde{m}_3^\phi).$$

6. Так как действительное движение системы является одним из возможных, то сообщим грузу 1 в рассматриваемый момент времени возможное перемещение со скоростью \bar{v}_1 . Тогда можно записать основное уравнение динамики в виде:

$$\sum W_k^B = \bar{P} \cdot \bar{v}_1 + \bar{Q} \cdot \bar{v}_O + \bar{G} \cdot \bar{v}_A + \tilde{m}_{\text{тр}} \tilde{\omega}_3 + \bar{\Phi}_1 \cdot \bar{v}_1 + \tilde{m}_2^\phi \tilde{\omega}_2 + \bar{\Phi}_3 \cdot \bar{v}_A + \tilde{m}_3^\phi \tilde{\omega}_3 = 0.$$

Или

$$Pv_1 - G \frac{v_1}{2} \sin \alpha - kG \frac{v_1}{2R} \cos \alpha - \frac{P}{g} a_1 v_1 - \frac{Q a_1 v_1}{2g} - \frac{G}{4g} a_1 v_1 - \frac{G a_1 v_1}{8g} = 0.$$

Заметим, что мощности всех сил инерции имеют один и тот же знак.

Подставляя в общее уравнение динамики значения мощностей заданных сил и сил инерции, после сокращения на возможную скорость груза получим

$$a_1 = g \frac{8P - 4G \left(\sin \alpha + \frac{k}{R} \cos \alpha \right)}{8P + 4Q + 3G} = 2,24 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}.$$

Следовательно, искомое ускорение центра А катка равно

$$a_A = 0,5 a_1 = 1,12 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}.$$

Движение катка

1. Рассмотрим движение одного катка в пространстве основания (рис. 4.10).

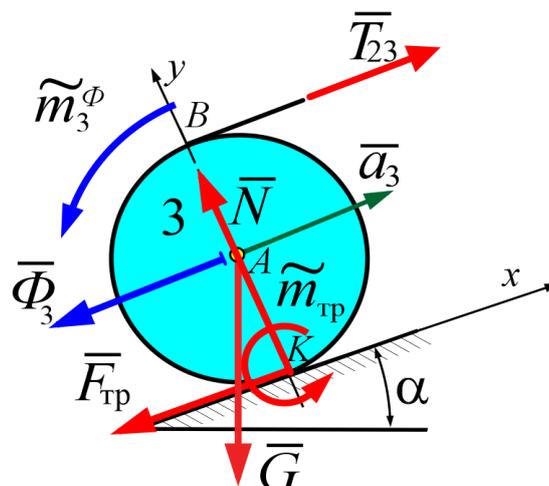


Рис. 4.10

2. *Заданные силы:* сила тяжести катка \bar{G} .
3. *Связи:* а) *внешние:* шероховатая деформируемая поверхность, её реакции $-\bar{N}$, $\bar{F}_{\text{тр}}$, $\tilde{m}_{\text{тр}}$.

б) *внутренние:* нить, реакция \bar{T}_{23} которой направлена по нити к блоку 2.

4. *Силы инерции частиц катка* приведением их к центру масс заменяются результирующей силой и результирующей парой (см. выше):

$$\{d\bar{\Phi}_3\} \sim (\bar{\Phi}_3, \tilde{m}_3^\Phi), \quad \bar{\Phi}_3 = -m_3\bar{a}_3, \quad \tilde{m}_3^\Phi = -\tilde{\varepsilon}_3 I_3, \quad \Phi_3 = \frac{a_1 G}{2g}, \quad m_3^\Phi = \frac{a_1 m_3 R}{4}.$$

5. По принципу Даламбера силы, приложенные к катку, и силы инерции его частиц уравниваются. Запись принципа Даламбера имеет вид:

$$(\bar{G}, \bar{N}, \bar{F}_{\text{тр}}, \tilde{m}_{\text{тр}}, \bar{T}_{23}, \bar{\Phi}_3, \tilde{m}_3^\Phi) \sim 0.$$

6. Для нахождения силы \bar{N} нормального давления и силы натяжения \bar{T}_{23} достаточно записать только два из условий равновесия этих сил:

$$\sum F_{ky} = -G \cos \alpha + N = 0, \quad \rightarrow N = G \cos \alpha = m_3 g \cos \alpha.$$

$$\sum \tilde{m}_K F_{ky} = GR \sin \alpha + m_{\text{тр}} - T_{23} 2R + \Phi_3 R + m_3^\Phi = 0.$$

Добавив уравнение трения $m_{\text{тр}} = kN$, получим:

$$N = 173 \text{ Н}; \quad m_{\text{тр}} = 1,73 \text{ Нм}; \quad T_{23} = 71,5 \text{ Н}.$$

Движение груза

1. Рассмотрим движение груза в 1 пространстве основания (рис. 4.11).

2. *Заданной силой* является сила тяжести груза \bar{P} .

3. *Связью* для груза служит нить, реакция которой направлена к блоку 2.

4. Силы инерции груза:

$$\{d\bar{\Phi}_1\} \sim \bar{\Phi}_1, \quad \bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_1, \quad \Phi_1 = \frac{P}{g} a_1$$

5. По принципу Даламбера $(\bar{P}, \bar{T}_{21}, \bar{\Phi}_1) \sim 0$.

6. Условие равновесия этих сил в аналитической форме имеет вид:

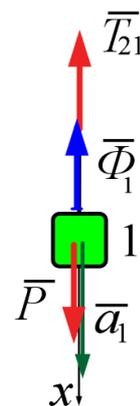


Рис. 4.11

$$\sum F_{kx} = P - T_{21} - \Phi_1 = 0, \rightarrow T_{21} = P \left(1 - \frac{a_1}{g} \right) = 77,14 \text{ Н.}$$

Пример 4.4. К барабану 2 массы m подвешен на невесомой и нерастяжимой нити груз 3 массой m_3 (рис. 4.12). Барабан тормозится невесомым рычагом с тормозом, к которому приложена сила \bar{P} . Высота колодки тормоза h , плечи равны l и d . Коэффициент трения тормоза f . Определить угловое ускорение барабана, считая, что его радиус инерции равен ρ .

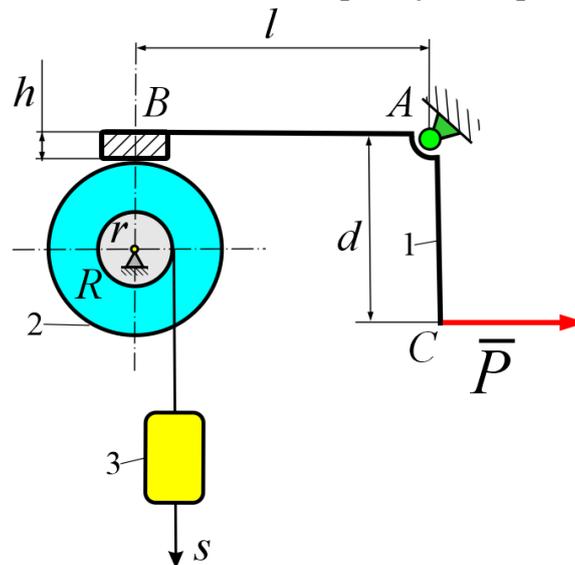


Рис. 4.12

Решение

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тормоза 1, и барабана 2 и груза 3 в пространстве неподвижного основания. Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем перемещение груза – s (рис. 4.12). Расчленим систему и рассмотрим отдельно равновесие рычага с тормозом, а затем движение барабана с грузом.

1. Равновесие рычага с тормозом

1. Рассмотрим равновесие рычага с тормозом (рис. 4.13).

2. Заданные силы: сила \bar{P} .

3. Связи: – а) внешние: неподвижный шарнир А, его реакции: \bar{X}_A, \bar{Y}_A ;

– б) внутренние: шероховатая поверхность барабана, её реакции: $\bar{N}_{21}, \bar{F}_{\text{тр}21}$, силу трения направляем соответственно возможному вращению барабана по часовой стрелке.

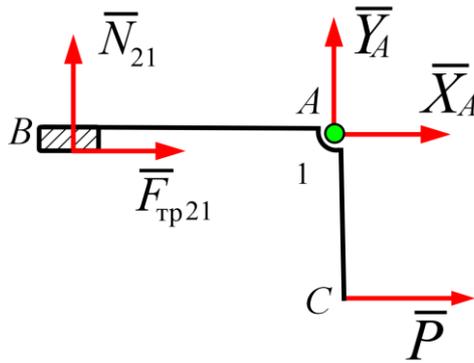


Рис. 4.13

4. Тормоз находится в равновесии под действием сил:

$$(\bar{P}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{N}_{21}, \bar{F}_{тр21}) \sim 0.$$

5. Поскольку реакции опоры находить не требуется, составим только одно из уравнений равновесия – уравнение моментов сил относительно точки A.

$$\sum \tilde{m}_A \bar{F}_k = Pr - N_{21}l + F_{тр21}h = 0.$$

К этому уравнению необходимо добавить уравнение трения скольжения:

$$F_{тр21} = fN_{21}.$$

В итоге получим: $N_{21} = \frac{Pd}{l - fh}$, $F_{тр21} = \frac{Pfd}{l - fh}$.

II. Движение барабана с грузом

1. Рассмотрим движение барабана с грузом в пространстве основания (рис. 4.14).

2. Заданными силами являются силы тяжести груза и барабана:

$$\bar{G}, \bar{Q}, G = m_3g, Q = mg..$$

3. Связи: – подшипник для барабана – идеальная связь;

– шероховатая поверхность – реальная связь. Идеализируем её, приложив к барабану силу трения скольжения

$$\bar{F}_{тр12}, (\bar{F}_{тр12} = -\bar{F}_{тр21}).$$

4. Силы инерции:

Так как действительное направление ускорения груза \bar{a} неизвестно, то предположим, что векторы \bar{a} и \bar{v} одинаково

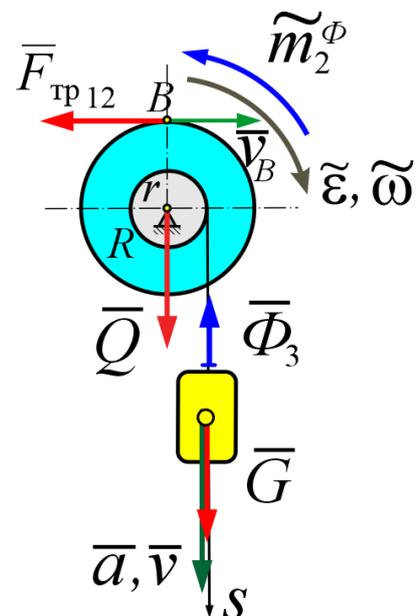


Рис. 4.14

направлены. Тогда угловое ускорение барабана будет направлено так же, как угловая скорость. (На рисунке во избежание загромождения скорости и ускорения изображены одной стрелкой). Сила инерции груза приложена к центру тяжести груза и направлена противоположно ускорению, а момент результирующей пары направлен противоположно угловому ускорению барабана.

Сила инерции груза, движущегося поступательно с ускорением \bar{a} ,

$$\{d\bar{\Phi}_3\} \sim \bar{\Phi}_3, \quad \bar{\Phi}_3 = -m_3\bar{a}, \quad \Phi_3 = m_3a.$$

Барабан вращается вокруг своей главной и центральной оси инерции с угловым ускорением ε , $\varepsilon = \frac{a}{r}$.

$$\{d\bar{\Phi}_2\} \sim \tilde{m}_2^\Phi, \quad \tilde{m}_2^\Phi = -\tilde{\varepsilon}I_2, \quad m_2^\Phi = m\rho^2 \frac{a}{r}.$$

Здесь $I_2 = m\rho^2$ – момент инерции барабана, относительно оси вращения.

5. Чтобы составить общее уравнение динамики, выпишем все заданные силы вместе с силами инерции

$$(\bar{G}, \bar{Q}, \bar{F}_{\text{тр}21}, \bar{\Phi}_3, \tilde{m}_2^\Phi).$$

6. Так как действительное движение системы является одним из возможных, то сообщим грузу 3 в рассматриваемый момент времени возможное перемещение со скоростью \bar{v} . При этом барабан получит угловую скорость

$$\omega = \frac{v}{r}, \text{ а точка приложения силы трения получит скорость } v_B = \omega_2 R = \frac{vR}{r}$$

. Тогда можно записать основное уравнение динамики в виде:

$$\sum W_k^B = \bar{G} \cdot \bar{v} + \bar{F}_{\text{тр}} \bar{v}_B + \tilde{m}_2^\Phi \tilde{\omega} + \bar{\Phi}_3 \cdot \bar{v} = 0.$$

Или

$$m_3gv - m_3av - \frac{m\rho^2 a}{r^2} v - \frac{Pfrd}{(l-fh)r} v = 0.$$

После сокращения на возможную скорость груза получим:

$$a = \frac{m_3g - \frac{Pfrd}{(l-fh)r}}{m_3 + \frac{m\rho^2}{r^2}}.$$

4.3. Применение уравнений Лагранжа II рода к исследованию движения механической системы

Уравнения Лагранжа II рода

Дифференциальные уравнения движения голономной механической системы, имеющей s степеней свободы, на которую наложены стационарные идеальные связи, имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, s),$$

где $T = T(\{q_j\}_s, \{\dot{q}_j\}_s)$ кинетическая энергия системы, которая зависит от ее обобщенных координат $\{q_j\}_s$ и обобщенных скоростей $\{\dot{q}_j\}_s$;

$\{Q_j\}_s$ – обобщенные силы заданных сил $\{\bar{F}_k\}_n$.

Обобщенную силу, соответствующую какой-либо обобщенной координате q_j , следует вычислять по формуле $Q_j = \frac{\delta A_j^B}{\delta q_j}$ или $Q_j = \frac{W_j^B}{\dot{q}_j}$.

где δA_j^B возможная работа, а W_j^B – возможная мощность всех заданных сил $\{\bar{F}_k\}_n$ на возможном перемещении системы, обусловленном изменением координаты q_j . (В таком перемещении все остальные координаты $\{q_j\}_s$ являются «закреплёнными»).

Уравнения Лагранжа II рода для консервативных систем

В этом случае обобщённые силы могут быть выражены через потенциальную энергию системы:

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Уравнения Лагранжа II рода запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1, s).$$

Введем кинетический потенциал или функцию Лагранжа: $L = T - \Pi$.

Получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, s).$$

Методические указания по решению задач аналитической динамики с помощью уравнений Лагранжа второго рода

1. Назвать систему и указать пространство, в котором рассматривается ее движение. Определить число степеней свободы и назначить обобщенные координаты.

2. Указать заданные силы.

3. Назвать связи и проверить их на идеальность. Реальные связи отбросить и заменить их реакциями.

4. Найти обобщенные силы или выражение для потенциальной энергии, если система консервативна.

5. Выразить кинетическую энергию системы через обобщенные скорости и координаты.

6. Используя уравнения Лагранжа второго рода, получить математическую модель движения системы и, решая полученное уравнение, найти искомые величины.

Число уравнений Лагранжа второго рода равно числу 3 степеней свободы системы, к реакции идеальных связей в эти уравнения не входят.

Первые три пункта данного алгоритма математического моделирования движения механических систем с помощью принципа Даламбера-Лагранжа полностью совпадают. Поэтому пояснения к алгоритму начнем с четвертого пункта.

Кратко напомним основной способ вычисления обобщенных сил.

Система изображается в произвольном положении, не совпадающим с начальным положением или с положением нулевого уровня. Из этого положения ей сообщается первое независимое возможное перемещение, т.е. дается бесконечно малое приращение первой обобщенной координате ($\delta q_1 \neq 0$), а все остальные обобщенные координаты считаются неизменными ($\delta q_{j \neq 1} = 0$).

На этом перемещении подсчитывается возможная работа δA_1^B или возможная мощность W_j^B сил рассматриваемой системы и по формуле

$$Q_1 = \frac{\delta A_1^B}{\delta q_1} \quad \text{или} \quad Q_1 = \frac{W_1^B}{\dot{q}_1} \quad \text{подсчитывается первая обобщенная сила.}$$

Этот процесс с соответствующими изменениями повторяется столько раз, каково число степеней свободы s рассматриваемой системы.

Если рассматриваемая система консервативна (среди её заданных сил содержатся только потенциальные силы, например, силы тяжести или упругости), то находится потенциальная энергия системы и по ней вычисляются обобщенные силы по формуле

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

либо вычисляется функция Лагранжа $L = T - \Pi$.

Потенциальной энергией системы ($\Pi(\{q_j\}_s)$) называется работа, которую совершают потенциальные (консервативные) силы при перемещении системы из данного (произвольного) положения в положение нулевого уровня. За положение нулевого уровня рекомендуется брать положение системы, соответствующее началу отсчёта обобщённых координат ($q_j = 0, j = 1, s$). Таким образом $\Pi(\{0\}_s) = 0$.

Если потенциальными силами являются только силы тяжести и силы упругости (пружин), то потенциальную энергию можно подсчитать по формуле

$$\Pi = \sum_{i=1}^n P_i (h_i - h_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m c_k (\lambda_{2k}^2 - \lambda_{1k}^2),$$

где P_i, h_i, h_i^0 – вес и высоты центра тяжести i – го МО в произвольном положении и положении нулевого уровня; $c_k, \lambda_{2k}, \lambda_{1k}$ – жесткость и деформации k – й пружины в конце и начале перемещения; n и m – числа тел и пружин, входящих в систему.

Понятие о кинетической энергии и способы ее вычисления рассматривались в разделе "Общие теоремы динамики".

Существенным достоинством метода является стандартность действий, необходимых для решения задач.

С помощью уравнений Лагранжа второго рода получаем полную математическую модель движения идеальной голономной системы, удовлетворяющую условиям задачи, которую можно путем соответствующей перенумерации обобщенных координат в общем случае представить в виде совокупности трех групп уравнений:

1) алгебраические уравнения типа

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, s_1),$$

2) первые интегралы

$$B_j \dot{q}_j + C_j q_j = R_j \quad (j = s_1, s_2),$$

3) дифференциальные уравнения движения второго порядка

$$A_j \ddot{q}_j + B_j^1 \dot{q}_j + C_j^1 q_j + D_j = R_j^1 \quad (j = s_2, s),$$

и начальных условий: при $t = 0$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j^0, \quad q_j = q_j^0 \quad (j = 1, s).$$

Здесь в общем случае коэффициенты $A_j, B_j, B_j^1, C_j, C_j^1, D_j$ и правые части уравнений являются функциями обобщённых координат и времени.

Если A_j, B_j, C_j константы и $s - s_2 \leq 2$, то данные уравнения легко проинтегрировать аналитически, в противном случае рекомендуется их интегрировать численно.

Пример 4.5

Прямоугольная призма весом $G = 30$ кг помещена на гладкую горизонтальную плоскость (рис. 4.15). По ее наклонной грани катится без скольжения однородный круглый цилиндр весом $P = 20$ кг, $\alpha = 30^\circ$.

Определить движение системы, если в начальный момент она находилась в покое и цилиндр касался призмы в верхней точке ее наклонной грани.

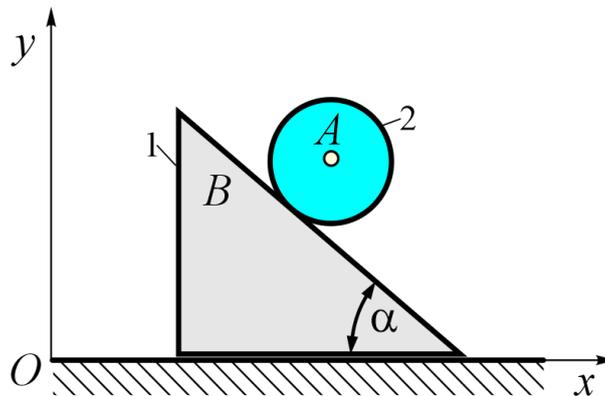


Рис. 4.15

Решение

1. Рассмотрим движение системы, состоящей из призмы 1 и цилиндра 2, в пространстве основания, с которым связаны координатные оси Oxy (рис. 4.16). В начальный момент времени левая грань призмы совпадает с осью Oy .

Рассматриваемая система имеет 2 степени свободы, так как, чтобы остановить систему надо закрепить и призму, и цилиндр, имеющие по одной степени свободы: $s = 2$. За обобщенные координаты примем координату x призмы и координату ξ оси A цилиндра: $q_1 = x, q_2 = \xi$.

2. Заданные силы – силы тяжести призмы \bar{G} и цилиндра \bar{P} .

3. *Связи*: гладкая поверхность для призмы и шероховатая недеформируемая поверхность для цилиндра – идеальные связи.

4. *Обобщённые силы*:

а) Для нахождения обобщенной силы Q_x , соответствующей обобщённой координате x , сообщим системе возможное перемещение, обусловленное изменением этой координаты ($\dot{x} \neq 0, \dot{\xi} = 0$). Система будет двигаться поступательно как твердое тело ($v_{1x} = v_{2x} = \dot{x}$) (рис. 4.17). Мощность заданных сил на x -парциальном движении:

$$W_x^B = \bar{G} \cdot \bar{v}_{1x} + \bar{P} \cdot \bar{v}_{2x} = 0.$$

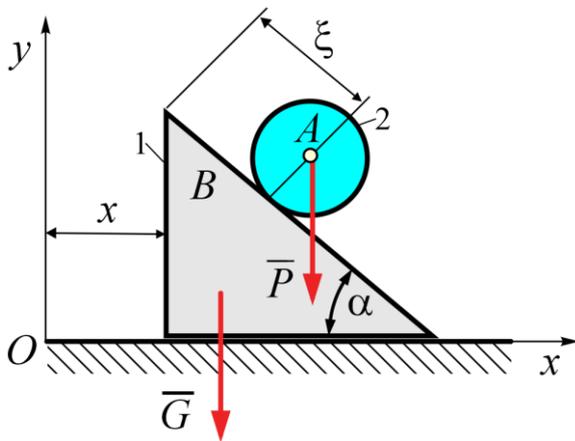


Рис. 4.16

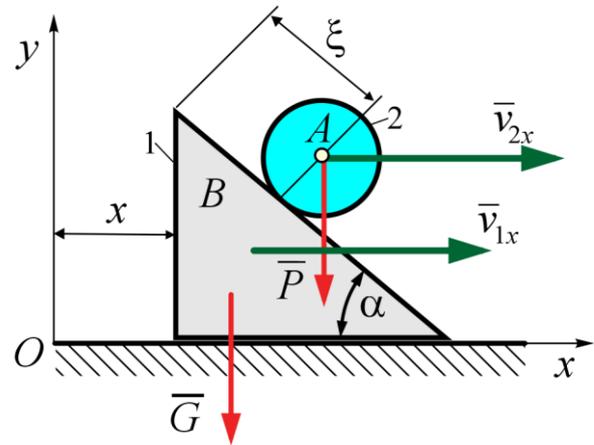


Рис. 4.17

Поэтому $Q_x = \frac{W_x^B}{\dot{x}} = 0.$

б) Для нахождения обобщенной силы Q_ξ , соответствующей обобщённой координате ξ , сообщим системе возможное перемещение, обусловленное изменением этой координаты ($\dot{x} = 0, \dot{\xi} \neq 0$) (рис. 4.18). Призма остаётся неподвижной, а цилиндр катится по ней без проскальзывания, имея скорость центра $A - \bar{v}_{2\xi}$, ($v_{2\xi} = \dot{\xi}$) и угловую скорость $\tilde{\omega}_{2\xi}$, $\omega_{2\xi} = \frac{\dot{\xi}}{r}$, где r – радиус цилиндра.

Мощность заданных сил на ξ -парциальном движении:

$$W_\xi^B = \bar{P} \cdot \bar{v}_{2\xi} = P \dot{\xi} \sin \alpha.$$

Находим $Q_{\xi} = \frac{W_{\xi}^B}{\dot{\xi}} = \frac{P\dot{\xi}\sin\alpha}{\dot{\xi}} = P\sin\alpha$.

5. Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2$ (рис. 4.19).

В пространстве основания призма движется поступательно со скоростью \bar{v}_{1x} ($v_{1x} = \dot{x}$), поэтому получаем $T_1 = \frac{m_1 v_{1x}^2}{2} = \frac{G\dot{x}^2}{2g}$.

Движение цилиндра в пространстве основания является плоским. Отсюда:

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2}, \text{ где } I_2 = \frac{Pr^2}{2g}.$$

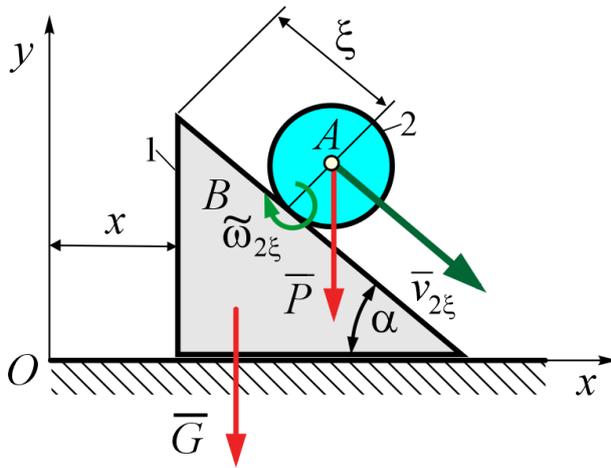


Рис. 4.18

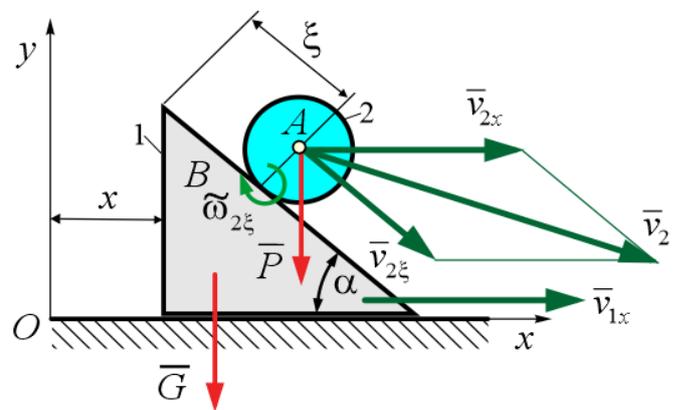


Рис. 4.19

Это движение представим сложным, состоящим из движения цилиндра относительно призмы и вместе с ней в пространстве основания (рис. 4.19). Тогда абсолютная скорость центра A цилиндра и его абсолютная угловая скорость определяются равенствами:

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_{2x} + \bar{v}_{2\xi}, \quad \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_{2\xi}, \quad \omega_2 = \frac{\dot{\xi}}{r}.$$

Находим:

$$v_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{\xi}^2 + 2\dot{x}\dot{\xi}\cos\alpha.$$

Следовательно, кинетическая энергия цилиндра

$$T_2 = \frac{P}{2g} \left(\dot{x}^2 + 1,5\dot{\xi}^2 + 2\dot{x}\dot{\xi}\cos\alpha \right).$$

Теперь получим кинетическую энергию системы, выраженную через обобщенные скорости:

$$T = \frac{P+G}{2g} \dot{x}^2 + \frac{3P}{4g} \dot{\xi}^2 + \frac{P}{g} \dot{x}\dot{\xi}\cos\alpha.$$

6. Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q_\xi.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P+G}{g} \dot{x} + \frac{P}{g} \dot{\xi}\cos\alpha; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{3P}{2g} \dot{\xi} + \frac{P}{g} \dot{x}\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{P+G}{g} \ddot{x} + \frac{P}{g} \ddot{\xi}\cos\alpha; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) = \frac{3P}{2g} \ddot{\xi} + \frac{P}{g} \ddot{x}\cos\alpha.$$

Подставив все найденные величины в уравнения Лагранжа, будем иметь:

$$(P+G)\ddot{x} + P\ddot{\xi}\cos\alpha = 0; \quad 1,5\ddot{\xi} + \ddot{x}\cos\alpha = g\sin\alpha.$$

Разрешив эти уравнения относительно вторых производных, получим

$$\ddot{x} = g \frac{P\sin\alpha}{3(P+G) - 2P\cos^2\alpha} = -2,83 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad \ddot{\xi} = g \frac{2(P+G)\sin\alpha}{3(P+G) - 2P\cos^2\alpha} = 8,16 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Интегрируя эти соотношения при нулевых начальных условиях

$$x_0 = 0; \quad \xi_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = 0; \quad \dot{\xi}_0 = 0,$$

получим конечные уравнения движения системы:

$$x = -1,42t^2 \text{ м}, \quad \xi = 4,09t^2 \text{ м}.$$

Пример 4.6

Три груза с массами m_1 , m_2 и m_3 с помощью двух невесомых блоков без трения и двух нитей объединены в механическую систему (рис. 6). Грузы могут двигаться только в вертикальном направлении. Найти уравнения движения системы.

Решение

1. Рассмотрим движение системы, состоящей из трёх грузов, двух блоков и нитей в пространстве основания (рис. 4.20).

У данной системы две степени свободы и в качестве двух обобщенных координат выберем координаты q_1 (положение груза 1) и q_2 (положение груза 2).

2. Заданные силы – силы тяжести грузов

$$\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3; P_1 = m_1 g, P_2 = m_2 g, P_3 = m_3 g .$$

3. Связи: идеальные, так как трение отсутствует.

4. Обобщенные силы определим через потенциальную энергию.

Потенциальная энергия системы будет следующим образом зависеть от обобщенных координат:

$$\Pi = -m_1 g q_1 - m_2 g q_2 + m_3 g (2q_1 + q_2) .$$

Здесь с ростом координат q_1 и q_2 потенциальная энергия грузов 1 и 2 уменьшается, а груза 3 – увеличивается (с ростом q_1 и q_2 груз 3 поднимается на величину $q_2 + 2q_1$). Взяв частные производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам найдем:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = (m_1 - 2m_3)g; \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = (m_2 - 2m_3)g .$$

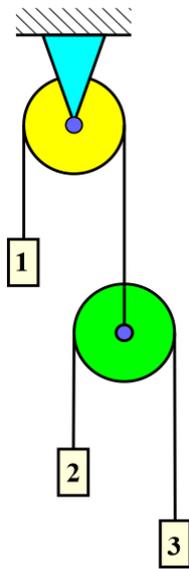


Рис. 4.20

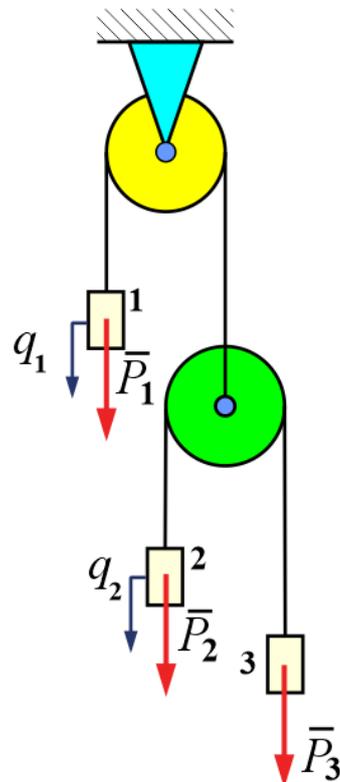


Рис. 4.21

5. Кинетическая энергия данной системы найдётся как:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{q}_2^2}{2} + \frac{m_3 (\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1)^2}{2}.$$

6. Получаем систему двух уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{q}_1 + m_3 2(\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = m_1 \ddot{q}_1 + m_3 2(\ddot{q}_2 + 2\ddot{q}_1); \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \dot{q}_2 + m_3 (\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = m_2 \ddot{q}_2 + m_3 (\ddot{q}_2 + 2\ddot{q}_1); \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0.$$

Подставив все найденные величины в уравнения Лагранжа, будем иметь:

$$(m_1 + 4m_3)\ddot{q}_1 + 2m_3\ddot{q}_2 = (m_1 - 2m_3)g;$$

$$2m_3\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 = (m_2 - m_3)g.$$

Пример 4.7

Невесомая и нерастяжимая нить (рис. 4.22.) к концу которой привязан груз 1, огибает неподвижный блок 2, охватывает подвижный блок 3, поднимается вверх на неподвижный блок 5 и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к её концу привязан груз 6. К оси блока 3 прикреплен груз 4. Трением скольжения груза 6 о поверхность основания пренебечь. Все тела однородные. Массы грузов $m_1 = m_6 = m_4 = m$. Массы блоков $m_2 = m_3 = m_5 = 0,1m$. Определить ускорение груза 1.

Решение

1. Рассмотрим движение системы, состоящей из грузов 1, 4 и 6, блоков 2, 3 и 5 в пространстве основания.

Если пренебечь покачиванием на нитях грузов 1 и 4 и подвижного блока 3 (нет сил, вызывающих такое движение), то исходная система имеет две степени свободы. Действительно, груз 6 имеет одну степень свободы (возможное поступательное движение вдоль горизонтальной прямой. Закрепим его. При этом блок 5 остается тоже неподвижным (из условия нерастяжимости нити и ее движения без проскальзывания), но грузы 1 и 4 могут поступательно перемещаться вверх или вниз, а с ними и блок 3. Значит, система имеет более одной степени свободы. Закрепим теперь дополнительно

груз 1, который имеет одну степень свободы (возможное поступательное движение по вертикали). Убеждаемся, что исходная система становится неподвижной, так как нить нерастяжима и не должна скользить. Таким образом, отняв у исходной системы две степени свободы, мы сделали ее неподвижной, значит, она имеет две степени свободы: $s = 2$.

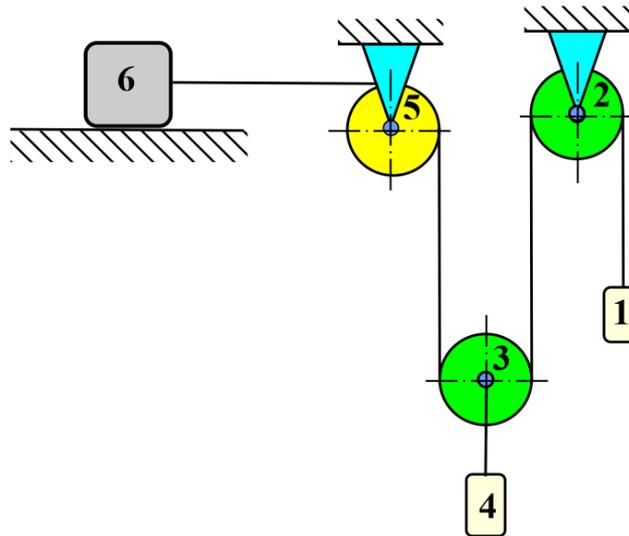


Рис. 4.22

За обобщённые координаты можно, например, принять координаты x_6 и y_1 , определяющие те возможные движения, которые мы отнимали у системы (рис. б): $q_1 = y_1$, $q_2 = x_6$.

2. *Заданные силы* – силы тяжести грузов и блоков (рис. 4.23),

$$\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{P}_6; P_i = m_i g.$$

3. *Связи*: исходная система является голономной с идеальными связями.

4. *Обобщённые силы*:

а) Для определения обобщённых сил сообщим вначале системе первое независимое возможное перемещение (рис. 4.24) ($\dot{q}_1 \neq 0$, $\dot{q}_2 = 0$). На этом возможном перемещении груз 6 и блок 5 с прилегающей к нему нитью остаются неподвижными. Имеем:

$$v_{11} = \dot{q}_1, v_{31} = v_{41} = \frac{\dot{q}_1}{2}, \omega_{21} = \frac{\dot{q}_1}{r_2}, \omega_{31} = \frac{\dot{q}_1}{2r_3}.$$

Возможные мощности сил на первом возможном перемещении

$$W_1^B = P_1 v_{11} - P_3 v_{31} - P_4 v_{41} = mg \dot{q}_1 - 0,1mg \frac{\dot{q}_1}{2} - mg \frac{\dot{q}_1}{2} = 0,45mg \dot{q}_1.$$

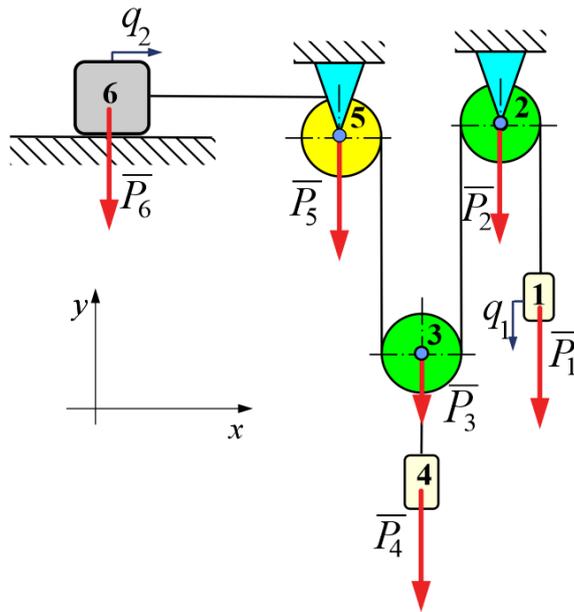


Рис. 4.23

Отсюда $Q_1 = \frac{W_1^B}{\dot{q}_1} = 0,45mg$.

б) Сообщим системе второе независимое возможное перемещение (рис. 4.25) ($\dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 \neq 0$). На этом возможном перемещении груз 1 и блок 2 с прилегающей к нему нитью остаются неподвижными. Имеем:

$$v_{62} = \dot{q}_2, v_{32} = v_{42} = \frac{\dot{q}_2}{2}, \omega_{52} = \frac{\dot{q}_2}{r_5}, \omega_{32} = \frac{\dot{q}_2}{2r_3}.$$

Возможные мощности сил на втором возможном перемещении

$$W_2^B = P_3 v_{32} + P_4 v_{42} = 0,1mg \frac{\dot{q}_2}{2} + mg \frac{\dot{q}_2}{2} = 0,55mg\dot{q}_2.$$

Получаем $Q_2 = \frac{W_2^B}{\dot{q}_2} = 0,55mg$.

5. *Кинетическая энергия* системы найдется как сумма кинетических энергий, входящих в нее тел. Тела 1, 4 и 6 совершают поступательные движения, тела 2 и 5 – вращательное, а подвижный блок 3 – плоское (рис. 4.26).

Поэтому получим $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6$.

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m \dot{q}_1^2}{2}; T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{0,1m \dot{q}_1^2}{4},$$

где $v_1 = \dot{q}_1$, $\omega_2 = \frac{\dot{q}_1}{r_2}$, $I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} = \frac{0,1mr_2^2}{2}$;

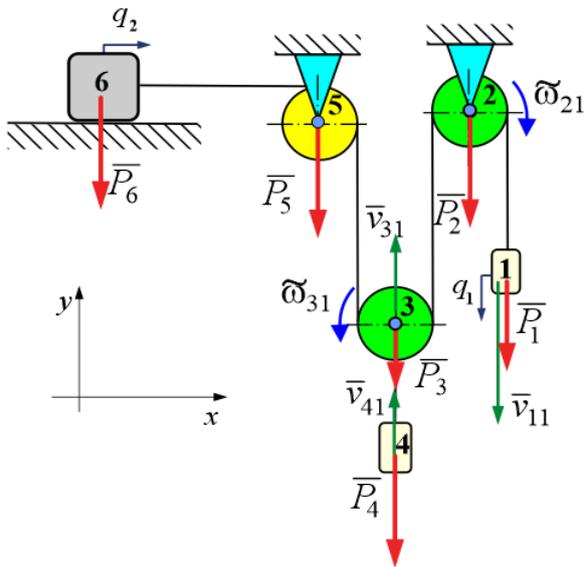


Рис. 4.24

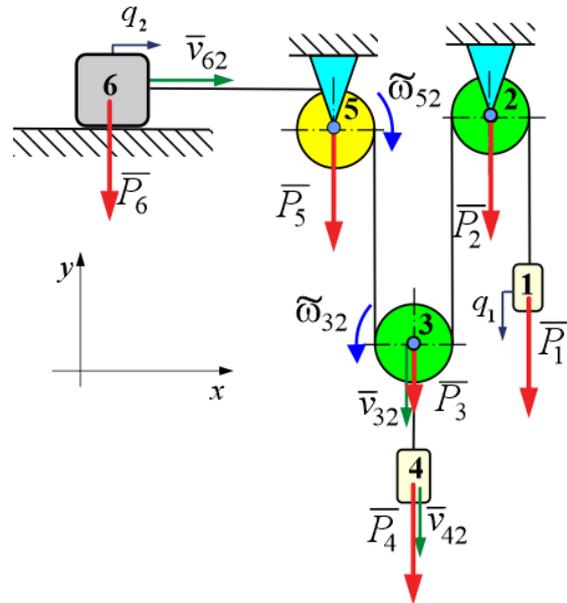


Рис. 4.25

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{0,1m \cdot 0,25(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2}{2} + \frac{0,1m \cdot 0,25(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2}{2} =$$

$$= 0,0125m \left(\frac{3}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{3}{2} \dot{q}_2^2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right),$$

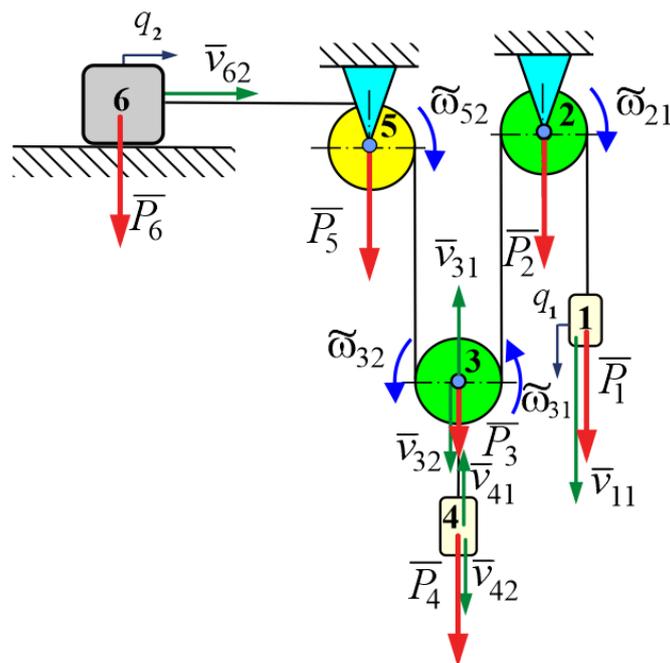


Рис. 4.26

где

$$v_3^2 = (v_{31} - v_{31})^2 = \left(\frac{\dot{q}_1}{2} - \frac{\dot{q}_2}{2} \right)^2 = 0,25(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2,$$

$$\omega_3 = \omega_{31} + \omega_{32} = \frac{\dot{q}_1}{2r_3} + \frac{\dot{q}_2}{2r_3}, I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2};$$

$$T_4 = \frac{m_4 v_4^2}{2} = \frac{m \cdot 0,25(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2}{2} = 0,25m \left(\frac{\dot{q}_1^2}{2} + \frac{\dot{q}_2^2}{2} - \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right),$$

где $v_4^2 = v_3^2 = 0,25(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$;

$$T_5 = \frac{I_5 \omega_5^2}{2} = \frac{0,1m \dot{q}_2^2}{4}; T_6 = \frac{m_6 v_6^2}{2} = \frac{m \dot{q}_2^2}{2},$$

где $\omega_5 = \frac{\dot{q}_2}{r_5}$, $I_5 = \frac{m_5 r_5^2}{2} = \frac{0,1m r_5^2}{2}$, $v_6 = \dot{q}_2$.

В итоге получим

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2} 1,3375m + \frac{\dot{q}_2^2}{2} 1,3375m - \dot{q}_1 \dot{q}_2 0,2625m.$$

Или

$$T = a_{11} \frac{\dot{q}_1^2}{2} + a_{22} \frac{\dot{q}_2^2}{2} - a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

где

$$a_{11} = 1,3375m, a_{22} = 1,3375m, a_{12} = -0,2625m.$$

6. Уравнения Лагранжа II рода запишем в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{22}\dot{q}_2 + a_{12}\dot{q}_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = a_{22}\ddot{q}_2 + a_{12}\ddot{q}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0.$$

Подставив все найденные величины в уравнения Лагранжа, будем иметь:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 = Q_1,$$

$$a_{22}\ddot{q}_2 + a_{12}\ddot{q}_1 = Q_2.$$

Откуда $\ddot{q}_1 = \frac{a_{12}Q_2 - a_{22}Q_1}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = 0,4338 \text{ g} \frac{\text{M}}{\text{c}^2}.$

Пример 4.8

Механическая система из двух однородных цилиндров 1 и 2 и бруска 3 движется под действием силы \bar{F} (рис. 4.27). Проскальзывание цилиндров отсутствует. Найти ускорение бруска, скользящего по гладкой поверхности.

$$F = 40\text{H}; \quad m_1 = 3\text{кг}, \quad m_2 = 2\text{кг}, \quad m_3 = 1\text{кг}.$$

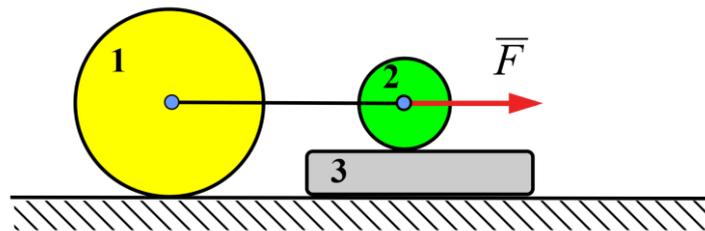


Рис. 4.27

Решение:

1. Рассмотрим движение системы, состоящей из блоков 1 и 2 и бруска 3 в пространстве основания.

Система имеет 2 степени свободы, поскольку смещения цилиндров 1 и 2 одинаковы и могут происходить независимо от смещения бруска, который может смещаться независимо от смещения цилиндров. $s = 2$.

Обобщённые координаты: q_1 – смещение бруска 3 (направление вправо); q_2 – смещение цилиндра 2 (направление вправо) (рис. 4.28).

2. Заданные силы: \bar{F} ($F = 40\text{H}$) – движущая сила, \bar{P}_1 – сила тяжести цилиндра 1, \bar{P}_2 – сила тяжести цилиндра 2, \bar{P}_3 – сила тяжести бруска, ($P_1 = m_1g \approx 30\text{H}$; $P_2 = m_2g \approx 20\text{H}$; $P_3 = m_3g \approx 10\text{H}$).

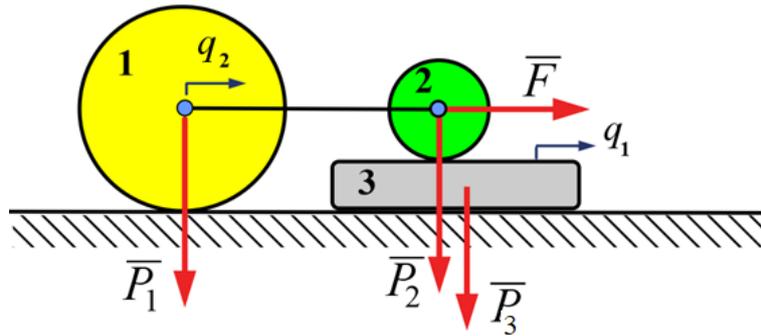


Рис. 4.28

3. *Связи*: исходная система является голономной с идеальными связями.

4. *Обобщённые силы*.

а) сообщим системе вначале первое независимое возможное перемещение. Это значит, что брусок перемещается вправо, центры цилиндров по находятся в покое, а цилиндр 2, при отсутствии проскальзывания, вращается против часовой стрелки (рис. 4.29).

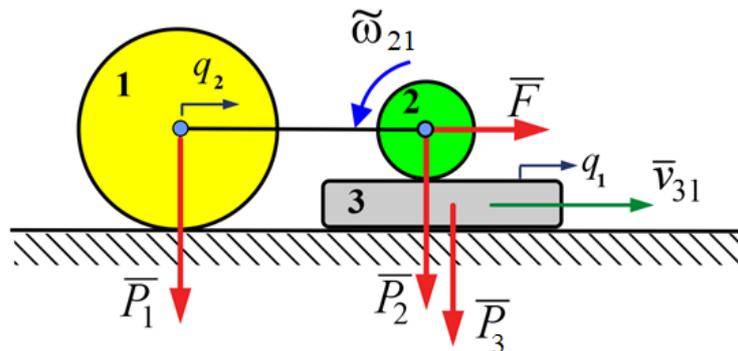


Рис. 4.29

$$\dot{q}_1 \neq 0, \dot{q}_2 = 0; \Rightarrow v_{11} = \dot{q}_1, v_{21} = v_{31} = 0, \omega_{21} = \frac{v_{11}}{r_2} = \frac{\dot{q}_1}{r_2}.$$

Сумма возможных мощностей всех заданных сил на первом парциальном возможном перемещении запишется в виде:

$$W_1^B = \bar{F} \cdot \bar{v}_{21} + \bar{P}_1 \cdot \bar{v}_{11} + \bar{P}_2 \cdot \bar{v}_{21} + \bar{P}_3 \cdot \bar{v}_{31} = 0.$$

Отсюда $Q_1 = \frac{W_1^B}{\dot{q}_1} = 0.$

б) сообщим системе второе независимое возможное перемещение (рис. 4.30):

$$\dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 \neq 0; \Rightarrow v_{32} = 0, v_{22} = v_{12} = \dot{q}_2, \omega_{22} = \frac{\dot{q}_2}{r}, \omega_{32} = \frac{\dot{q}_2}{R}.$$

$$W_2^B = \bar{F} \cdot \bar{v}_{22} + \bar{P}_1 \cdot \bar{v}_{12} + \bar{P}_2 \cdot \bar{v}_{21} + \bar{P}_3 \cdot \bar{v}_{32} = Fv_{22} = F\dot{q}_2.$$

Отсюда $Q_2 = \frac{W_2^B}{\dot{q}_2} = F = 40\text{Н}.$

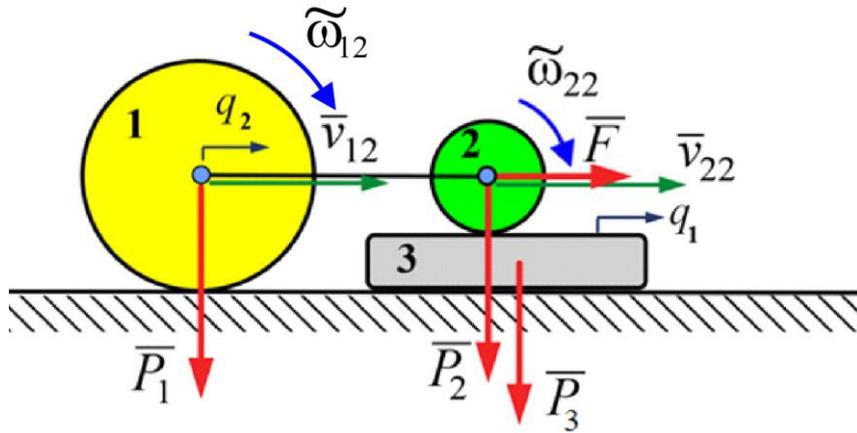


Рис. 4.30

5. Кинетическая энергия механической системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Найдем каждое из этих слагаемых (рис. 4.31).

Кинетическую энергию цилиндра 1, совершающего плоское движение со скоростью центра $\bar{v}_1 = \bar{v}_{11} + \bar{v}_{12}$, $v_1 = \dot{q}_2$ и угловой скоростью

$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_{11} + \tilde{\omega}_{12}$, $\omega_1 = \frac{\dot{q}_2}{R}$, находим по формуле Кёнига:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{3 \cdot \dot{q}_2^2}{2} + \frac{3R^2 \dot{q}_2^2}{2 \cdot 2 \cdot R^2} = 4,5 \frac{\dot{q}_2^2}{2}.$$

Кинетическую энергию цилиндра 2, совершающего плоское движение со скоростью центра $\bar{v}_2 = \bar{v}_{21} + \bar{v}_{22}$, $v_2 = \dot{q}_2$ и угловой скоростью

$\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_{21} + \tilde{\omega}_{22}$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_{21} - \omega_{22} = \frac{\dot{q}_1 - \dot{q}_2}{r}$, находим также по формуле Кё-

нига:

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{2 \cdot \dot{q}_2^2}{2} + \frac{2r^2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2}{2 \cdot 2 \cdot r^2} = \frac{\dot{q}_1^2}{2} + 3 \frac{\dot{q}_2^2}{2} - 0,5 \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

Кинетическая энергия бруска, движущегося поступательно:

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{1 \cdot \dot{q}_1^2}{2} = \frac{\dot{q}_1^2}{2},$$

где $\bar{v}_3 = \bar{v}_{31} + \bar{v}_{32}$, $v_1 = \dot{q}_1$.

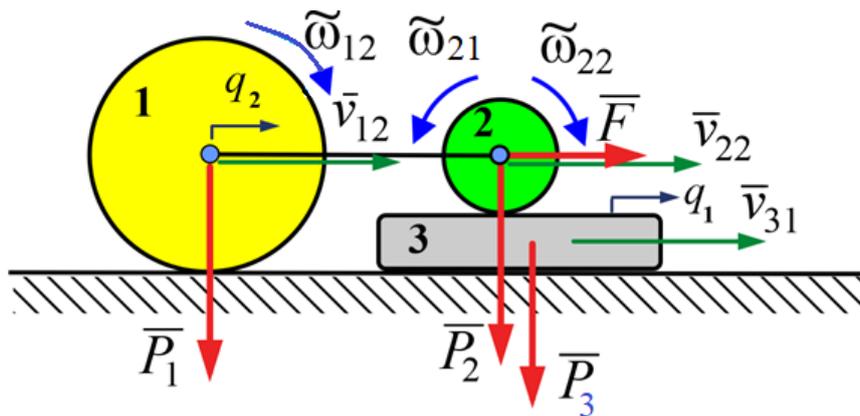


Рис. 4.31

В итоге получаем:

$$T = 2 \frac{\dot{q}_1^2}{2} + 7,5 \frac{\dot{q}_2^2}{2} - 0,5 \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

Или $T = a_{11} \frac{\dot{q}_1^2}{2} + a_{22} \frac{\dot{q}_2^2}{2} - a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2$, где

$$a_{11} = 2, \quad a_{22} = 7,5, \quad a_{12} = -0,5.$$

6. Уравнения Лагранжа II рода запишем в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{22}\dot{q}_2 + a_{12}\dot{q}_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = a_{22}\ddot{q}_2 + a_{12}\ddot{q}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0.$$

Подставив все найденные величины в уравнения Лагранжа, будем иметь:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 = Q_1,$$

$$a_{22}\ddot{q}_2 + a_{12}\ddot{q}_1 = Q_2.$$

Откуда

$$\ddot{q}_1 = \frac{a_{12}Q_2 - a_{22}Q_1}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \approx 1,3559 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

5. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Механическая система может совершать малые колебания только вблизи *устойчивого* положения *равновесия*. Обобщенные координаты системы в положении равновесия принимают равными нулю. Тогда *колебательным движением* механической системы в общем случае считают всякое ее движение, при котором все обобщенные координаты или часть из них изменяются не монотонно, а имеют колебательный характер, т.е. принимают нулевые значения по крайней мере несколько раз.

Колебания считаются малыми, если при движении системы обобщенные координата, скорость и ускорение достаточно малы и в уравнении движения можно пренебречь всеми слагаемыми второго и более высокого порядков относительно q , \dot{q} и \ddot{q} . В случае малых колебаний системы получается линейное дифференциальное уравнение для обобщенной координаты q .

Теорема Лагранжа – Дирихле

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j^2} \geq 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Равновесие консервативной} \\ \text{голономной системы} \\ \text{с идеальными связями} \\ \text{устойчиво} \end{array} \right).$$

5.1. Собственные линейные колебания системы

получим следующее дифференциальное уравнение малых собственных колебаний системы с одной степенью свободы:

$$a\ddot{q} + cq = 0.$$

На основе теории дифференциальных уравнений решение этого уравнения можно представить в виде

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

и для обобщенной скорости

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий:

$$t = 0, \quad q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0.$$

Используя эти выражения, получаем $C_1 = q_0$, $C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}$.

Подставляя их значения в (2), имеем

$$q = q_0 \sin kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \cos kt.$$

Представим выражение для q в другой, так называемой *амплитудной*, форме:

$$q = A \sin(kt + \alpha).$$

Из сравнения этого выражения с (2) для новых постоянных получим формулы

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{q_0 k}{\dot{q}_0}.$$

Величину A считают положительной и называют *амплитудой колебаний*. Она определяет наибольшее отклонение обобщенной координаты от положения равновесия, соответствующего значению $q_0 = 0$. Обобщенная координата изменяется в пределах $-A \leq q \leq A$.

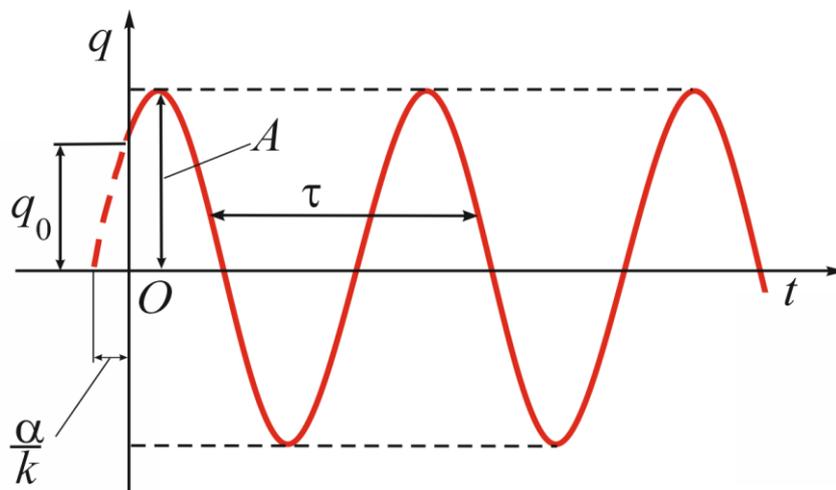


Рис. 5.1

Безразмерная постоянная α называется *начальной фазой колебаний*. Она является значением *фазы колебаний* $(kt + \alpha)$ при $t = 0$.

Движение системы, определяемое (2) или эквивалентной ему амплитудной формой (3), называется *гармоническим*. Гармоническими называются такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса.

Гармонические колебания полностью определяются амплитудой колебаний, периодом и начальной фазой. Значение *периода колебаний* τ получим из условия

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Величина, обратная периоду $\nu = 1/\tau$, называется *частотой колебаний*. Частота колебаний обычно определяется числом колебаний в секунду или в герцах

Круговая частота k выражается через период колебаний и частоту в форме

$$k = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu.$$

Малые собственные колебания системы с одной степенью свободы при наличии линейного сопротивления запишутся дифференциальным уравнением

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = 0.$$

Если разделить обе части уравнения на a и ввести обозначения $k^2 = c/a$, $2n = \mu/a$ то получим дифференциальное уравнение движения системы в окончательной форме:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0.$$

Постоянная k является круговой частотой собственных колебаний системы без учета сопротивления. Величина n называется *коэффициентом затухания*.

Решение этого уравнения следует искать в форме $q = e^{\lambda t}$, где постоянная λ определяется из характеристического уравнения $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, которое получается после подстановки решения в дифференциальное уравнение.

Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Могут представиться три случая:

1) **Затухающие колебания.** Если $n < k$ то величина под знаком квадратного корня отрицательна. Обозначим $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Тогда получим следующие значения для корней характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm k_1 i.$$

Соответственно общее решение дифференциального уравнения зависящее от двух произвольных постоянных, выразится в виде

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t),$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

Решение (6) можно также представить в другой, амплитудной, форме:

$$q = A e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

где A и α тоже произвольные постоянные. Раскрывая синус суммы, получим

$$C_1 = A \sin \alpha; C_2 = A \cos \alpha; A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \operatorname{tg} \alpha = C_1 / C_2.$$

Постоянные определяются из начальных условий.

Величина A положительна. Она не является амплитудой. Начальная фаза α может иметь значения в пределах от 0 до 2π .

Для выяснения изменения функции построим ее график (рис. 5.2).

Из графика функции следует, что величины последовательных наибольших отклонений q от положения равновесия уменьшаются с увеличением времени, стремясь к нулю при неограниченном возрастании времени. В соответствии с ним движение, определяемое (6), называют *затухающими колебаниями*.

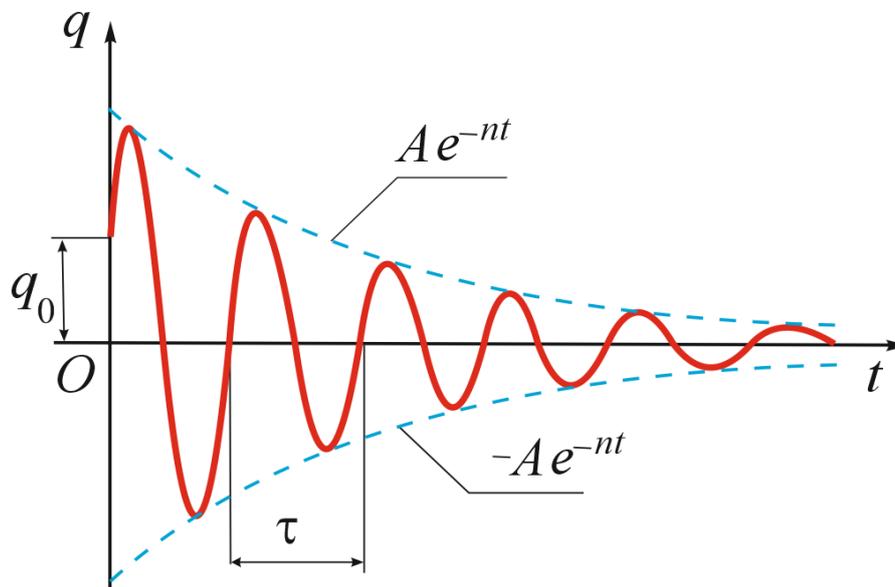


Рис. 5.2

Условным периодом затухающих колебаний (или *периодом*) называют период прохождения системы через положения равновесия.

Следовательно, $\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1}$.

Период затухающих колебаний величина постоянная, не зависящая от начальных условий. Он больше периода собственных колебаний при отсутствии сопротивления $\tau = \frac{2\pi}{k}$.

В действительности функция $q(t)$ не является периодической.

Переменную величину Ae^{-nt} называют *условной амплитудой* затухающих колебаний. Она не является максимальным значением функции.

Декрементом колебаний Δ называют отношение двух последовательных (взятых через условный период τ_1) максимальных значений обобщенной координаты.

Пусть для $t_i \Rightarrow q_{\max i} = Ae^{-nt_i}$. Через промежуток времени, равный периоду затухающих колебаний τ_1 , в момент $t_i + \tau_1$,

$$q_{\max(i+1)} = Ae^{-n(t_i+\tau_1)} = Ae^{-nt_i} e^{-n\tau_1}.$$

$$\Delta = \frac{q_{\max i}}{q_{\max(i+1)}} = e^{n\tau_1}.$$

Логарифмическим декрементом колебаний δ называют натуральный логарифм от декремента колебаний:

$$\delta = \ln \Delta = n\tau_1.$$

Таким образом, из проведенного исследования можно заключить, что *малое линейное сопротивление незначительно увеличивает период колебаний по сравнению со случаем отсутствия сопротивления, но сильно уменьшает последовательные точения условных амплитуд, которые уменьшаются с течением времени по экспоненциальному закону.*

2) **Затухающие движения.** Рассмотрим случай, когда $n > k$ (случай большого сопротивления). Корни характеристического уравнения в этом случае имеют значения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm k_2,$$

где введено новое обозначение для положительной величины $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$.

Оба корня характеристического уравнения действительны и отрицательны, так как $k_2 < n$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$q = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{k_2 t}),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые можно определить по начальным условиям.

Могут представиться три случая в зависимости от знака и значения q_0 . Во всех случаях движение является затухающим, неколебательным, которое иногда называют также *апериодическим*.

При $n = k$ (случай критического сопротивления) характеристическое уравнение имеет кратный отрицательный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = -n$.

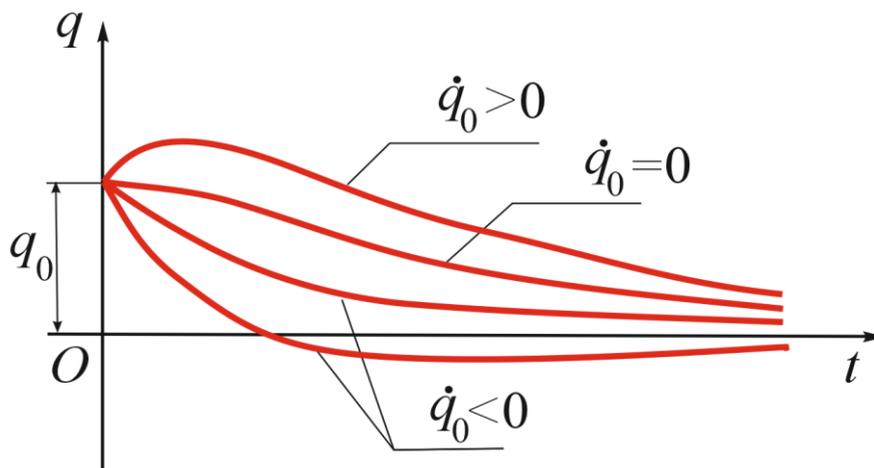


Рис. 5.3

Соответственно этому решение дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$q = e^{-nt} (C_1 t + C_2).$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются по начальным условиям. В этом случае при t , стремящемся к бесконечности, $q(t)$ стремится к нулю при любых конечных значениях постоянных.

Таким образом, *случай критического сопротивления тоже дает затухающее движение*.

Анализ влияния линейного сопротивления на собственные малые колебания показывает, что линейное сопротивление не может сделать устойчивое положение равновесия неустойчивым. Если в окрестности устойчивого

положения равновесия система совершает незатухающие малые колебания, то линейное сопротивление превратит их в затухающие или сделает даже затухающими движениями.

В случае, когда обобщенная сила $Q^B(t)$, характеризующая внешнее воздействие на колебательную систему, изменяется во времени по закону синуса или косинуса:

$$Q^B(t) = Q_0 \sin(pt + \beta),$$

где Q_0, p, β – соответственно амплитуда, частота и начальная фаза обобщенной силы, имеет место гармоническое возбуждение колебаний.

5.2. Вынужденные колебания при отсутствии вязкого сопротивления

При гармоническом возбуждении дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + cq = H \sin(pt + \beta),$$

или

$$\ddot{q} + k^2 q = h \sin(pt + \beta),$$

где $k^2 = \frac{c}{a}$, $h = \frac{H}{a}$.

Известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения можно представить в виде суммы общего решения q_1 однородного уравнения $\ddot{q} + k^2 q = 0$ и частного решения q^* неоднородного уравнения: $q = q_1 + q^*$.

Общее решение однородного уравнения

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Частное решение неоднородного уравнения определяется в зависимости от соотношения частот свободных колебаний и возмущающей силы. Возможны два случая: отсутствие резонанса $p \neq k$ и резонанс $p = k$.

1. **Отсутствие резонанса.** В этом случае частное решение следует искать в виде

$$q^* = B \sin(pt + \beta),$$

где B – искомая постоянная величина.

Подстановка q^* в (5.1) приводит к соотношению

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Общее решение уравнения (1) будет иметь вид

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \beta),$$

или

$$q = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \beta).$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 определим из начальных условий.

Как следует из уравнений, движение состоит из двух гармонических колебаний с частотами k и p соответственно.

Первые (с частотой k) можно по аналогии со случаем отсутствия возмущающей силы условно назвать свободными колебаниями, а вторые (с частотой p) – вынужденными колебаниями системы.

Условность названия «свободные колебания» связана с тем, что определяющие их произвольные постоянные зависят не только от начальных условий (q_0, \dot{q}_0) но и от параметров возмущающей силы (h, p, β), и, следовательно, первые колебания в решении фактически также являются вынужденными колебаниями. Однако данное название получило широкое распространение лишь потому, что вторые колебания имеют частоту p возмущающей силы, в то время как первые – частоту k свободных колебаний (собственную частоту).

Если $p < k$, то установившиеся вынужденные колебания будут совпадать по фазе с возмущающей силой, если же $p > k$, то вынужденные колебания будут находиться в противофазе (сдвинуты по фазе на π) по отношению к возмущающей силе.

Амплитуду B вынужденных колебаний можно представить в виде:

$$B = \frac{h}{k^2} \cdot \frac{1}{\left|1 - p^2 / k^2\right|}.$$

Здесь $\frac{h}{k^2} = \frac{H}{a \cdot \frac{c}{a}} = \frac{H}{c}$ – статическое смещение системы под действием

силы H , равной амплитуде возмущающей силы. Обозначим $B_0 = h / k^2$.

Теперь

$$B = \frac{B_0}{\left|1 - p^2 / k^2\right|}.$$

$$\text{Величину } \lambda = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}$$

называют коэффициентом динамичности. Коэффициент динамичности показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при гармоническом воздействии больше статического смещения.

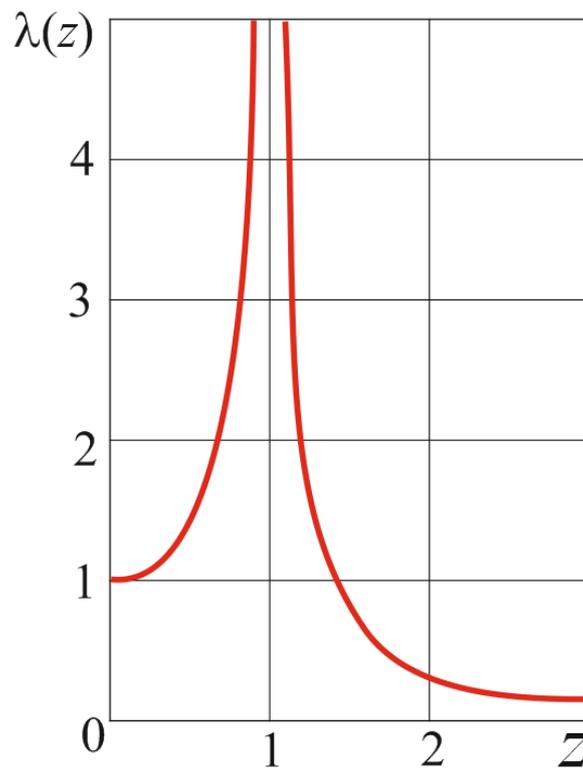


Рис. 5.4

$z = p/k$ – коэффициент расстройки, или относительная частота возмущающей силы. Получаем

$$\lambda = \frac{1}{|1 - z^2|}.$$

Этот результат не следует переносить на реальные системы

5.3. Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления

При гармоническом возбуждении дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = H \sin(pt + \beta),$$

или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \sin(pt + \beta),$$

где $2n = \frac{\mu}{a}$, $k^2 = \frac{c}{a}$, $h = \frac{H}{a}$.

Решение будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0$ и частного решения неоднородного.

$$q = q_1 + q^*.$$

Было показано, что общее решение однородного уравнения q_1 может быть представлено в зависимости от соотношения между n и k в одной из трех форм:

$$q_1 = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) \text{ при } n < k;$$

$$q_1 = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}) \text{ при } n > k;$$

$$q_1 = e^{-nt} (C_1 t + C_2) \text{ при } n = k.$$

Частное решение уравнения представим в виде

$$q^* = B \sin(pt + \beta - \varepsilon).$$

Постоянные B и ε определяют подставляя q^* , \dot{q}^* и \ddot{q}^* в исходное дифференциальное уравнение.

В итоге получим

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad \text{tg } \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Структура общего решения неоднородного уравнения такова, что при любых отличных от нуля значениях ε с течением времени из-за наличия множителя e^{-nt} оно стремится к нулю, и в решении остается только частное решение. В этом случае говорят об *установившихся вынужденных колебаниях*.

На основании решения можно сформулировать основные свойства установившихся вынужденных колебаний:

- это незатухающие колебания; они длятся так долго, как долго действует возмущающая сила;
- эти колебания не зависят от начальных условий;
- при гармоническом возбуждении они происходят с частотой возмущающей силы;
- эти колебания отстают по фазе от возмущающей силы на величину ε , изменяющуюся, как будет показано ниже, от 0 до π .

Амплитуда B установившихся вынужденных колебаний и сдвиг по фазе ε зависят от соотношения между частотами p и k и от коэффициента затухания n . Проанализируем эти зависимости, называемые *амплитудно-частотной* и *фазочастотной характеристиками*.

Исследуем амплитуду B и сдвиг по фазе ε вынужденных колебаний.

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{h}{k^2 \sqrt{(1 - p^2 / k^2)^2 + 4n^2 p^2 / k^4}}.$$

Обозначим:

$\frac{p}{k}$ – коэффициент расстройки, или относительная частота;

$\frac{h}{k^2} = B_0$ – статическое смещение, смещение системы под действием постоянной возмущающей силы, равной по модулю амплитуде возмущающей силы.

стационарной возмущающей силы, равной по модулю амплитуде возмущающей силы.

Отношение $\frac{B}{B_0} = \lambda$ – коэффициент динамичности при наличии вязкого

сопротивления.

Если частота p изменения возмущающей силы мала по сравнению с частотой со свободных колебаний, т. е. $p \ll k$, то амплитуда вынужденных

колебаний близка к статическому смещению, а коэффициент динамичности близок к единице. Если же $p \gg k$, то колебательная система ведет себя как фильтр, т. е. практически не воспринимает возмущения с частотами, существенно превышающими собственную частоту.

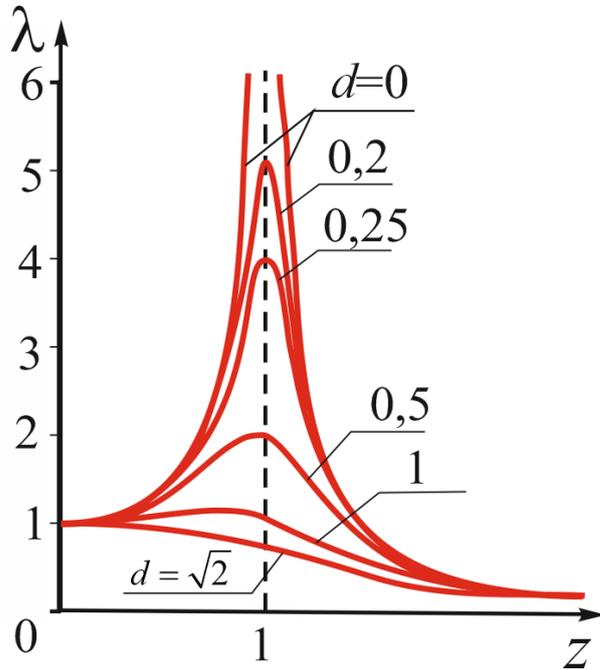


Рис. 5.5

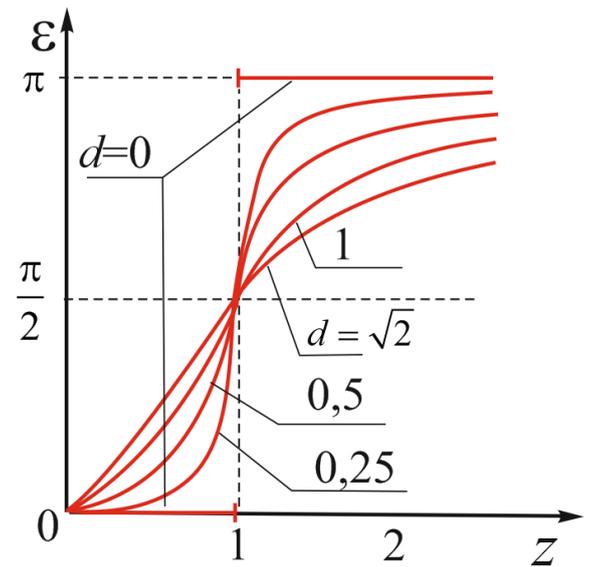


Рис. 5.6

Выражение для коэффициента динамичности показывает, что при малых значениях d вязкое сопротивление становится существенным лишь в достаточно узкой зоне в окрестности резонанса, когда величина $d^2 z^2$ становится соизмеримой с $(1 - z^2)^2$. Это же демонстрирует график. Поэтому при определении амплитуды вынужденных колебаний в реальных системах с малым вязким сопротивлением последнее можно не учитывать, если известно, что частота p возмущающей силы далека от собственной частоты k .

Для исследования фазочастотной характеристики в безразмерном виде разделим числитель и знаменатель аргумента арктангенса на k^2 :

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2} = \operatorname{arctg} \frac{2dz}{1 - z^2}.$$

Учтем, что производная $\varepsilon(z)$ по z независимо от значения d (кроме $d = 0$) положительна при всех значениях z , т. е. $\varepsilon(z)$ представляет собой монотонно возрастающую функцию. Тогда при $z = 0 \Rightarrow \varepsilon = \operatorname{arctg}(0) = 0$;

$$\text{при } z = 1 \Rightarrow \varepsilon = \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon = \operatorname{arctg}(-0) = \pi.$$

Отметим, что при резонансе фазовое запаздывание $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ независимо от значения коэффициента d , характеризующего вязкое сопротивление.

На рисунке представлены кривые, характеризующие зависимость $\varepsilon(z)$ при различных значениях d . При $d = 0$ (отсутствие вязкого сопротивления) $\varepsilon(z)$ представляет собой разрывную функцию. Отметим, что с ростом d меняется характер фазовой кривой, она трансформируется из кривой с двумя перегибами в кривую с одним перегибом.

Пример 5.1

Два груза D и E массами $m_D = 2$ кг и $m_E = 3$ кг лежат на гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, опираясь на пружину, коэффициент жесткости которой $c = 6$ Н/см = 600 Н/м (рис. 5.7).

В некоторый момент времени груз E убирают; одновременно ($t = 0$) нижний конец пружины B начинает совершать вдоль наклонной плоскости движение по закону $\xi = 0,02 \sin 10t$ (м).

Найти уравнение движения груза D .

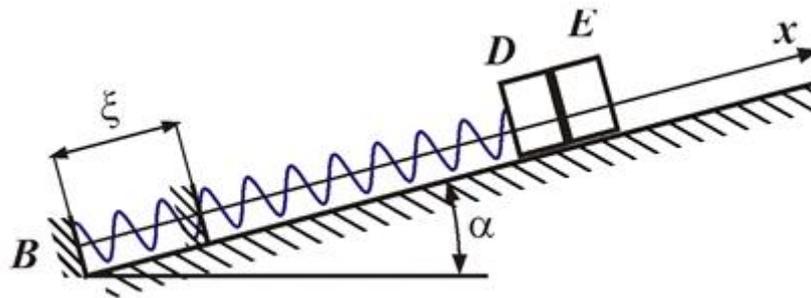


Рис. 5.7

Решение

1. Рассмотрим движение груза D в пространстве неподвижного основания (рис. 5.8с).

Совместим начало системы координат с положением статического равновесия груза D , на пружине, при условии, что точка B занимает свое среднее положение ($\xi = 0$).

Направим ось x вверх вдоль наклонной плоскости (в сторону движения груза D после снятия груза E).

Начальное положение определим из условия статического равновесия двух грузов на пружине (рис.5.8b)

Имеем на рисунке равновесие двух грузов на пружине:

2. Заданные силы: $\bar{P}, P = (m_D + m_E)g$; $\bar{F}_0, F_0 = c(x_0 + \delta_{\text{нб}})$.

3. Связь: гладкая поверхность, её реакция \bar{N} .

$$(\bar{P}, \bar{N}, \bar{F}_0) \sim 0 \rightarrow \sum F_x = F_0 - P = 0 \rightarrow (m_D + m_E)g \sin \alpha = c(x_0 + \delta_{\text{ст}}).$$

$$x_0 + \delta_{\text{ст}} = \frac{(m_D + m_E)g \sin \alpha}{c}.$$

На рисунке с рассматривается статическое равновесие одного груза

Заданные силы: $\bar{P}, P = m_D g$; $\bar{F}_{\text{ст}}, F_{\text{ст}} = c\delta_{\text{ст}}$.

Связь: гладкая поверхность, её реакция \bar{N} .

$$(\bar{P}, \bar{N}, \bar{F}_{\text{ст}}) \sim 0 \rightarrow \sum F_x = F_{\text{ст}} - P = 0 \rightarrow m_D g \sin \alpha = c\delta_{\text{ст}}.$$

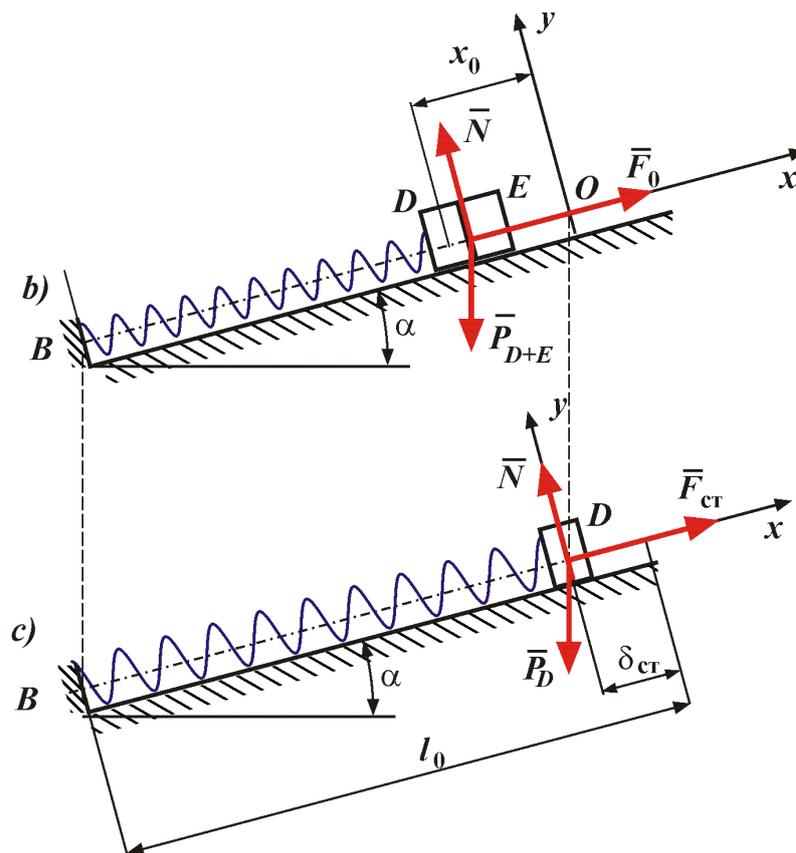


Рис. 5.8

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{m_D g \sin \alpha}{c}.$$

В итоге находим:

$$x_0 = -\frac{m_E g \sin \alpha}{c}.$$

Знак (-) указывает, что при равновесии грузы находятся ниже начала координат.

Переходим к непосредственному рассмотрению движения груза D (рис 5.9d).

2. Заданные силы: $\bar{P}, P = m_D g; \bar{F}, F = c(l - l_0)$.

Из рисунков c и d находим $l_0 - \delta_{\text{нб}} = \xi + l - x \rightarrow l - l_0 = x - \delta_{\text{нб}} - \xi$.

Отсюда получаем $F = c(x - \delta_{\text{ст}} - \xi) = cx - c\delta_{\text{ст}} - c\xi$.

3. Связь: Г.П. $\Rightarrow \bar{N}$.

4. Груз движется под действием сил: $(\bar{P}, \bar{N}, \bar{F}_{\text{ст}})$.

5. Уравнение движения запишем в виде:

$$m_D \ddot{x} = -P_D \sin \alpha - F \rightarrow m_D \ddot{x} = -m_D g \sin \alpha - cx + c\delta_{\text{ст}} + c\xi.$$

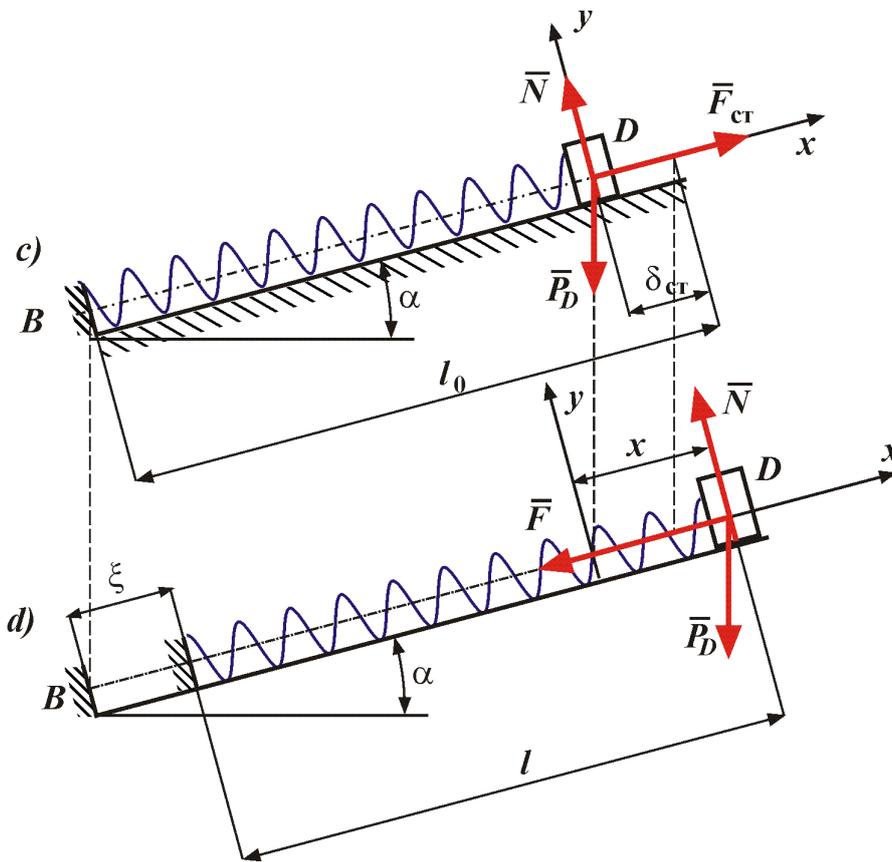


Рис. 5.9

Подставляя $\delta_{\text{ст}} = \frac{m_D g \sin \alpha}{c}$,

получим

$$m_D \ddot{x} = -m_D g \sin \alpha - cx + c \frac{m_D g \sin \alpha}{c} + c \xi,$$

или

$$m_D \ddot{x} + cx = c \xi \rightarrow m_D \ddot{x} + cx = c \cdot 0,02 \sin 10t.$$

Разделив все члены уравнения на m_D и введя обозначения

$$\frac{c}{m_D} = k^2, \quad \frac{0,02c}{m_D} = h,$$

приведем дифференциальное уравнение к каноническому виду

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt.$$

Здесь $p = 10$, $k^2 = 300$, $h = 6$.

Общий интеграл:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Для определения постоянных интегрирования найдем скорость груза

$$v_{x0} = C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt,$$

и используем начальные условия задачи.

Имеем при $t = 0$

$$x_0 = -\frac{m_E g \sin \alpha}{c} = -\frac{3 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ}{600} = 0,0245 \text{ м}, \quad v_{x0} = 0.$$

Из уравнений получаем для $t = 0$

$$C_1 = x_0 = -0,0245, \quad C_2 = -\frac{hp}{k(k^2 - p^2)} = -0,0173.$$

Следовательно, уравнение движения груза D имеет вид:

$$x = -2,45 \cos 17,3t - 1,73 \sin 17,3t + 3 \sin 10t \text{ (см)}.$$

На рисунке 5.10 представлен график движения груза

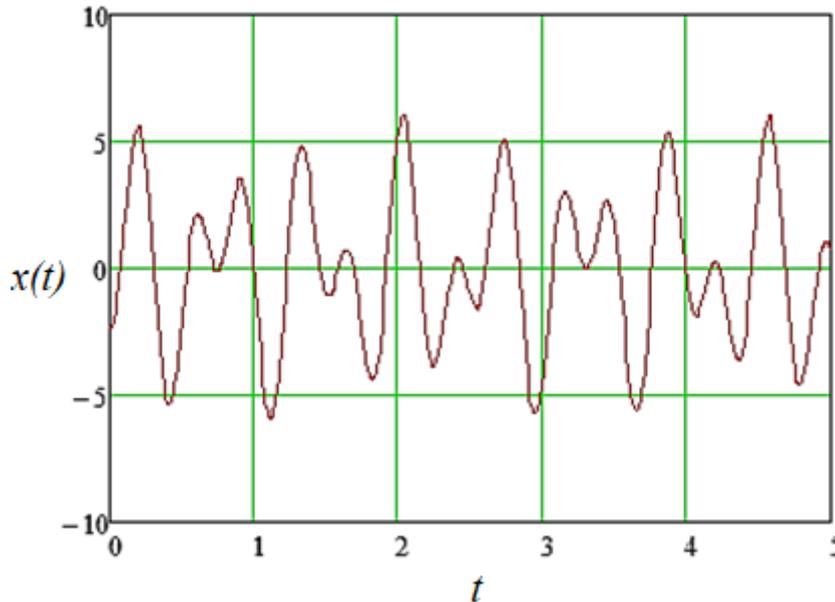


Рис. 5.10

Пример 5.2.

Вибрационный стол 2 массы M установлен на кривошипах OA и BC одинаковой длины R . На конце стержня CD , являющегося продолжением кривошипа BC , на расстоянии r от оси C находится точечный груз массы m , причем $mr = MR$. Однородный стержень OA , массой $M/2$, связан с основанием спиральной пружиной, коэффициент жесткости которой равен c ; пружина не деформирована при вертикальном положении кривошипа OA . Кривошип BC и стержень CD невесомы. Коэффициент сопротивления гидравлического демпфера μ . Возмущающая сила, действующая на стол, изменяется по гармоническому закону $F(t) = F_0 \sin(pt)$. Здесь F_0 и p - константы.

Показать, что изображенное на рис. 5.11 положение механизма является равновесным. Определить условия его устойчивости.

Составить дифференциальное уравнение малых колебаний стола около устойчивого положения равновесия, приняв за обобщенную координату угол поворота кривошипа φ , отсчитываемый от его вертикального положения по ходу часовой стрелки.

Решение

1) Рассмотрим движение системы, состоящей из звеньев 1, 2, 3, в инерциальном пространстве неподвижного основания. Система имеет одну степень свободы. Ее произвольное положение определим координатой φ . На рис. 2.3 показано ее произвольное положение при положительной обобщенной координате.

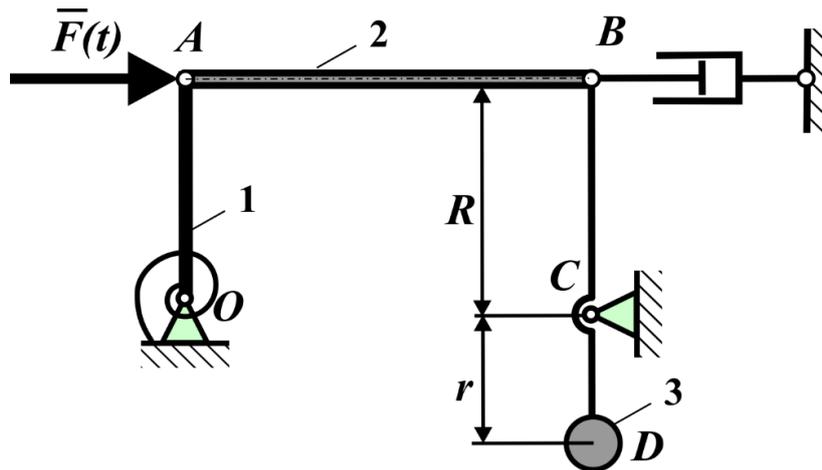


Рис. 5.11

2) *Заданные (активные) силы*: силы тяжести кривошипа $\frac{M\bar{g}}{2}$, стола – $M\bar{g}$, и точечного груза – $m\bar{g}$, пара сил упругости с моментом \tilde{M} , действующая со стороны спиральной пружины, возмущающая сила \bar{F} , сила линейного вязкого сопротивления \bar{R} , действующая со стороны гидравлического демпфера.

3) *Внешние и внутренние связи (шарниры)* – голономные и идеальные.

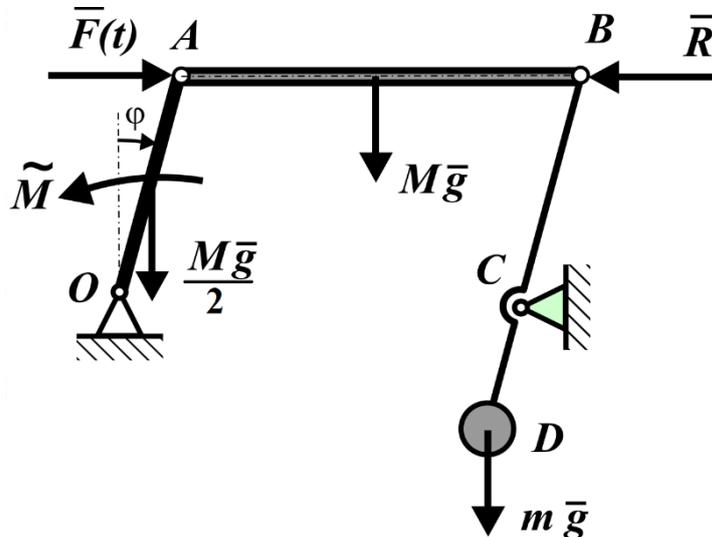


Рис. 5.12

Для определения положения равновесия системы составим выражение для зависимости потенциальной энергии от координаты в произвольном положении. Обратите внимание на то, что координату в положении равновесия считаем равной нулю (это удобно для всех задач по динамике колебательных систем). Потенциальную энергию можно отсчитывать от любого выбранного положения системы. Будем считать потенциальную энергию

равной нулю в положении равновесия ($\varphi = 0$). Потенциальная энергия определится работой консервативных сил тяжести и пары сил упругости при перемещении системы из произвольного положения в положение, где потенциальная энергия равна нулю.

Работа силы тяжести кривошипа равна $A_1 = -\frac{Mg}{2} \cdot \frac{R}{2}(1 - \cos\varphi)$. Работа силы тяжести стола равна $A_2 = -MgR(1 - \cos\varphi)$. Работа силы тяжести груза равна $A_3 = mgr(1 - \cos\varphi)$. Обратим внимание на разные знаки. Центры тяжести 1 и 2 звена поднимаются, а у 3 звена центр тяжести опускается. Работа пары сил упругости равна $A_4 = c\varphi^2 / 2$.

Таким образом, зависимость потенциальной энергии системы от координаты будет такой:

$$\Pi = \frac{c\varphi^2}{2} + mgr(1 - \cos\varphi) - \frac{MgR}{4}(1 - \cos\varphi) - MgR(1 - \cos\varphi).$$

Производная потенциальной энергии по координате в положении равновесия должна быть равна нулю (потенциальная энергия имеет экстремум).

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = c\varphi + mgr \sin\varphi - \frac{MgR}{4} \sin\varphi - MgR \sin\varphi = 0.$$

Один из корней этого уравнения – $\varphi = 0$. Следовательно, положение системы, изображенное на рис. 5.11, – равновесное.

Устойчивость положения равновесия определится знаком второй производной при $\varphi = 0$ (минимумом или максимумом Π в положении равновесия).

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = c + mgr \cos\varphi - \frac{MgR}{4} \cos\varphi - MgR \cos\varphi$$

$$\text{При } \varphi = 0 - \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = c + mgr - \frac{5MgR}{4} = c - \frac{MgR}{4}, (mr = MR).$$

$$\text{Условие устойчивости} - \left(\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=0} > 0, \text{ или } c - \frac{MgR}{4} > 0.$$

Обозначим $c - \frac{MgR}{4}$ через c_{11} . Этот коэффициент называют псевдоупругим, или коэффициентом жесткости системы. Ниже будет показано,

что при положительности этого коэффициента система после отклонения из положения равновесия совершает малые свободные колебания около этого положения.

Значение c_{11} можно получить также разложением в ряд Маклорена вблизи положения равновесия потенциальной энергии и удержанием членов второго порядка малости.

При разложении в ряд получим: $1 - \cos \varphi = 1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \right)$.

Для малых колебаний $\varphi \approx 0$ и $1 - \cos \varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}$, если учитывать члены второго порядка малости и отбросить $\frac{\varphi^4}{4!}$ и все последующие члены большего порядка малости. Следовательно, получаем

$$\Pi = \frac{c\varphi^2}{2} + \frac{mgr\varphi^2}{2} - \frac{MgR\varphi^2}{8} - \frac{MgR\varphi^2}{2},$$

или

$$\Pi = \left(c + mgr - \frac{5MgR}{4} \right) \frac{\varphi^2}{2} = \frac{c_{11}\varphi^2}{2}.$$

Как видим, выражение для коэффициента жесткости системы такое же, что и выше.

4) Для составления дифференциального уравнения малых колебаний вибрационного стола применим уравнение Лагранжа II рода.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q^{\Pi} + Q^R + Q^B.$$

Получим выражение для кинетической энергии системы как функции обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ и координаты φ .

Как было доказано выше, это выражение (решение задачи скоростей) можно получать в положении равновесия.

Кинематическая задача скоростей

Кривошипы OA и BC совершают вращательное движение. Поскольку длины кривошипов равны, четырехзвенник $OABC$ является параллелограммным механизмом. Стол AB при этом совершает поступательное движение.

Зададим положительную обобщенную скорость (угловую скорость кривошипа OA). Скорости точек A и B равны, равны и угловые скорости кривошипов. Скорость точки D равна $v_D = \omega r$.

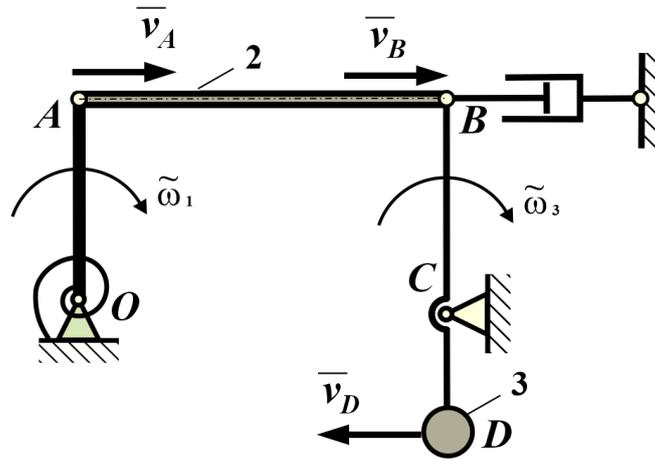


Рис. 5.13

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий трех тел, имеющих массу.

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

$$T_1 = \frac{M / 2R^2}{3} \frac{\dot{\varphi}^2}{2}; \quad T_2 = \frac{1}{2} M v_A^2 = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\varphi}^2; \quad T_3 = \frac{1}{2} m v_D^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2,$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{MR^2}{6} + MR^2 + mr^2 \right] \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{7MR^2}{6} + mr^2 \right] \dot{\varphi}^2.$$

Обозначим $\frac{7MR^2}{6} + mr^2$ через a_{11} . Этот коэффициент называют коэффициентом инерции системы. Выражение для кинетической энергии, если известен коэффициент инерции системы с одной степенью свободы, как указывалось выше, $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{\varphi}^2$. В нашем случае

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{\varphi}^2.$$

$$\text{Обобщенная сила потенциальных сил } Q^{\Pi} = -\frac{d\Pi}{d\varphi},$$

так как $\Pi = c_{11} \varphi^2 / 2 \Rightarrow Q^{\Pi} = -c_{11} \varphi$.

Обобщенная сила силы линейного вязкого сопротивления $Q^R = -\frac{d\Phi}{d\dot{\phi}}$,

где Φ – функция Рэлея.

Так как $\Phi = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k v_k^2}{2} = \frac{\mu V_B^2}{2} = \frac{\mu \dot{\phi}^2 R^2}{2}$, то $\Phi = \frac{b_{11} \dot{\phi}^2}{2}$, где $b_{11} = \mu R^2$.

Для обобщенной силы сил линейного вязкого сопротивления получим:

$$Q^R = -\frac{d\Phi}{d\dot{\phi}} = -b_{11}\dot{\phi}$$

Обобщенную силу вынуждающей силы $F(t) = F_0 \sin(pt)$ найдем, поделив мощность этой силы при движении системы в положении равновесия на производную обобщенной координаты $\dot{\phi}$.

$$Q^s = \frac{W(\bar{F})}{\dot{\phi}} = \frac{\bar{F} \cdot \bar{v}_A}{\dot{\phi}} = \frac{F_0 \sin(pt) \dot{\phi} R}{\dot{\phi}},$$

$$Q^s = H \sin(pt),$$

где $H = F_0 R$.

Выражения для обобщенных сил составляют правую часть уравнения Лагранжа II рода.

Определим левую часть.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = a_{11} \ddot{\phi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0.$$

Последнее равенство справедливо только потому, что координата ϕ явно не входит в выражение для кинетической энергии.

Как видно, уравнение Лагранжа приобретет вид приведенного выше уравнения малых колебаний системы около положения равновесия.

$$a_{11} \ddot{q} = -c_{11} q - b_{11} \dot{q} + H \sin(\omega t),$$

или

$$a_{11} \ddot{q} + b_{11} \dot{q} + c_{11} q = H \sin(\omega t).$$

В нашем случае

$$a_{11} = \frac{7MR^2}{6} + mr^2, \quad c_{11} = c - \frac{MgR}{4}, \quad b_{11} = \mu R^2, \quad H = F_0 R.$$

Обращаем внимание на приведенный коэффициент жесткости c_{11} . Только при его положительной определенности ($c_{11} > 0$) мы имеем устойчивое положение равновесия при $\varphi = 0$ (минимум потенциальной энергии) и только в этом случае, как будет видно ниже, отклоненный от положения равновесия вибростол будет совершать колебания около этого положения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пономарева, С.И. Теоретическая механика. Трение: курс лекций / С.И. Пономарева, Е.П. Черногоров. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 37 с.
2. Караваев В.Г. Теоретическая механика. Кинематика плоского движения: учебное пособие / Караваев В.Г., Пономарева С.И., Прядко Ю.Г., Чернобривец М.Г., Черногоров Е.П. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 56 с.
3. Пономарева, С.И. Теоретическая механика. Динамика точки: Курс лекций / С.И. Пономарева, Ю.Г. Прядко, О.Г. Худякова, Е.П. Черногоров. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2002. – 55 с.
4. Пономарева, С.И. Теоретическая механика. Общие теоремы динамики: курс лекций / С.И. Пономарева, Ю.Г. Прядко, Е.П. Черногоров. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 78 с.
5. Караваев В.Г. Малые колебания механических систем: учебное пособие / В.Г. Караваев, Ю.Г. Прядко, Е.П. Черногоров. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2017. – 109 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ДИНАМИКА ТОЧКИ	
1.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	3
1.2. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ	4
1.3. ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	21
1.4. ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	23
2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ	
2.1. ТЕОРЕМЫ О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ	27
2.2. ТЕОРЕМЫ О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ	40
2.3. РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛЫ	48
2.4. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	52
2.5. ТЕОРЕМЫ О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ	54
3. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА	
3.1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	68
3.2. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	73
3.3. ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ ЧАСТИЦ ТВЕРДОГО ТЕЛА К ЦЕНТРУ	77
4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ	
4.1. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	90
4.3. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА II РОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	106
5. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	
5.1. СОБСТВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ	124
5.2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ	130
5.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ	133
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	146