Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет

Кафедра теоретической механики и основ проектирования машин

Черногоров Е.П.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

Кинематика

Курс лекций

Челябинск
2016

ВВЕДЕНИЕ

В разделе "Кинематика" курса теоретической механики изучаются свойства механического движения материальных точек и абсолютно твердых тел. Свойства движения механических систем устанавливаются на основе свойств движения точек и тел, составляющих системы.

В1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ

В определении механического движения – предмета изучения кинематики – используются понятия пространства и времени, которые являются основными в кинематике.

За единицы измерения длины и времени приняты метр (м) и секунда (с). Физические величины, единицы измерения которых выражаются через единицы длины и времени, называются кинематическими.

Положение любого материального объекта в выбранной системе отсчета определяется набором чисел, которые называются координатами МО в этой системе отсчета.

Систему отсчета принято называть теми же буквами, которыми обозначены оси, связанные с телом отсчета.

Так, например, если за тело отсчета A выбрана Земля с установленными на ней осями координат $Oxyz$, то говорят о системе отсчета $0xyz$, связанной с Землей. Систему отсчета, в которой телом отсчета является вагон движущегося поезда, назовем системой $O_1x_1y_1z_1$, если оси, скрепленные с вагоном, обозначены этими буквами.

Когда определяются положения различных тел в системе $Oxyz$ с телом отсчета A, то об этих телах следует говорить, что они находятся в пространстве $Oxyz$ связанном с телом A, или короче – в пространстве тела A.

Из множества систем отсчета следует выделить *гелиоцентрическую* и *геоцентрическую*. Телом отсчета для первой является Солнце вместе с неподвижными звездами, а для второй – Земля.

Естественно, что в инженерной практике наиболее часто приходится пользоваться геоцентрической системой отсчета, так как большая часть инженерных расчетов связана с определением положений частей конструкций и деталей машин по отношению к Земле.

Механическое движение было определено как изменение взаимного расположения материальных тел в пространстве с течением времени. Поскольку положение материальных тел определяется только по отношению к некоторому телу отсчета, то, значит, прежде чем говорить о движении тел, надо предварительно ввести систему отсчета, в пространстве которой это движение рассматривается.

Будем рассматривать положение различных тел в пространстве $Oxyz$ (тела отсчета γ). Слова в скобке можно иногда опустить, так как пространство немыслимо без тела отсчета, которое назначается прежде, чем говорить о движении каких-либо материальных объектов.

Если положение некоторого тела B (точки, механической системы) в пространстве $Oxyz$ изменяется с течением времени, то о теле B скажем, что оно совершает механическое движение в этом пространстве. Таким образом, механическим движением называется изменение положения материальных тел в пространстве выбранного тела отсчета с течением времени.

Если же положение тела B в пространстве $Oxyz$ не изменяется с течением времени, то тело B называется неподвижным, находящимся в покое или равновесии в этом пространстве.

Движение и покой материальных тел в пространстве выбранного тела отсчета принято называть их механическим состоянием в этом пространстве.

Бессмысленно говорить о движении и покое тела, пока не установлена система отсчета. Покой и движение определяются относительно выбранной системы отсчета. Поэтому эти понятия являются относительными.

Так, пассажир, сидящий в вагоне, неподвижен относительно вагона, но движется относительно платформы.

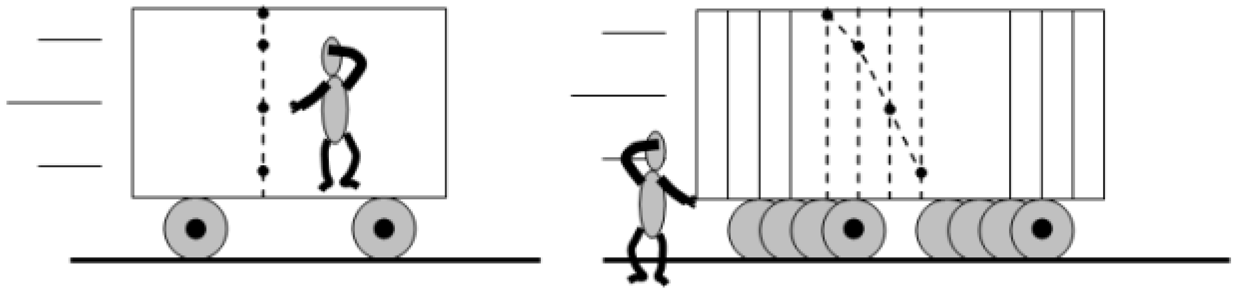


Рис. В.1.1. Относительность движения: для наблюдателя в вагоне движение падающего камня прямолинейное, а для наблюдателя на платформе траектория падения камня будет криволинейной

Тело, неподвижное в одной системе отсчета, может двигаться в другой. Ясно, что движение одного и того же тела в разных пространствах оказывается неодинаковым.

Движение МО (материального объекта; из положения, занимаемого им в момент времени t, за конечный Δt или сколь угодно малый dt промежутки времени будем называть соответственно, конечным или элементарным. Элементарное движение МО называют еще мгновенным или движением МО в момент времени t. Таким образом, когда говорится о мгновенном движении или движения МО в некоторый момент времени, то имеется в виду движение МО в течение времени dt из положения, которое он занимал в этот момент. Расстояния между одними, и теми же точками МО в моменты времени t и $t+dt$ являются малыми величинами порядка $(dt)^2$ или более высокого: малому промежутку времени соответствует также малое изменение положения движущегося тела в пространстве. В этом смысле о движении материальных объектов говорят, что оно непрерывно.

Среди движений твердого тела принято выделять два его основных или простейших движения: поступательное и вращательное около неподвижной оси.

Эти два движения твердого тела называются основными или простейшими потому, что любое перемещение тела из одного положения в другое может быть осуществлено последовательностью поступательных и вращательных движений.

В2. КООРДИНАТЫ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОГО ОБЪЕКТА (МО)

Пусть в пространстве $Oxyz$ выбранного тела отсчета рассматривается движение свободного или несвободного материального объекта γ. Исследовать свойства движения МО можно только при условии, если оно задано.

О движении МО говорят, что оно задано, если имеется способ, позволяющий определить положение объекта в пространстве в каждый момент времени. Положение материального объекта в пространстве задается его координатами.

Координатами МО в пространстве $Oxyz$ называются величины

$$\left(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_m\right)=\left\{\sigma_j\right\}_m,$$

заданием которых определяется положение объекта в этом пространстве в каждый момент времени.

Расстояния x, y, z точки M от координатных плоскостей называются координатами точки М именно потому, что набором этих величия определяется ее положение в пространстве $Oxyz$.

Координаты $\left\{\sigma_j\right\}_m$ движущегося в пространстве $Oxyz$ МО изменяются с течением времени.

Зависимости координат МО в пространстве от времени

$$\sigma_j=\sigma_j\left(t\right)\quad\left(j=1,\ldots m\right). \tag{B.1}$$

называются уравнениями его движения в этом пространстве.

С помощью уравнений (В.1) координаты МО, а значит и его положение в пространстве, определяются в любой момент времени. Следовательно, с помощью уравнений движения объекта можно задать его движение в пространстве. Таким образом, чтобы задать движение МО, т. е. установить соответствие между его положением в пространстве и временем, надо, во-первых, назначить координаты объекта и, во-вторых, указать зависимости их от времени. Не может быть рекомендаций, как надо формировать набор координат того или иного объекта.

Можно исследовать движение М.О. в пространстве самым различным набором координат. Однако среди этих наборов могут быть и такие, число координат в которых минимально. Такие координаты называются обобщёнными. *Обобщёнными координатами называются независимые между собой величины, заданием которых однозначно определяется положением объекта в пространстве.* (Величины называются независимыми, если мгновенное значение каждой из них может быть любым из области её задания). Число s обобщённых координат определяется число степеней свободы системы.

Во время движения материального объекта в пространстве изменяются одновременно, в общем случае, все его обобщенные координаты $\left\{q_j\right\}_s$. Однако МО может двигаться так, что изменяются при этом только некоторые из обобщенных координат или даже только одна из них, а другие сохраняются.

Конечное или элементарное движение МО, соответствующее изменению только одной из его обобщенных координат, назовем конечным или элементарным *парциальным* движением МО. Для краткости, парциальное движение МО при изменении только его обобщенной координаты q_j назовем q_j – парциальным движением объекта.

Число парциальных движений МО равно числу s обобщенных координат или числу степеней свободы объекта. Поэтому можно сказать, что s степеням свободы МО соответствует s различных его парциальных движений.

Существование парциальных движений МО следует из независимости между собой его обобщенных координат (каждая из них может изменяться при сохранении остальных).

Пример В.1.1

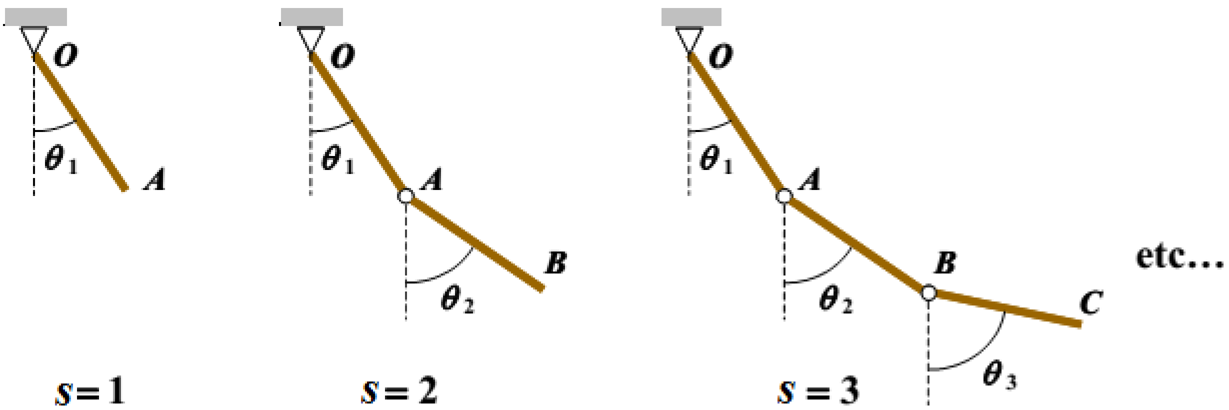


Рис. В.1.2

Пример В.2.2. *Стержень на плоскости*

Его положение можно определить координатами двух его концов.

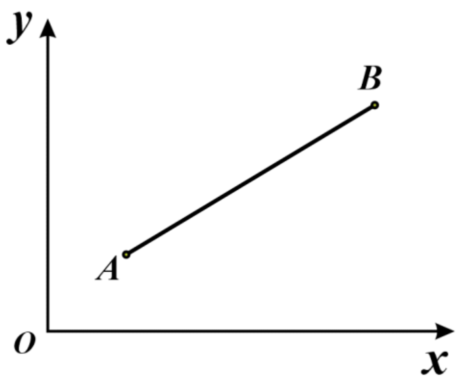


Рис. В.2.1

Однако при известной длине стержня можно записать уравнение, которое делает одну из координат лишней.

$$\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2 = l^2.$$

Зависимости обобщенных координат от времени называются уравнениями движения в обобщенных координатах

$$q_j = q_j\left(t\right), j \in \left(1, s\right).$$

$q_j\left(t\right)$ должны быть однозначными, непрерывными дифференцируемыми функциями времени.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Рассмотрим движение точки M в пространстве $Oxyz$ тела отсчёта γ (рис. 1.1.1). Множество L, положений (геометрическое место) движущейся точки в пространстве, называется траекторией точки.

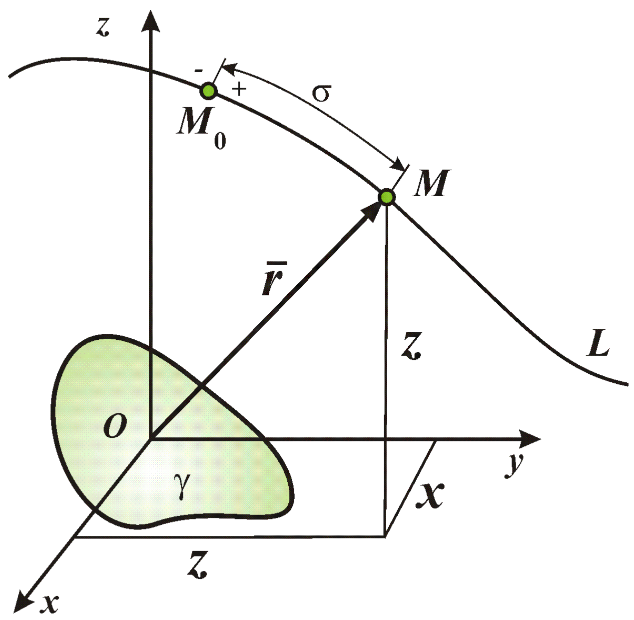


Рис. 1.1.1

По виду траектории движения различают *прямолинейное* и *криволинейное* движение. Частным случаем криволинейного движения является *круговое* движение, когда траектория представляет собой окружность. Траектория – непрерывная кривая,

Задать движение точки – значит задать её уравнения движения в той или иной системе отсчёта, т.е. для той или иной системы координат.

Векторный способ

В этом случае обобщенной координатой является радиус-вектор движущейся точки $\overline{r} = \overline{OM}$ относительно неподвижной точки O.

Поэтому зависимость $\overline{r} = \overline{r}(t)$ есть *уравнение движения точки в векторной форме*. (Или: закон движения точки в векторной форме).

Множество положений (геометрическое место) концов вектора $\overline{r}$ называют *годографом* вектора. Годограф радиус – вектора точки есть траектория точки.

Координатный способ

Здесь обобщёнными координатами точки являются её декартовы координаты x, y, z.

Зависимости

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t), \end{cases}$$

являются уравнениями движения точки в координатной форме. Кроме того эти уравнения являются параметрическими уравнениями её траектории. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме необходимо из этих уравнений исключить параметр – время. Получим 2 уравнения.

$$\varphi(x,y,z) = 0;\ \psi(x,y,z) = 0.$$

Координаты движущейся точки и проекции её радиус – вектора на оси связаны равенствами

$$r_x = x, r_y = y,\ r_z = z.$$

Радиус – вектор можно записать в виде

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k};$$

$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}.$$

Кроме декартовых координат в механике для изучения движения точки используют и другие координаты: полярные, цилиндрические...

Естественный способ

Он применяется, когда известна траектория точки. В этом случае для определения положения точки на траектории задаётся:

- начало отсчёта;
- положительное направление отсчёта;
- закон движения точки вдоль траектории $\sigma = \sigma(t)$.

Роль обобщенной координаты здесь играет дуговая координата σ.

Не следует смешивать расстояние σ движущейся точки, отсчитываемое от начало отсчёта и путь s пройденный за это время. Однако приращение этих величин отличается только знаком $d\sigma = \pm ds$.

Знак (+) берётся при движении точки в положительном направлении, а (–) в отрицательном. Приращение пути сугубо положительная величина $|d\sigma| = |ds|$.

Закон движения точки может быть задан не только аналитически, но и графически. Это графическое изображение закона движения сокращено называют *графиком движения*. Кривую графика движения не следует смешивать с траекторией.

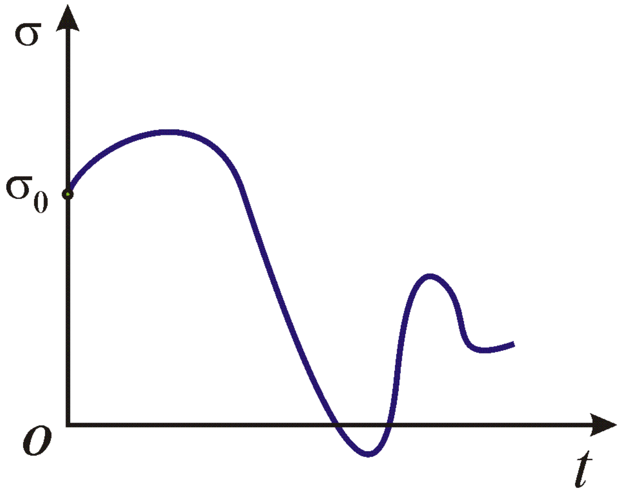


Рис. 1.1.2

Пример 1.1.1

Найти закон движения и траекторию эллиптического маятника (рис. 1.1.3), ползун которого движется по закону $OA = s = a\sin\omega t$, а угол φ между стержнем и вертикалью изменяется по закону $\varphi = \omega t$.

Решение

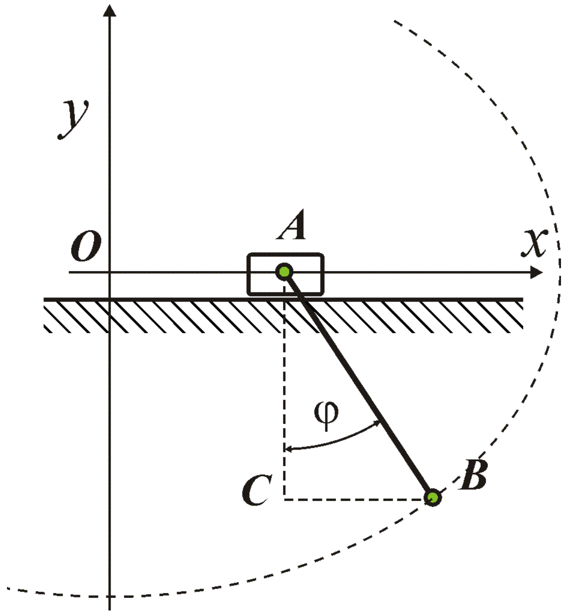


Рис. 1.1.3

1. Рассмотрим движение маятника относительно неподвижного основания. Начало координат выберем в точке O.

2. Изобразим механизм в произвольный момент времени t.

3. Найдем координаты точки B

$$x_B = OA + CB = a\sin\omega t + l\sin\varphi = (a+l)\sin\omega t;$$

$$y_B = -AC = -l\cos\omega t.$$

Имеем: $x_B = (a+l)\sin\omega t$, $y_B = -l\cos\omega t$.

Для нахождения траектории необходимо исключить параметр – время; для этого возведём оба уравнения в квадрат и сложим. Получим уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{(a+l)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1.$$

1.2. ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОСИ КРИВОЙ

Рассмотрим движение точки M в пространстве $Oxyz$ тела отсчёта A (рис. 1.2.1). Пусть L – траектория точки M. *Естественными осями* кривой L в её точке M или *осями Эйлера* называют:

1. *Касательную* τ, проведённую в сторону возрастания дуговой координаты.

2. *Главную нормаль* n проведённую к центру кривизны траектории L в точке M.

3. *Бинормаль* b, образующую правую тройку с осями τ и b.

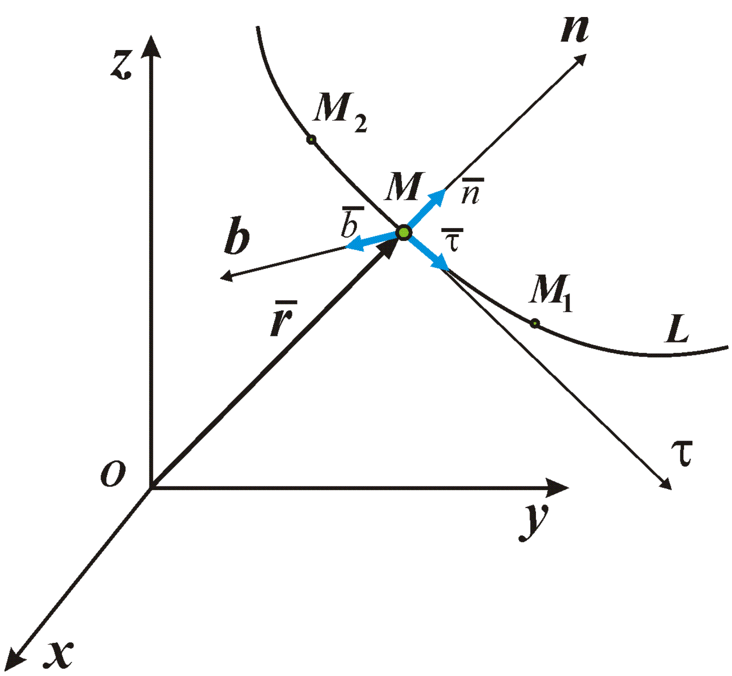


Рис. 1.2.1

Единичные орты этих осей обозначают $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$.

Плоскость (τ, n) называют *соприкасающейся плоскостью*; (b, τ) – *спрямляющая плоскость*; (n, b) – нормальная плоскость.

Трёхгранник этих плоскостей называют *натуральным* или *трёхгранником Френе*. Ясно, что направление осей Эйлера меняется с движением точки M (рис. 1.2.2).

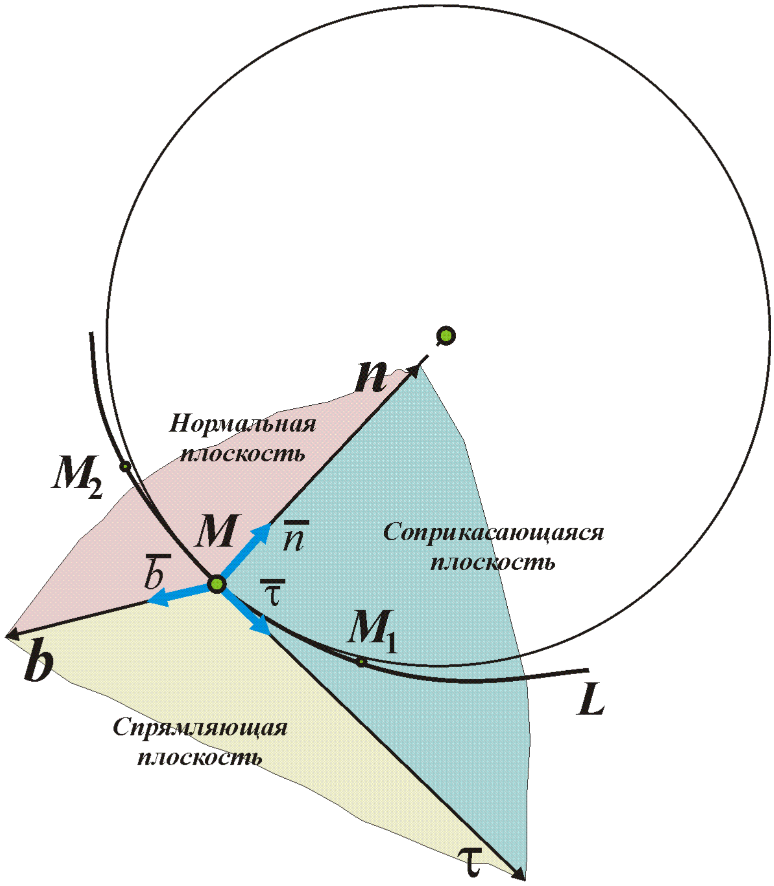


Рис. 1.2.2

Напомним, что касательная определяется предельным положением секущей MM_1 при стремлении точки M_1 к точке M. Окружность, проходящая через три точки M_2, M и M_1, когда M_2 и M_1 стремятся к точке M называется *соприкасающейся окружностью*. Радиус этой окружности ρ будет *радиусом кривизны траектории* в точке M , её центр – *центром кривизны* траектории. Плоскость этой окружности – *соприкасающаяся плоскость*.

При задании положения точки её дуговой координатой σ, радиус – вектор $\bar{r}$ становится функцией этого расстояния $\bar{r} = \bar{r}(\sigma)$.

Несложно показать, что имеют место равенства

$$\frac{d\,\bar{r}}{d\,\sigma} = \bar{\tau}, \qquad \frac{d\,\bar{\tau}}{d\,\sigma} = \frac{\bar{n}}{\rho}.$$

1.3. СКОРОСТЬ ТОЧКИ

Скоростью $\bar{v}$ *движущейся точки называют количественную меру информации о быстроте и направлении движения точки.*

Рассмотрим движение точки M в пространстве $Oxyz$ тела отсчёта A (рис. 1.3.1).

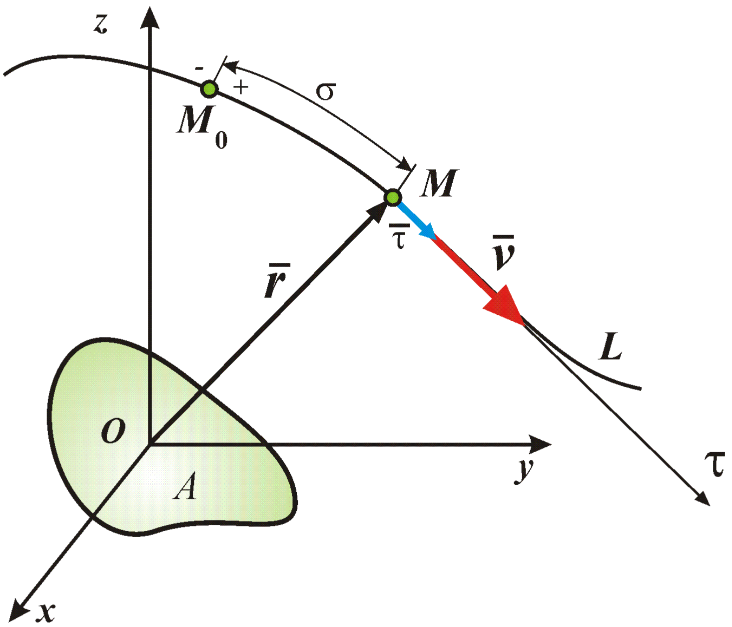


Рис. 1.3.1

Векторный способ

При *векторном способе* задания движения скорость точки в данный момент времени определяется как векторная величина равная первой производной по времени от радиуса-вектора точки.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Координатный способ

Здесь, как известно, заданы координатные уравнения движения точки:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Выражая $\bar{r}$ через его проекции на оси координат, получим

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\ .$$

Отсюда можем найти

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k},$$

так как $\bar{i}, \bar{j}$ и $\bar{k}$ – векторы постоянной длины и направления.

Теперь можем записать проекции вектора скорости точки на прямоугольные декартовы оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},\; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Проекции скорости точки на декартовы оси координат равны первым производным от функций координат точек по времени.

Модуль скорости

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Для направляющих косинусов вектора скорости получим

$$\cos\left(\bar{v}, \bar{j}\right) = \frac{v_x}{v},\; \cos\left(\bar{v}, \bar{j}\right) = \frac{v_y}{v},\; \cos\left(\bar{v}, \bar{k}\right) = \frac{v_z}{v}.$$

Естественный способ

В этом случае закон движения задан в форме $\sigma = \sigma(t)$. Поскольку имеет место зависимость

$$\bar{r}(t) = \bar{r}\left[\sigma(t)\right],$$

То можем записать

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\bar{\tau}.$$

Величину $\dfrac{d\sigma}{dt}$ обозначим v_τ. Это проекция скорости на касательную к траектории. Поскольку $|d\bar{r}| = |d\sigma|$ то v_τ определяем алгебраическую величину скорости.

Можем записать

$$\bar{v} = v_\tau \bar{\tau}.$$

Обратим внимание, что

$$\left|v_\tau\right| = \left|\bar{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,.$$

Учитывая также, что $\left|d\,s\right| = \left|d\,\sigma\right|$ можем написать

$$\left|\frac{d\,s}{d\,t}\right| = \left|\frac{d\,\sigma}{d\,t}\right| = \left|v_\tau\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,.$$

И, следовательно:

$$s = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,d\,t\,.$$

По этой формуле можно находить путь, пройденный точкой.

1.4. ГОДОГРАФ СКОРОСТИ

Рассматриваем движение точки M в пространстве тела отсчёта A (рис. 1.4.1).

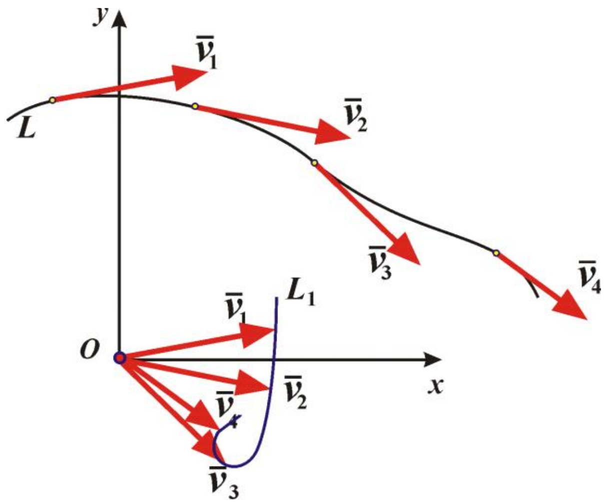


Рис. 1.4.1

Годографом скорости называют множество положений концов векторов скоростей для различных моментов времени, когда начало векторов скоростей перенесено в одну точку.

Из определения скорости можно сделать вывод о том, что производная вектора по скалярному аргументу есть вектор, направленный по касательной к годографу вектора в сторону поворота вектора. В самом деле, поскольку траектория точки есть годограф её радиус вектора, а скорость – производная этого вектора по скалярному аргументу – времени.

Если при этом вектор есть постоянная по модулю, но переменная по направлению величина, то годограф есть линия, расположенная на поверхности сферы, и производная вектора постоянной длины перпендикулярна вектору.

$$\left.\frac{d\bar{u}}{dt}\right|_{u=\mathrm{const}} \perp \bar{u}\,.$$

Пример 1.4.1

Даны уравнения движения точки в координатной форме:

$$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t\,.$$

Найти уравнения годографа скорости точки.

Решение

Зависимости для скорости точки есть ни что иное, как уравнения годографа скорости в параметрической форме.

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = 1 - \cos t, \\ v_y &= \dot{y} = \sin t, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{уравнения годографа} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 1 - \cos t, \\ y_1 &= \sin t. \end{aligned}\right.$$

Смотри рисунок 1.4.2.

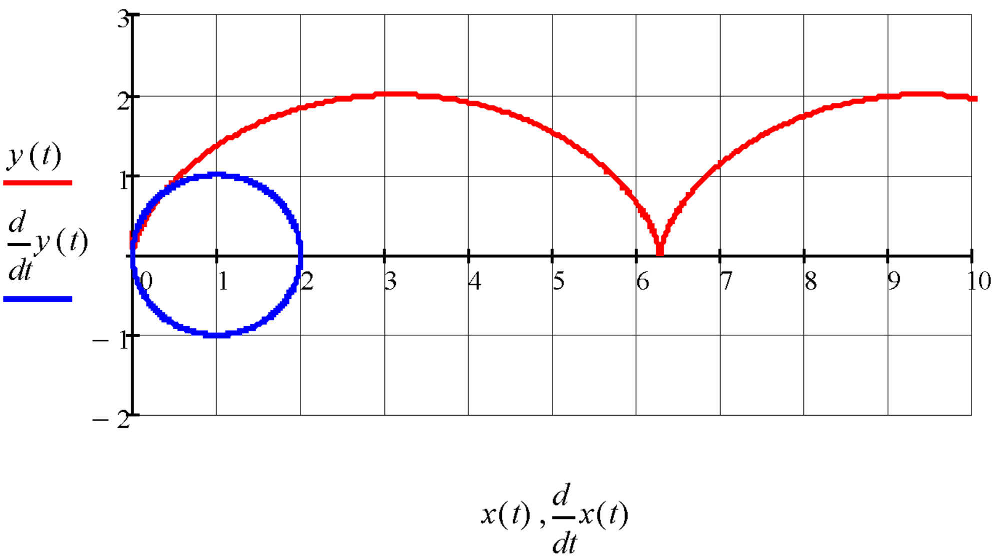


Рис. 1.4.2

Чтобы получить уравнения годографа в координатной форме, нужно исключить параметр – время. Получаем

$$\left(x_1 - 1\right)^2 + y_1^2 = 1.$$

С помощью годографа скорости удобно анализировать её изменение.

1.5. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

При движении точки вектор скорости её изменяется как по величине, так и по направлению. Для характеристики изменения скорости с течением времени вводится понятие ускорения.

Ускорением точки в какой-либо момент времени называется количественная мера информации об изменении скорости точки, определяемая равенством

$$\overline{a} = \frac{d\,\overline{v}}{d\,t}.$$

Если скорость служит количественной мерой движения точки, то ускорение служит мерой изменения движения.

Нахождение ускорения

I. **Векторный способ**

$$\overline{a} = \frac{d\,\overline{v}}{d\,t} = \frac{d^2\overline{r}}{d\,t^2} = \dot{\overline{v}} = \ddot{\overline{r}} \tag{1.5.1}$$

Ускорение точки есть векторная величина, равная второй производной от радиус-вектора точки по времени.

II. Координатный способ

Используя зависимость (1.1) можем написать

$$\overline{a} = \frac{d^2\overline{r}}{d\,t^2} = \frac{d^2x}{d\,t^2}\overline{i} + \frac{d^2y}{d\,t^2}\overline{j} + \frac{d^2z}{d\,t^2}\overline{k} = \ddot{x}\,\overline{i} + \ddot{y}\,\overline{j} + \ddot{z}\,\overline{k}.$$

Отсюда находим

$$a_x = \frac{d^2x}{d\,t^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2y}{d\,t^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{d^2z}{d\,t^2} = \ddot{z}.$$

Проекции ускорения точки на оси координат равны вторым производным от координат точки по времени.

Модуль ускорения $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Направляющие косинусы вектора ускорения

$$\cos\left(\bar{a},\bar{i}\right)=\frac{a_x}{a};\ \cos\left(\bar{a},\bar{j}\right)=\frac{a_y}{a};\ \cos\left(\bar{a},\bar{k}\right)=\frac{a_z}{a}.$$

III. Естественный способ

Подставляя в (1.5.1) зависимость $\bar{v}=v_\tau\bar{\tau}$ получим (рис. 1.5.1)

$$\bar{a}=\frac{d\,v_\tau}{d\,t}\bar{\tau}+v_\tau\frac{d\,\bar{\tau}}{d\,t}.$$

В свою очередь

$$\frac{d\,\bar{\tau}}{d\,t}=\frac{d\,\bar{\tau}}{d\,\sigma}\frac{d\,\sigma}{d\,t}=\frac{\bar{n}}{\rho}v_\tau.$$

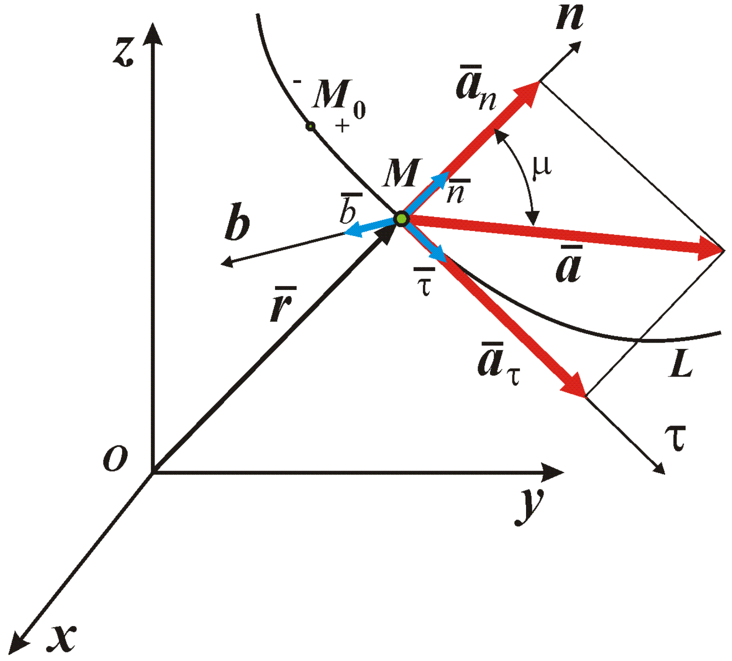


Рис. 1.5.1

Окончательно

$$\bar{a}=\frac{d\,v_\tau}{d\,t}\bar{\tau}+\frac{v_\tau^2}{\rho}\bar{n} \qquad (1.5.2)$$

Если обозначить:

$\bar{a}_\tau = \dfrac{d\,v_\tau}{d\,t}\bar{\tau}$ $\to$ касательная составляющая полного ускорения,

$\bar{a}_n = \dfrac{v_\tau^2}{\rho}\bar{n}$ $\to$ нормальная составляющая полного ускорения, то(1.5.2) перепишется в виде:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n .$$

Проецируя (1.2) на естественные оси кривой, получим

$$a_\tau = \frac{d\,v_\tau}{d\,t},\ a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho},\ a_b = 0 .$$

Т.е. вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ ;\ \ \operatorname{tg}\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} .$$

Для краткости $\bar{a}_\tau$ и $\bar{a}_n$ часто называют не касательной и нормальной составляющими полного ускорения, а просто касательным и нормальным ускорениями.

Касательное ускорение является мерой изменения величины скорости с течением времени, а нормальное ускорение характеризует изменение направления скорости.

В круговом движении точки нормальное ускорение называют *центростремительным* ускорением.

1.6. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ТОЧКИ И КРИТЕРИИ ХАРАКТЕРА ДВИЖЕНИЯ

I. По виду траектории

1. Прямолинейное: $\bar{\tau} = \mathrm{const};\ \bar{a} = \bar{a}_\tau;\ \bar{a}_n = 0.$

2. Криволинейное: $\bar{\tau} \neq \mathrm{const};\ \bar{a}_n \neq 0.$

Частный случай криволинейного движения: круговое движение: $\rho = \mathrm{const}$.

II. По характеру движения

1. Равномерное: $v = \text{const}$; $a_\tau = 0$; $\sigma = \sigma_0 + v_\tau t$.

2. Неравномерное: $v \neq \text{const}$; $a_\tau \neq 0$.

а. Ускоренное: $a_\tau v_\tau > 0$ (рис. 1.6.1)

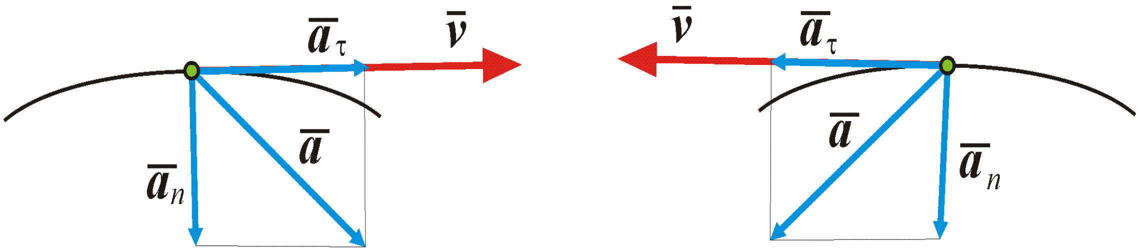


Рис. 1.6.1

б. Замедленное: $a_\tau v_\tau < 0$ (рис. 1.6.2)

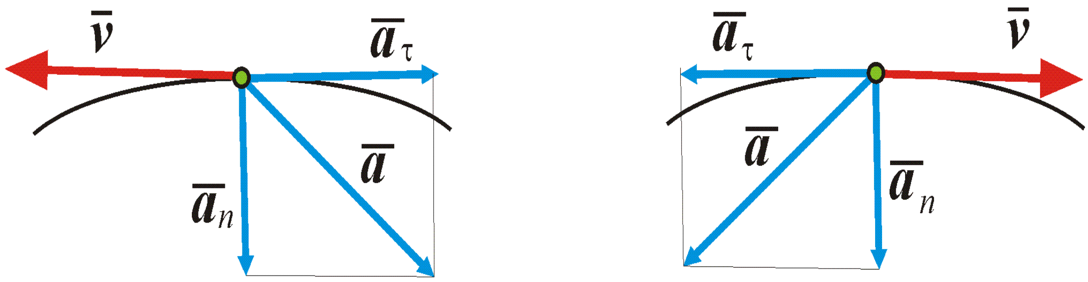


Рис. 1.6.2

Частный случай неравномерного движения – равнопеременное движение $a_\tau = \text{const}$.

$$v_\tau = v_{\tau 0} + a_\tau t; \quad \sigma = \sigma_0 + v_{\tau 0} t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Здесь $v_{\tau 0}$ – начальная скорость, σ_0 – начальная дуговая координата.

2. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ КИНЕМАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердым называется тело, расстояние между двумя любыми точками которого остается неизменным. Чтобы исследовать движение твёрдого тела необходимо исследовать движение всех его точек. Однако, учитывая неизменность взаимного расположения точек твёрдого тела, эту задачу можно упростить.

Поскольку для определения положения одной материальной точки необходимо иметь три независимые обобщенные координаты, то для n независимых точек нужно иметь $3n$ координат. Для твёрдого тела, однако, достаточно 6 координат (рис. 2.1.1):

Зафиксируем положение 3-х точек тела M, N и P:

- Положение M : три параметра.
- Затем N: ещё два параметра (на сфере с центром в M).
- Наконец для P достаточно ещё один параметр (на окружности с осью MN)

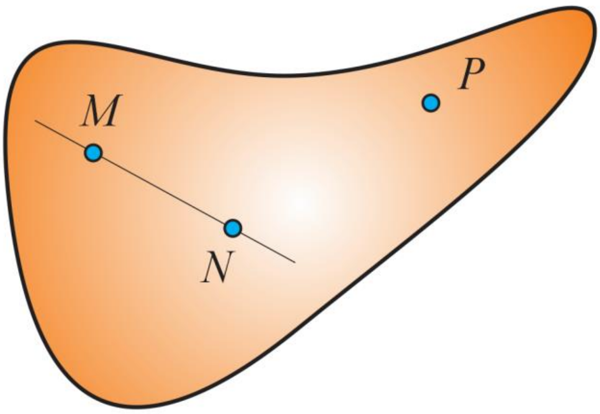


Рис. 2.1.1

Теорема о скоростях точек твердого тела

Пусть M произвольная точка тела, движущегося в пространстве $Oxyz$. Ее радиус-вектор $\overline{r}$ в этом пространстве является функцией обобщенных координат $\left\{q_j\right\}_S$.

$$\overline{r} = \overline{r}\left(q_1, q_2, \ldots q_S\right).$$

Величины $\left\{\dot{q}_j\right\}_S$ – производные обобщенных координат по времени называются обобщенными скоростями.

Скорость $\overline{v}$ точки M тела в момент времени t найдем дифференцированием ее радиус-вектора по времени $\overline{v} = \dot{\overline{r}}$

Применяя правило дифференцирования функции многих переменных, зависящих от времени, получим

$$\overline{v} = \frac{d\,\overline{r}}{d\,t} = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j \tag{2.1}$$

Отсюда видно, что скорость произвольной точки движущегося твердого тела является линейной формой его обобщенных скоростей $\left\{q_j\right\}_S$.

Коэффициенты этой формы – частные произвольные радиус-вектора точки по обобщенным координатам – подсчитываются для значений обобщенных координат, соответствующих положению твердого тела в момент времени.

Теорема. *Скорость $\overline{v}$ произвольной точки т в каком-либо его положении равна сумме скоростей $\left\{\overline{v}_j\right\}_S$ этой точки в парциальных движениях твердого тела из этого положения:*

$$\overline{v} = \sum_{j=1}^{S} \overline{v}_j .$$

Доказательство. Скорость $\overline{v}_j$ точки M в q_j-парциальном движении из данного положения найдем дифференцированием ее радиус-вектора $\overline{r}$, имея в виду, что в этом движении МО изменяется на величину $dq_j = \dot{q}_j\,dt$ только одна координата q_j:

$$\overline{v}_j = \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j \ \left(j = 1 - S \right).$$

Сложив эти равенства, получим

$$\sum_{j=1}^{S} \overline{v}_j = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j .$$

В соответствии с уравнением (2.1) правая часть этого равенства равна скорости $\overline{v}$ точки M. Отсюда и следует утверждение теоремы.

В теореме о скоростях точек тела выявлено одно из свойств движения любого материального объекта.

Теорема о проекциях скоростей точек твердого тела на соединяющую их прямую

Теорема. *Проекции скоростей точек твердого тела на прямую, соединяющую их, одинаковы:*

$$\left(\overline{v}_B\right)_{AB} = \left(\overline{v}_A\right)_{AB} .$$

Доказательство. Радиус-векторы двух точек твердого тела движущегося в пространстве $Oxyz$, связаны равенством (рис. 2.1.1).

$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{AB}, \tag{2.2}$$

где длина вектора $\overline{AB}$ останется неизменной во все время движения $\left|\overline{AB}\right| = \text{const}$.

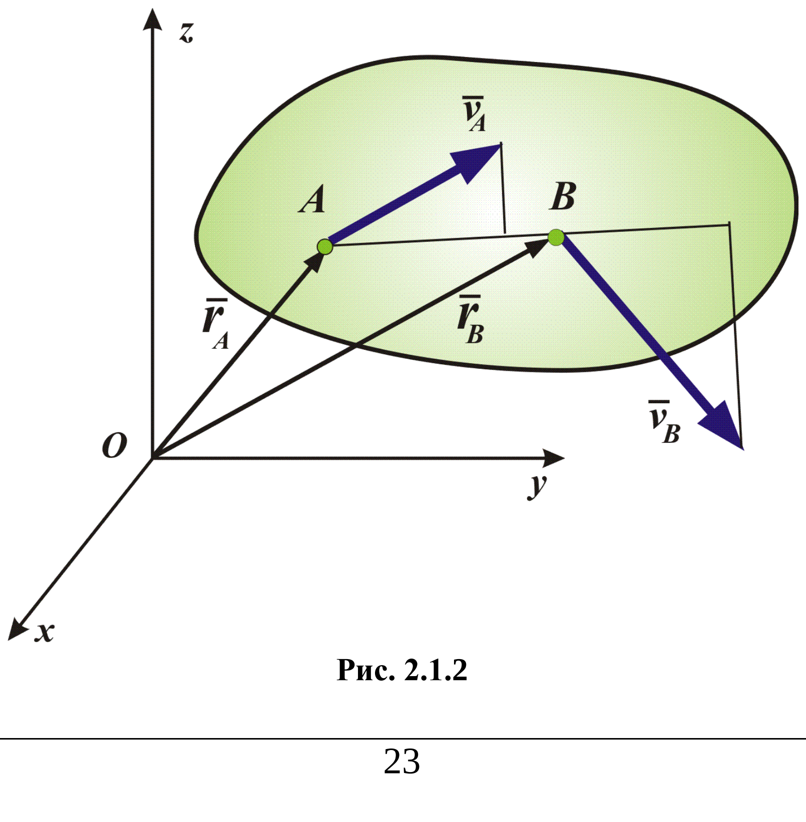


Рис. 2.1.2

Следовательно: $\left(\overline{AB}\right)^2 = \text{const}$ и $\dfrac{d\left(\overline{AB}^2\right)}{dt} = 2\cdot\overline{AB}\cdot\dfrac{d\left(\overline{AB}\right)}{dt} = 0.$

Поскольку $\overline{AB} \neq 0$ и $\dfrac{d\left(\overline{AB}\right)}{dt} \neq 0,$ то вектор-производная $\dfrac{d\left(\overline{AB}\right)}{dt}$, направлен перпендикулярно $\overline{AB}$.

Дифференцируя равенство (2.2) по времени, получим

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \frac{d\left(\overline{AB}\right)}{dt}\ . \tag{2.3}$$

Проецированием равенства (2.3) на прямую AB получим утверждение теоремы.

Теорема о скорости произвольной точки отрезка

Пусть M – произвольная точка отрезка AB принадлежащего твердому телу, причем $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$ (рис. 2.1.2). Из аналитической геометрии известно, что

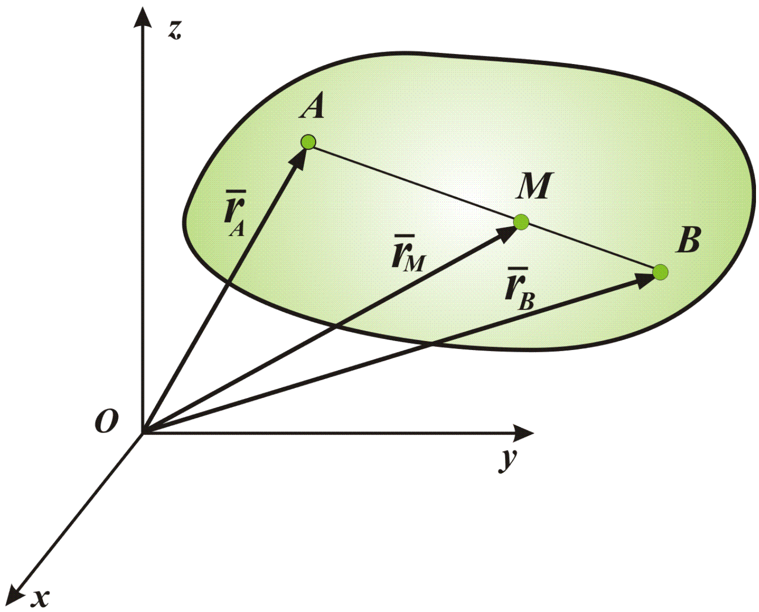


Рис. 2.1.2

$$\bar{r}_M = \frac{\bar{r}_A + \bar{r}_B \lambda}{1+\lambda}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$\bar{v}_M = \frac{\bar{v}_A + \bar{v}_B \lambda}{1+\lambda}, \quad \bar{a}_M = \frac{\bar{a}_A + \bar{a}_B \lambda}{1+\lambda}.$$

Для середины отрезка имеем:

$$\frac{AM}{MB} = 1 \Rightarrow \bar{v}_M = \frac{\bar{v}_A + \bar{v}_B}{2}, \quad \bar{a}_M = \frac{\bar{a}_A + \bar{a}_B}{2}.$$

О методе изучения кинематики твердого тела

В основу изучения свойств движения твердого тела положим метод обобщенных координат и парциальных движений материального объекта. В соответствии с этим методом начинать изучение движения тела надо с назначения его обобщенных координат и составления уравнений движения тела в обобщенных координатах. В соответствии с обобщенными координатами устанавливаются парциальные движения тела.

Затем следует найти скорости точек тела, которые согласно теореме о скоростях точек МО определяются через скорости этих точек в парциальных движениях тела. Ускорения точек находятся дифференцированием по времени их скоростей. Скорости и ускорения точек тела определятся через первые и вторые производные обобщенных координат тела, зависимости которых от времени представлены уравнениями его движения в обобщенных координатах. После того, как найдены поля скоростей и ускорений точек тела, устанавливается структура и свойства названных полей.

Наиболее просто скорости точек твердого тела находятся в поступательном и вращательном около неподвижной оси движениях тела. Поэтому обобщенные координаты твердого тела надо назначить так, чтобы его парциальными движениями были именно эти два движения.

Это будет означать, что движение твердого тела из одного положения в другое можно осуществить последовательностью его поступательных и вращательных около неподвижных осей движений. Последующее движение совершается из того положения тела, в которое оно было приведено предыдущим.

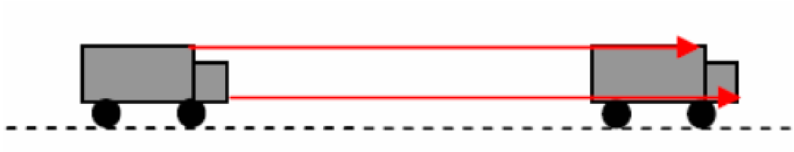
2.2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела γ *в пространстве* $Oxyz$ *называется поступательным, если сохраняются направления всех прямолинейных отрезков, проведенных в теле.*

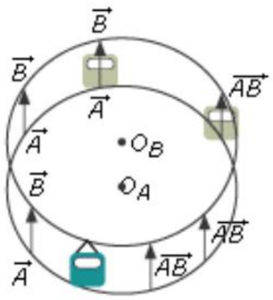
Чтобы убедиться, является ли движение тела поступательным, достаточно проверить, сохраняются или нет направления только двух отрезков, не параллельных между собой.

Exemples (fig. 2.4**) :**

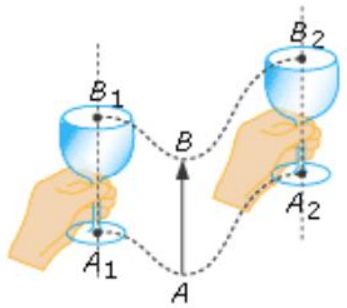
- Mouvement d’une voiture sur une route.
- Mouvement d’une nacelle d’une grande roue.
- Déplacement d’un verre.



Mouvement d’une voiture sur une route.



Mouvement d’une nacelle d’une grande roue.



Déplacement d’un verre.

Fig. 2.4

Пусть B – произвольная точка тела (рис. 2.2.1). В равенстве

$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{AB}, \tag{2.2.1}$$

которым связаны радиус-векторы двух точек твердого тела, при поступательном его движении вектор $\overline{AB}$ остается неизменным.

$$\overline{AB} = \text{const}. \tag{2.2.2}$$

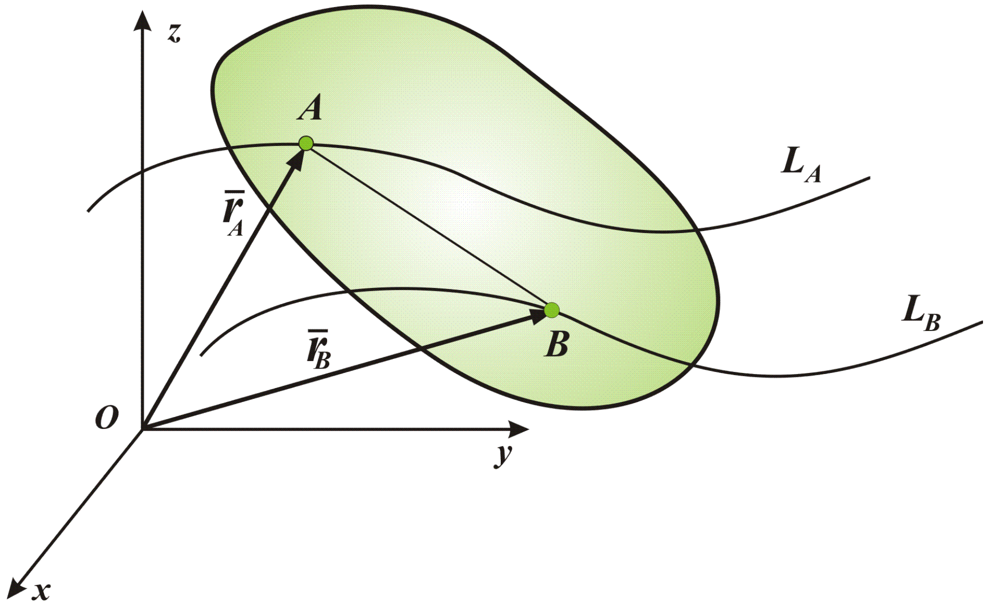


Рис. 2.2.1

Так как траекторией точки служит годограф её радиус-вектора, то из равенства (2.2.1), при условии (2.2.2), следует, что при поступательном движении траектории точек представляют собой конгруэнтные кривые.

Дифференцируя (2.2.1) по времени найдем:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A, \ \ \overline{a}_B = \overline{a}_A.$$

В каждый момент времени скорости и ускорения всех точек поступательно движущегося тела одинаковы.

Отсюда следует, что поступательное движение твердого тела определяется движение какой-либо одной его точки. Эту точку можно принять за *полюс*.

Exemple : Représentation du champ des vecteurs-vitesses de la bielle d’accouplement de roues de locomotive.

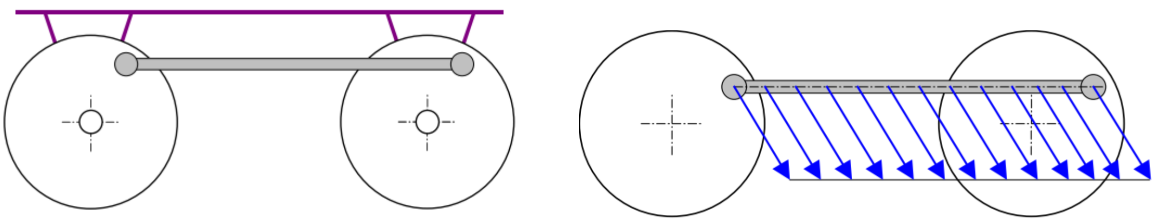


Fig. 2.6

Предупреждение. Не следует с поступательным движением тела связывать прямолинейность траекторий его точек. Траекториями точек поступательно движущегося тела могут быть любые кривые.

2.3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Угловая скорость и угловое ускорение вращающегося тела

Движение твердого тела γ *в пространстве* $Oxyz$*, две точки которого остаются неподвижными в этом пространстве, называется вращательным около неподвижной оси, проходящей через эти точки.*

Одно из направлений этой оси принимается за положительное.

Точки тела, вращающегося около неподвижной оси, совершают круговые движения, так как их траекториями служат окружности с центрами на оси вращения тела. Следовательно, точки тела, расположенные на оси вращения, остаются неподвижными. Если мысленно провести через тело две полуплоскости одну неподвижную, а другую подвижную вращающуюся вместе с телом (рис. 2.3.1), то положение подвижной плоскости, а, следовательно, и самого тела в момент t определится углом φ, заключенным между плоскостями. Этот угол называется углом поворота тела. Положительным направлением угла φ будем считать направление против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения.

При вращении тела угол поворота его φ изменяется с течением времени, а поэтому он являете функцией времени:

$$\varphi = \varphi(t) \tag{2.3.1}$$

Уравнение (2.3.1) называется уравнением вращения; зная его, можно для любого момента t найти угол φ, а следовательно и положение вращающегося тела.

Алгебраической угловой скоростью тела в момент времени t называется количественная мера быстроты и направления вращения тела в этот момент времени, определённая равенством

$$\tilde{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

$\tilde{\omega}$ будет положительной, если тело вращается против часовой стрелки, когда смотришь с положительного конца оси вращения.

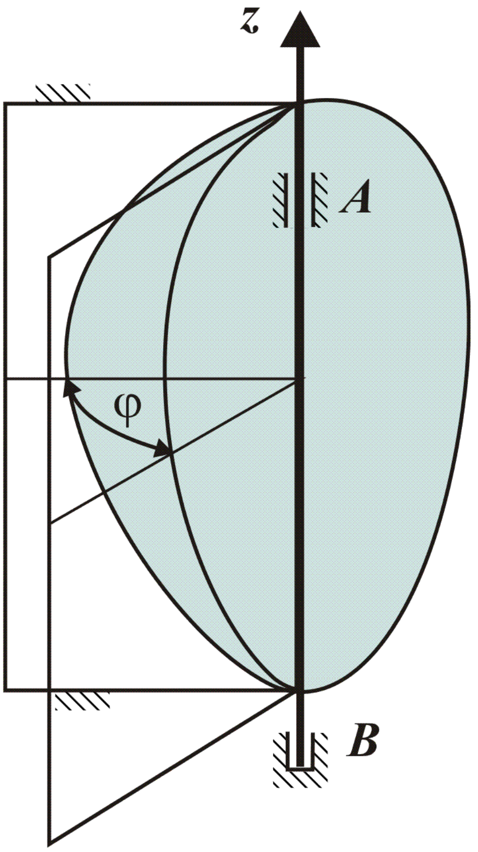


Рис. 2.3.1

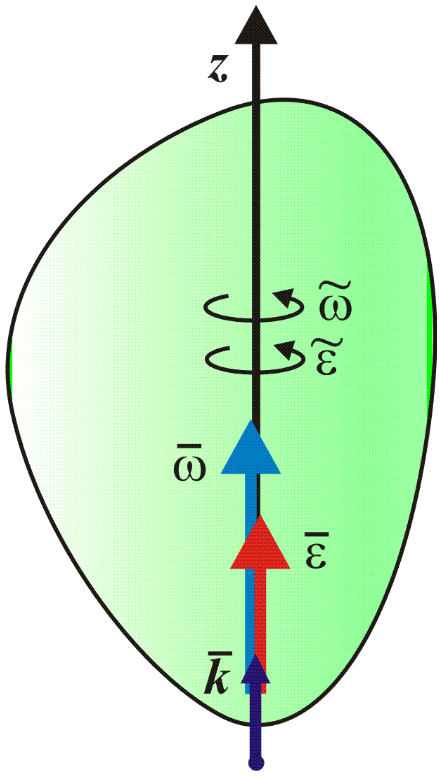


Рис. 2.3.2

Размерность угловой скорости:

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

В технике, при равномерном вращении угловую скорость часто измеряют числом оборотов в минуту $[n] = \dfrac{\text{об.}}{\text{мин}}$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1n\,.$$

Алгебраическим угловым ускорением вращающегося тела назовем количественную меру изменения угловой скорости, определяемую соотношением

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Размерность $\left[\varepsilon\right] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}$.

Угловую скорость и угловое ускорение можно определить как векторы, направленные по оси вращения и равные

$$\overline{\omega} = \tilde{\omega}\overline{k}\,,\;\; \overline{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}\,\overline{k}\,,$$

где $\overline{k}$ – единичный вектор, задающий положительное направление оси вращения (рис. 2.3.2).

Вращения тела разделяются на равномерные, когда модуль угловой скорости остается неизменным, и неравномерные, когда модуль угловой скорости изменяется (ускоренные, если $\tilde{\omega}\cdot\tilde{\varepsilon} > 0$ и замедленные, если $\tilde{\omega}\cdot\tilde{\varepsilon} < 0$). Такова аналитическая форма критерия характера вращения тела около неподвижной оси.

Скорости и ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Пусть M – произвольная точка тела вращающегося около неподвижной оси (рис. 2.3.3); $\varphi = \varphi\left(t\right)$ – уравнение вращения; $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\varepsilon}$ – угловая скорость и угловое ускорение тела.

Траекторией точки M будет окружность, расположенная в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Центр этой окружности, C, находится на оси вращения, радиус окружности равен расстоянию от точки M до оси вращения.

Проведем оси Эйлера $M\tau$ и Mn. $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ – единичные орты этих осей.

Дуговая координата точки, отсчитываемая от начального положения точки M_0 до её положения в момент времени t найдется по формуле $\sigma = CM\varphi$.

Скорость точки

$$\bar{v} = v_\tau \bar{\tau},$$

где $v_\tau = \dfrac{d\sigma}{dt} = CM\dot{\varphi} = CM\tilde{\omega}$.

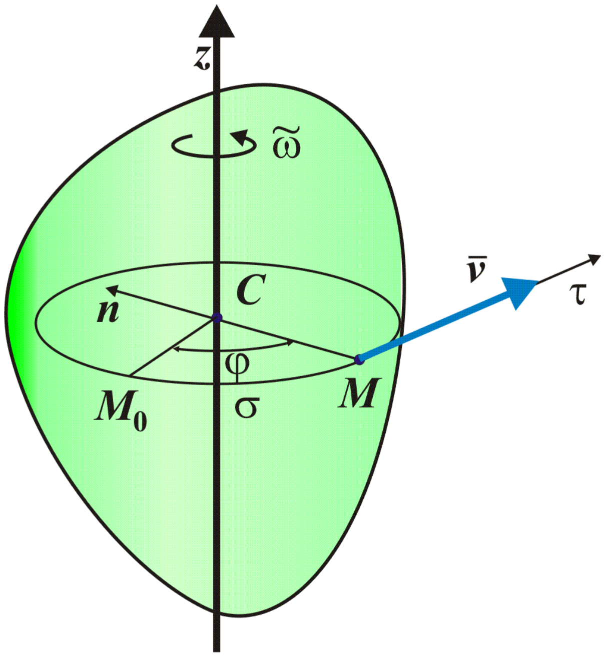


Рис. 2.3.3

Ускорение точки M вращающегося тела найдем, используя равенства для касательного и нормального ускорений точки в криволинейном движении при естественном способе задания движения (рис. 2.3.3).

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau;$$

$$\bar{a}_n = a_n \bar{n}, \quad a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho} = \frac{CM^2\omega^2}{CM} = \omega^2 CM;$$

$$\bar{a}_\tau = a_\tau \bar{\tau}, \quad a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}\left(CM\tilde{\omega}\right) = CM\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = CM\tilde{\varepsilon}.$$

$\bar{a}_n$ всегда направлено к оси вращения. $\bar{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории в сторону $\tilde{\varepsilon}$.

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = CM\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{2.3.2}$$

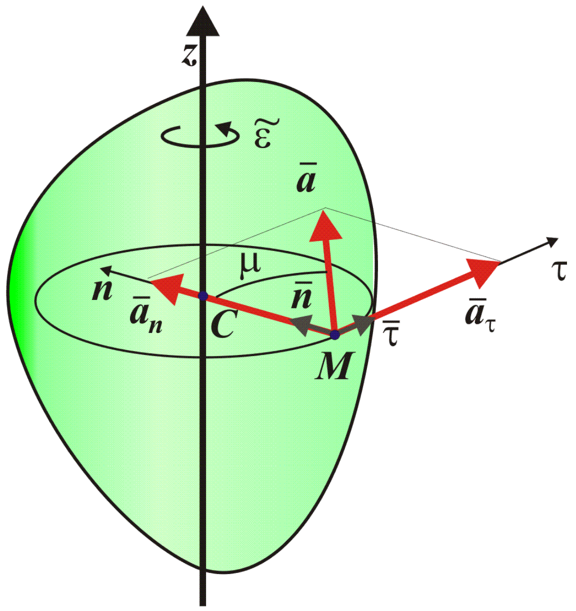


Рис. 2.3.3

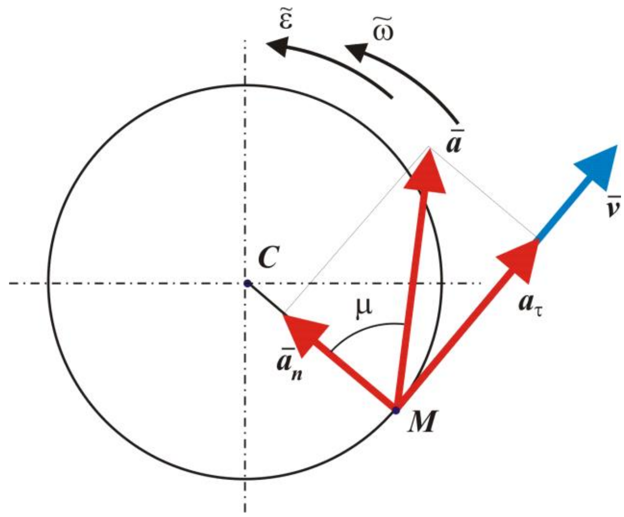


Рис. 2.2.4

Тангенс угла наклона полного ускорения к нормали

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Из равенства (2.3.2) видно, что модули ускорений точек тела, вращающегося около неподвижной оси, как и модули их скоростей, пропорциональны расстояниям точек от оси вращения тела.

При решении задач удобно пользоваться следующими зависимостями для скорости и ускорения точки вращающегося тела (рис. 2.3.4):

$$v = CM\omega,\ \bar{v} \perp_{\circlearrowright\tilde{\omega}} \overline{CM}. \qquad (2.3.3)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau;$$
$$a_n = \omega^2 CM,\ \bar{a}_n \parallel \overline{MC};\ a_\tau = CM\varepsilon, \bar{a}_\tau \perp_{\circlearrowright\tilde{\varepsilon}} \overline{CM}. \qquad (2.3.4)$$

Вектор скорости точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси можно определить как векторное произведение вектора угловой скорости на радиус-вектор этой точки относительно некоторого центра на оси вращения (рис. 2.3.5).

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (2.3.5)$$

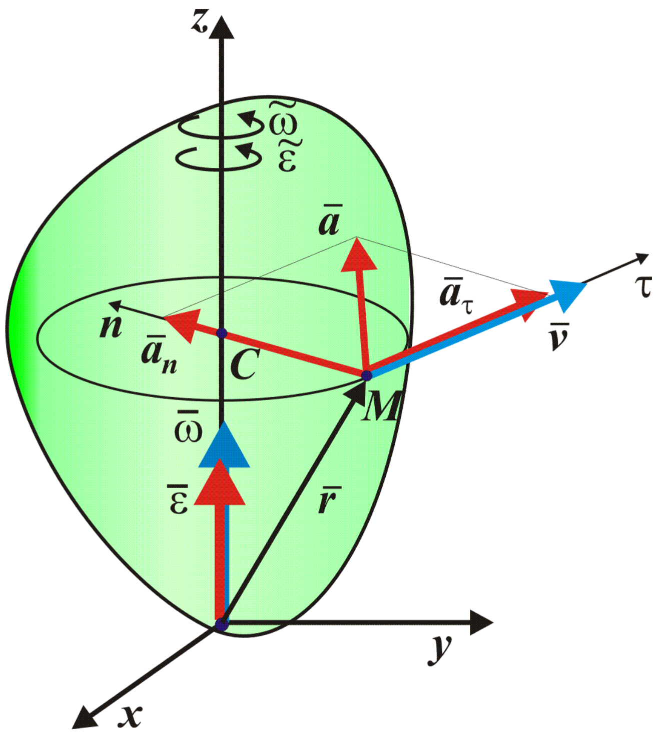


Рис. 2.3.5

В самом деле, легко проверить, что и модуль и направление векторного произведения (2.3.5) удовлетворяет зависимостям (2.3.3).

Равенство(2.3.5), которое называется *формулой Эйлера*, описывается поле скоростей точек тела, вращающегося около неподвижной оси. Оно называется ротационным, или *Эйлеровым*.

Ускорение точки вращающегося тела в векторной форме можно получить дифференцируя по времени зависимость (2.3.5).

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right) = \frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\bar{v}.$$

Нетрудно проверить, что

$\bar{\varepsilon}\times\bar{r} = \bar{a}_\tau$ – тангенциальное ускорение точки,

$\bar{\omega}\times\bar{v} = \bar{a}_n$ – нормальное ускорение точки.

2.4. О ДВИЖЕНИИ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛ

Рассмотрим движение двух тел, контактирующих между собой. При точечном контакте точка контакта P может рассматриваться как принадлежащая обоим телам. Если рассматривается точка P принадлежащая S_1, её обозначаем P_1. Если же рассматривается точка P принадлежащая S_2, обозначаем её P_2.

При сохранении контакта тел и отсутствии проскальзывания S_1 и S_2 скорость точки P будет одинаковой для обоих тел:

$$\bar{v}_{P1} = \bar{v}_{P2}.$$

Эта скорость принадлежит касательной плоскости π. => $\bar{v}_P \cdot \bar{n} = 0$.

При отсутствии проскальзывания $\overline{v}_{P1} = \overline{v}_{P2}$.

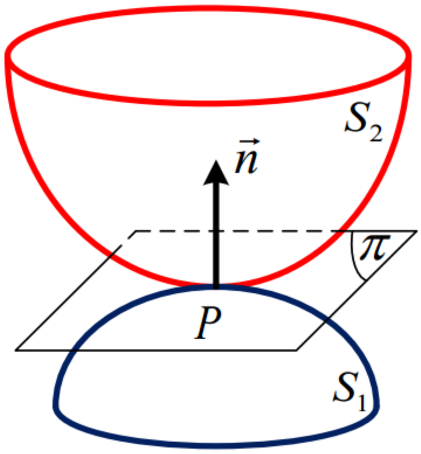


Рис. 2.4.1

Примеры

1) *Зацепление колёс*

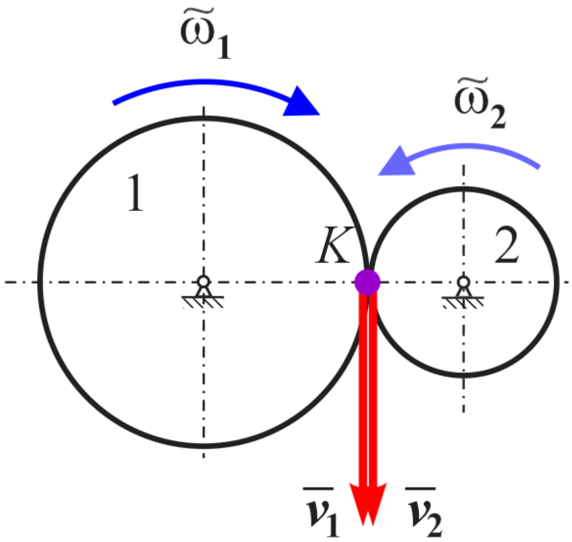


Рис. 2.4.2

Пусть v_1 – скорость точки контакта, принадлежащая первому колесу, а v_2 – второму. При отсутствии проскальзывания, $v_1 = v_2$.

Поскольку

$$v_1 = r_1 \cdot \omega_1,\ v_2 = r_2 \cdot \omega_2.$$

Следовательно $r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1}$.

2) *Передача вращения гибкой связью*

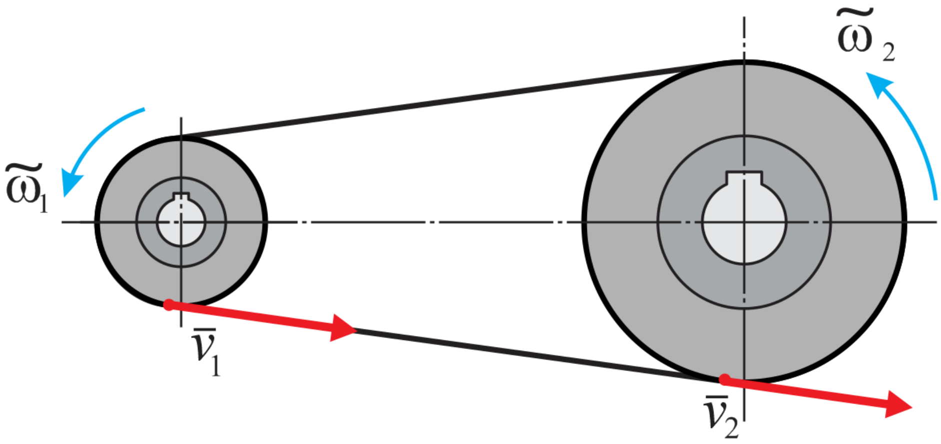


Рис. 2.4.2

Если нить, связывающая два шкива нерастяжима и не проскальзывает по шкивам, то скорости точек схода нити и набегания нити одинаковы: $v_1 = v_2$. Следовательно

$$r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

3. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

3.1. УРАВНЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Движение тела в пространстве $O\xi\eta$, если одна его точка в этом пространстве остается неподвижной, называется вращательным около этой точки или сферическим. Второе название связано с тем, что траекториями точек тела служат сферические кривые линии на поверхностях сфер с центрами в неподвижной точке тела

В теоретической механике применяется предложенный Эйлером способ назначения обобщенных координат тела с одной неподвижной точкой (рис. 3.1.1).

Введем координатные оси $Oxyz$, жестко связанные с телом. Прямая ON пересечения плоскости Oxy с плоскость $O\xi\eta$, называется линией узлов.

Очевидно, что положение тела в пространстве определится, если задать положение осей $Oxyz$ в этом пространстве. Поэтому независимые между собой величины, которыми определяется положение этих осей, будут служить обобщенными координатами тела.

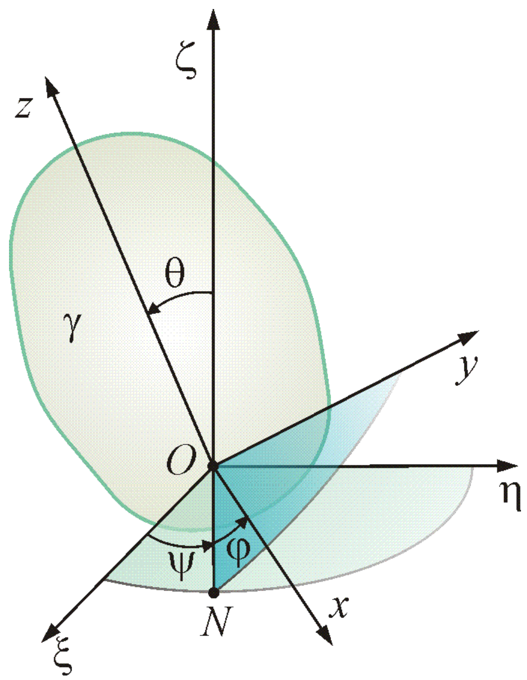


Рис. 3.1.1

В качестве таких величин Эйлер предложил три угла (углы Эйлера): угол ψ – угол, составленный линией узлов с осью $O\xi$, угол *прецессии*; угол θ – между осями $O\varsigma$ и Oz, угол *нутации*; угол φ – между линией узлов и осью Ox, угол *собственного вращения*. Эти углы отсчитываются соответственно от осей $O\xi$, $O\varsigma$ и линии узлов ON. Положительные направления отсчета углов показаны стрелками.

Зависимости углов Эйлера от времени:

$$\psi=\psi(t),\ \theta=\theta(t),\ \varphi=\varphi(t).$$

называются уравнениями сферического движение тела. Каждый из углов ψ, θ, и φ будет изменяться в отдельности соответственно вращению тела около осей $O\varsigma$, ON и Oz. Следовательно, парциальными движениями тела из занимаемого положения, соответствующими изменению каждого из углов Эйлера по отдельности, являются вращательные движения около названных осей, как неподвижных.

Конечные повороты тела относительно неподвижных осей не коммутативны: положение тела, которое оно займет после нескольких поворотов, зависит от того, в каком порядке они совершались. В этом просто убедиться, поворачивая спичечную коробку на прямые углы около неподвижных осей, меняя последовательность поворотов (рис. 3.1.2). Именно поэтому обращается внимание на порядок следования парциальных вращений тела, которыми оно переводится из одного положения в другое.

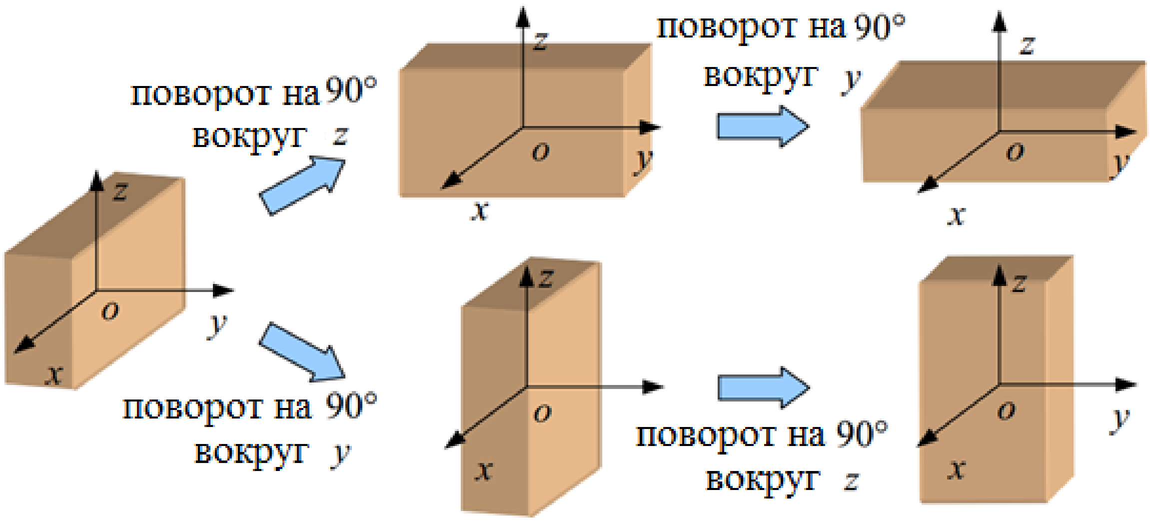


Рис. 3.1.2

Три парциальных движения тела с одной неподвижной точкой называются соответственно порядку их следования *прецессией, нутацией и собственным вращением этого тела.*

Угловые скорости парциальных вращений тела равны:

$$\bar{\omega}_1=\bar{\xi}^{\circ}\dot{\psi},\quad \bar{\omega}_2=\bar{n}^{\circ}\dot{\theta},\quad \bar{\omega}_3=\bar{z}^{\circ}\dot{\varphi}.$$

Они представляют собой угловые скорости прецессии, нутации и собственного вращения тела в момент времени t.

Для нахождения скорости произвольной точки *M* тела воспользуемся теоремой о скоростях точек МО

$$\bar{v} = \sum_{j}^{S} \bar{v}_j ,$$

где $\left\{\bar{v}_j\right\}_3$ – скорости точки в парциальных движениях тела.

Так как они вращательные около неподвижных осей, то для нахождения любой из скоростей $\left\{\bar{v}_j\right\}_3$ надо применить формулу Эйлера:

$$\bar{v}_1 = \bar{\omega}_1 \times \bar{r} , \quad \bar{v}_2 = \bar{\omega}_2 \times \bar{r} , \quad \bar{v}_3 = \bar{\omega}_3 \times \bar{r} ,$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки *M* относительного неподвижной точки тела, принадлежащей каждой из осей парциальных вращений.

Получим следующее выражение для скорости точки тела в сферическом движении:

$$\bar{v} = \left(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3\right) \times \bar{r} .$$

Обозначая в этом равенстве сумму векторов $\left\{\bar{\omega}_j\right\}_3$ через $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 ,$$

представим его в виде

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} .$$

Равенство $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ является уравнением поля скоростей точек тела, вращающегося около неподвижной точки.

Как видно, оно в каждый момент времени является ротационным, т.е. одинаковым с полем скоростей точек тела, вращающегося около неподвижной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$. При этом осью ротации; скорости точек тела на которой равны нулю, служит прямая l, проходящая через неподвижную точку тела, параллельно вектору $\bar{\omega}$.

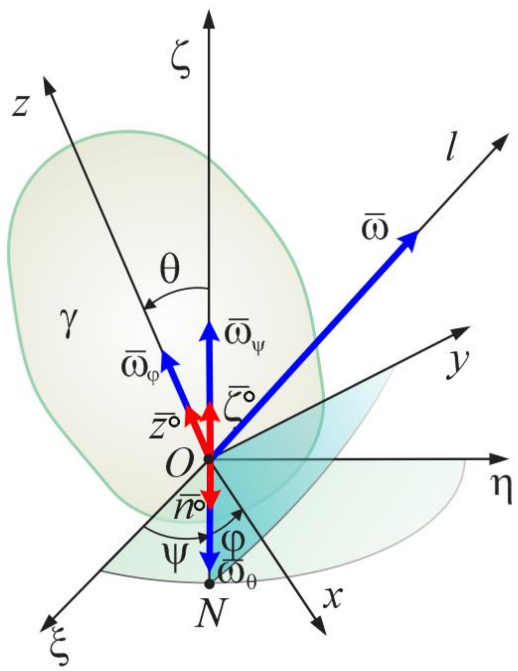


Fig.3.1.3

Этот результат является содержанием *теоремы Даламбера-Эйлера* о представлении сферического движения тела.

Теорема. *Движение тела с одной неподвижной точкой в любой момент времени является мгновенновращательным около оси, проходящей через неподвижную точку тела.*

Ось l около которой совершается вращение тела в рассматриваемый момент времени, называется мгновенной осью вращения тела. Угловая же скорость $\overline{\omega}$ этого вращения называется его мгновенной угловой скоростью. Она равна сумме угловых скоростей прецессии, нутации и собственного вращения тела. Вектор $\overline{\omega}$ угловой скорости тела направлен по мгновенной оси вращения тела.

В динамике самолета оси неизменного направления принято направлять так: ось $\overline{O}\xi$ – по предположенной линии курса в плоскости горизонта, $\overline{O}\eta$ – по восходящей вертикали в точке O, ось $\overline{O}\varsigma$ – вправо для наблюдателя, смотрящего вдоль $\overline{O}\xi$ (начало O помещается в месте старта). Ось Ox системы самолетных осей $Oxyz$ направлена по строительной оси самолета от хвоста к кабине летчика, перпендикулярная к ней ось Oy располагается в плоскости симметрии самолета и, наконец, Oz – перпендикулярно этой плоскости (по размаху крыла) вправо для летчика (рис. 3.1.4).

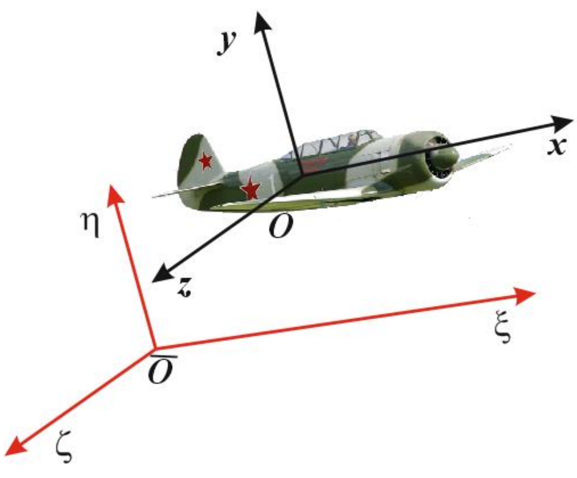


Рис. 3.1.4

Начало $\bar{O}$ системы осей $\bar{O}\xi\eta\varsigma$ мысленно поместим в O. За основные оси принимаются $\bar{O}\eta$ и Ox. Проецируя Ox на основную плоскость $\bar{O}\varsigma\xi$ строим вектор -$\bar{n}_1$ и расположенный в той же плоскости вектор $\bar{n}$ так, что $\bar{\imath}$, $\bar{n}$, $\bar{n}_1$ образуют ортонормированный правый триэдр (рис. 3.5). Вектор $\bar{n}'$ расположен по проекции $\bar{\imath}_2$ на основную плоскость Oyz его проще всего разыскать, построив направление, перпендикулярное к $\bar{\imath}'_1$ в плоскости основных осей Ox и $O\eta$ (в ней же расположен и вектор $\bar{n}_1$).

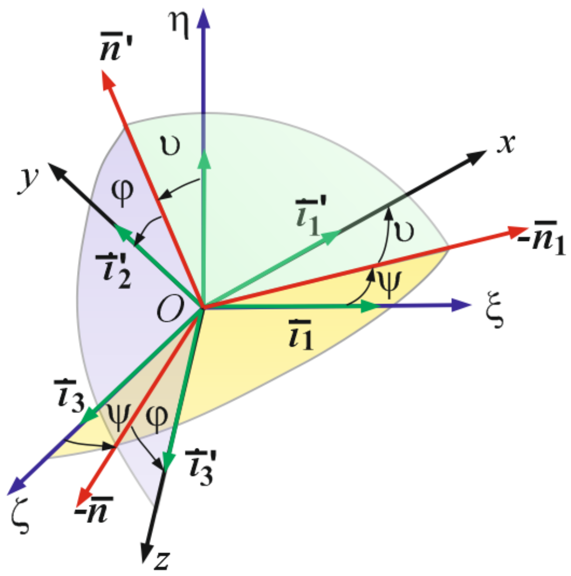


Рис. 3.1.5

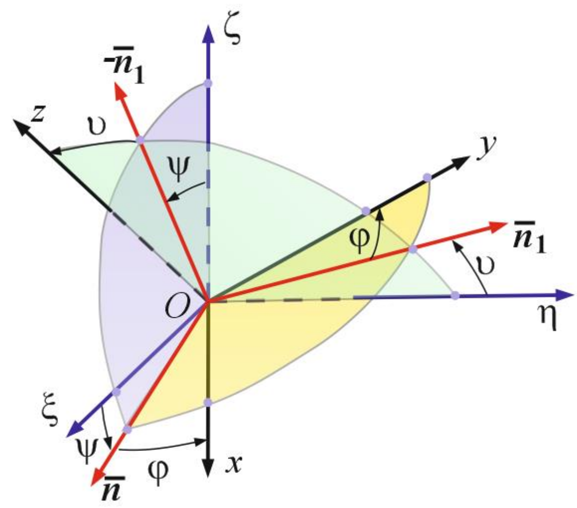


Рис. 3.1.6

Углы ψ, ϑ, φ, называемые *углами рысканья, тангажа* и *крена,* строятся так: ψ – угол между $O\xi$ и -$\bar{n}_1$ отсчитываемый вокруг $O\eta$, φ – угол, на который надо повернуть вектор $\bar{n}'$ вокруг Ox, чтобы совместить его с Oy; тангаж η определяется как угол между векторами -$\bar{n}_1$ и $\bar{\imath}'_1$ отсчитываемый вокруг -$\bar{n}_1$.

В динамике полета *крен, тангаж* и *рыскание* задают наклон летательного средства относительно его центра.

Оси, применяемые в теории корабля (корабельные оси) (рис. 3.1.6), только обозначениями отличаются от самолетных осей. На рисунке показано построение системы осей, примененных *А. Н. Крыловым*: корабельные оси $Oxyz$ направлены соответственно от кормы к носу (Ox), к левому борту (Oy) и в диаметральной плоскости корабля (Oz). В положении равновесия корабля они совпадают с осями $O\xi\eta\varsigma$. За основные приняты оси $O\eta$ и Oz. Вектор $-\bar{n}_1$ получен проецированием основной оси Oz на плоскость $O\varsigma\xi$; перпендикуляр к нему в той же плоскости определяет единичный вектор линии узлов $\bar{n}$, расположенный по линии пересечения основных плоскостей $O\varsigma\xi$; и Oxy. Углы η и ψ, отсчитываемые вокруг осей $\bar{n}$ и $O\eta$, определяют *дифферент* и *крен,* а угол φ, отсчитываемый от $\bar{n}$ к оси Ox вокруг Oz, – *рысканье* корабля.

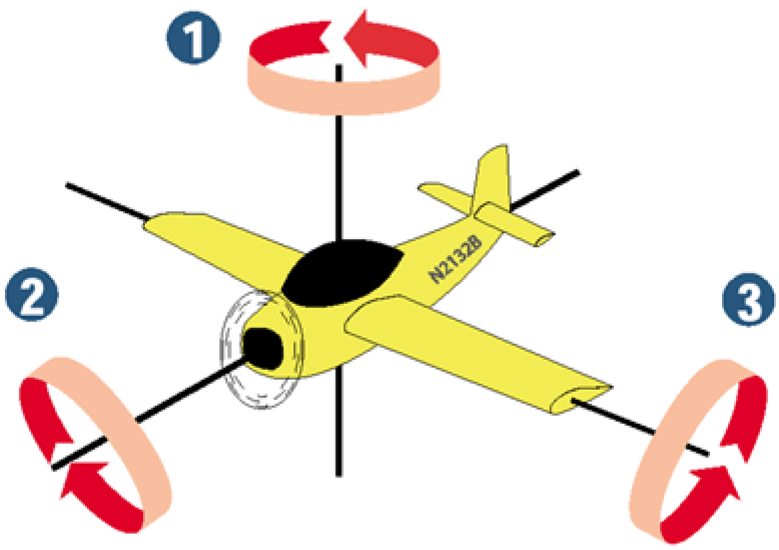


Рис.3.1.7. Три оси самолета
1 - вертикальная ось (рысканье), 2 - продольная ось (крен), 3 - поперечная ось (тангаж)

3.2. АКСОИДЫ

Процесс сферического движения тела представляет собой непрерывный ряд вращений тела вокруг перемещающейся мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку *O.* Эта ось, перемещаясь в неподвижном пространстве, описывает коническую поверхность с вершиной в точке *O* (рис. 3.2.1).

Коническая поверхность в виде геометрического места мгновенных осей в неподвижном пространстве называется **неподвижным аксоидом.**

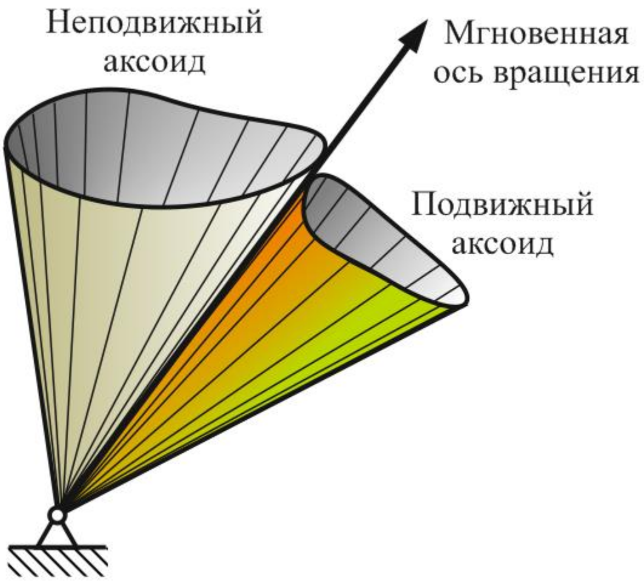


Рис.3.2.1.

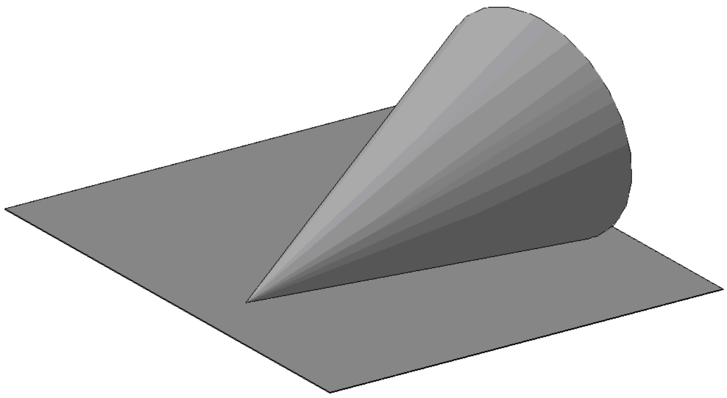


Рис. 3.2.2

Коническая поверхность в виде геометрического места мгновенных осей **в** движущемся теле называется **подвижным аксоидом.** Подвижный и неподвижный аксоиды касаются друг друга но прямой, являющейся мгновенной осью вращения тела. При сферическом движении тела подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному аксоиду.

Пример: **Конус вращения на плоскости.** Пусть конус вращения катится без проскальзывания по плоскости (рис. 3.2.2). Образующая конуса, касающаяся плоскости, представляет собой мгновенную ось вращения. Геометрическое место мгновенных осей в неподвижном пространстве – плоскость – неподвижный аксоид. Поверхность конуса – подвижный аксоид.

3.3. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ТЕЛА ПРИ СФЕРИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

Скорость любой точки тела в сферическом движении равна векторному произведению угловой скорости тела и радиус-вектора этой точки относительно его неподвижной точки.

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}\,.$$

Направление скорости $\bar{v}$ точки M показано на рисунке 3.3.1, а модуль ее

$$v = h\omega,$$

где h – расстояние точки от оси l.

Ускорение $\bar{a}_M$ произвольной точки M тела при сферическом движении найдем дифференцированием по времени равенства $\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \bar{r}$:

$$\bar{a}_M = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}.$$

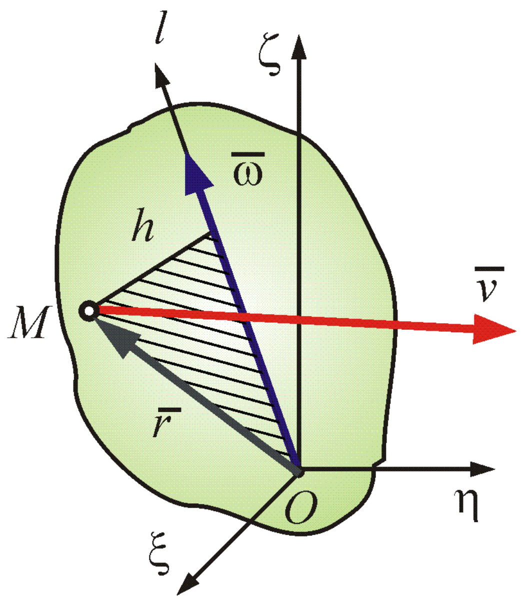


Рис. 3.3.1

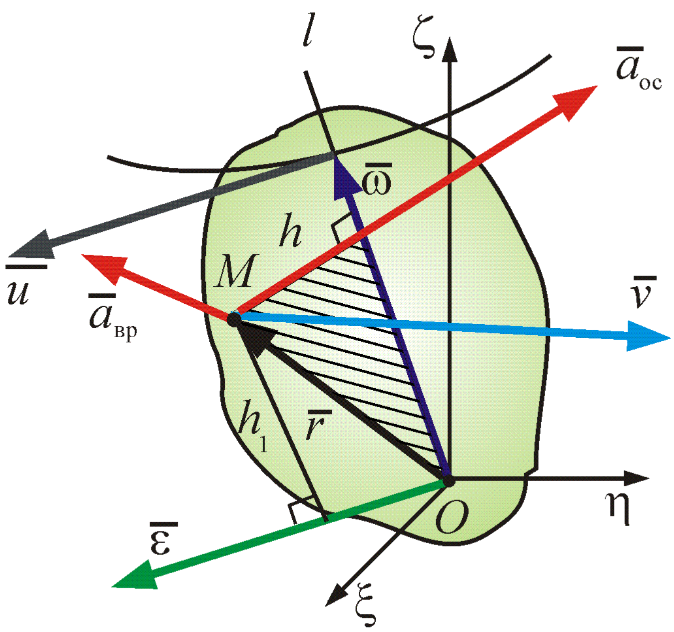


Рис. 3.3.2

В этой формуле $\bar{\varepsilon} = \dfrac{d\bar{\omega}}{dt}$ угловое ускорение тела. По величине и направлению этот вектор совпадает со скоростью конца вектора $\bar{\omega}$ и направлен он по касательной к годографу вектора $\bar{\omega}$.

$\overline{\varepsilon} \times \overline{r} = \overline{a}_M^{\text{вр}}$ – вращательное ускорение точки *М*. Направлено оно перпендикулярно плоскости, проходящей через точку *М* и вектор углового ускорения. Модуль его равен $a_M^{\text{вр}} = \varepsilon h_1$, где h_1 – кратчайшее расстояние от М до $\overline{\varepsilon}$ (рис. 3.3.2).

$\overline{\omega} \times \overline{v} = \overline{a}_M^{\text{ос}}$ – осестремительное ускорение. $a_M^{\text{ос}} = \omega v \sin\frac{\pi}{2}$, $\overline{a}_M^{\text{ос}} \perp \left(\overline{\omega}, \overline{v}\right)$ т.е. направлено по h.

Ускорение точки тела при сферическом движении равно сумме вращательного и осестремительного ускорений.

4. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТЕЛА

Изученные движения твердого тела (поступательное, вращательное около неподвижной оси, вращательное около неподвижной точки) следовало бы назвать движениями несвободного тела, так как в каждом из этих движений накладывались те или иные ограничения на положение тела в пространстве.

Рассмотрим теперь движение в пространстве свободного тела, на положение которого в этом пространстве не накладываются какие-либо ограничения.

4.1. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ СВОБОДНОГО ТЕЛА

Положение свободного тела γ в пространстве $O\xi\eta\varsigma$ определяется заданием шести обобщенных координат, которым соответствует шесть степеней свободы тела (рис. 4.1.1).

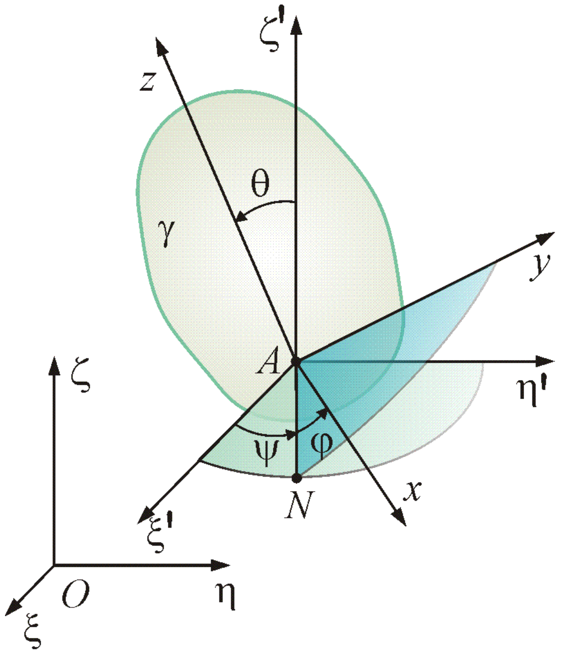


Рис. 4.1.1

За обобщенные координаты свободного тела примем координаты $\xi_A, \eta_A, \varsigma_A$ некоторой его точки A и три угла Эйлера ψ, θ, φ подвижных осей $Axyz$ жестко связанных с телом. Эти углы показаны в пространстве $A\xi'\eta'\varsigma'$, движущемся поступательно в пространстве $O\xi\eta\varsigma$.

Точку $A \in \gamma$, координаты которой включены в набор обобщенных координат тела, назовем его полюсом.

Названные шесть величия можно принять за обобщенные координаты свободного тела, так как заданием их определяется положение тела в пространстве $O\xi\eta\varsigma$ и они независимы между собой: можно изменять любую из них, оставляя неизменными остальные.

Зависимости от времени обобщенных координат свободного тела:

$$\xi_A = \xi(t); \eta_A = \eta(t); \varsigma_A = \varsigma(t); \ \psi = \psi(t); \theta = \theta(t); \varphi = \varphi(t)$$

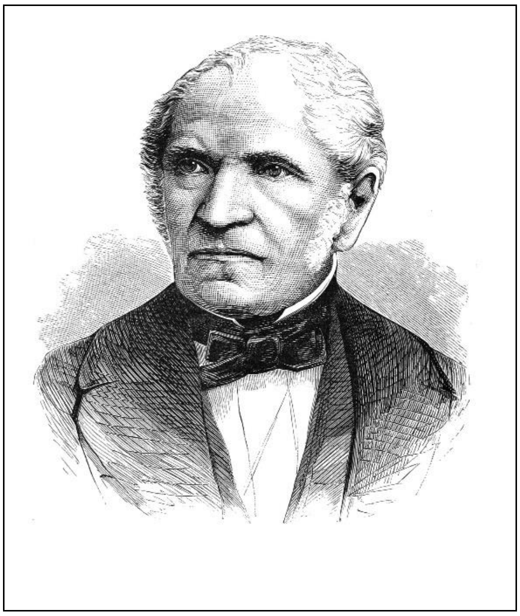
являются уравнениями его движения.

Парциальными движениями свободного тела, соответствующими изменению каждой из шести обобщенных координат, будут три поступательных, движения тела вдоль координатных осей $O\xi, O\eta, O\varsigma$ и три вращательных около осей $O\varsigma, ON$ и Oz. Эти вращения называются прецессией, нутацией и собственным вращением тела. Изменению только углов Эйлера, соответствует сферическое движение тела около его полюса A.

Последовательностью шести названных парциальных движений свободного тела его можно переместить из занимаемого положения в любое другое. При этом последовательностью трех поступательных парциальных движений тела его полюс A переводится в положение A_1, которое он займет в момент времени $t + \Delta t$. Последовательностью же трех других парциальных движений осуществляется его сферическое движение около полюса A.

Заменяя последовательность трех поступательных парциальных движений тела одним поступательным, получим следующее утверждение относительно конечного движения свободного тела.

Теорема Шаля. *Любое перемещение свободного тела можно осуществить последовательностью поступательного и сферического движений.*



Мише́ль Шаль (фр. *Michel Chasles*; 1793 – 1880, Париж) — французский математик (геометр) и историк математики, признанный лидер французской геометрической школы середины XIX века. Член Парижской Академии наук, иностранный член многих других Академий наук, в том числе Петербургской.

4.2. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК СВОБОДНОГО ТЕЛА

Для нахождения скорости $\overline{v}_B$ произвольной точки B свободного тела воспользуемся теоремой о скоростях точек МО: скорость любой точки свободного тела равна сумме ее скоростей в каждом из шести парциальных движений тела:

$$\overline{v}_B = \sum_{j}^{6} \left(\overline{v}_B \right)_j . \tag{4.2.1}$$

Скорость точки B в трех поступательных парциальных движениях тела равны:

$$\left(\overline{v}_B \right)_1 = \overline{v}_{A\xi}; \ \left(\overline{v}_B \right)_2 = \overline{v}_{A\eta}; \ \left(\overline{V}_B \right)_3 = \overline{v}_{A\zeta} . \tag{4.2.2}$$

Скорости точки М в трех вращательных парциальных движениях тела найдем, применяя формулу Эйлера,

$$\left(\overline{v}_B \right)_4 = \overline{\omega}_1 \times \overline{\rho}, \ \left(\overline{v}_B \right)_5 = \overline{\omega}_2 \times \overline{\rho}, \ \left(\overline{v}_B \right)_6 = \overline{\omega}_3 \times \overline{\rho}. \tag{4.2.3}$$

Здесь $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$ - угловые скорости прецессии**,** нутации и собственного вращения тела; $\overline{\rho} = A\overline{B}$ – радиус-вектор точки B относительно полюса A тела.

Подставляя теперь в равенство (4.2.1) значения $\left\{ \overline{v}_B \right\}_j$ из равенств (4.2.2) и (4.2.3), получим

$$\overline{v}_B = \overline{v}_{A\xi} + \overline{v}_{A\eta} + \overline{v}_{A\zeta} + \overline{\omega}_1 \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_2 \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_3 \times \overline{\rho}. \tag{4.2.4}$$

Сумма первых трех слагаемых равна скорости полюса A:

$$\overline{v}_A = \overline{v}_{A\xi} + \overline{v}_{A\eta} + \overline{v}_{A\zeta} . \tag{4.2.5}$$

Складывая три остальных слагаемые, получим

$$\overline{\omega}_1 \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_2 \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_3 \times \overline{\rho} = \overline{\omega} \times \overline{\rho}.$$

где вектор

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 \tag{4.2.6}$$

представляет собой угловую скорость тела в его сферическом движении около полюса A.

Таким образом, для скорости $\overline{v}_B$ получается формула

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{\rho} \; . \qquad (4.2.7)$$

Вектор $\overline{\omega} \times \overline{\rho}$ есть скорость точки B в сферическом движении тела около полюса A

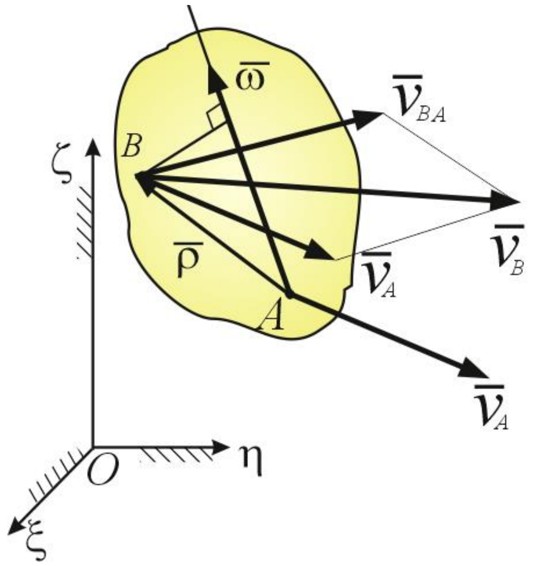


Рис. 4.2.1

$$\overline{\omega} \times \overline{\rho} = \overline{v}_{BA}.$$

Тем самым, равенство (5.7) можно представить в виде

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}; \quad \overline{v}_{BA} = \overline{\omega} \times \overline{\rho} \; .$$

Теорема. *Скорость любой точки свободного тела равна скорости его полюса, сложенной со скоростью этой точки в сферическом движении тела около полюса* (рис. 4.2.1).

Ускорение $\overline{a}_B$ произвольной точки B свободного тела найдем дифференцированием по времени равенства (4.7):

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{\rho} \right),$$

где $\overline{\rho} = \overline{AB}$.

Докажем, что угловая скорость свободного тела одинакова для любого полюса.

Пусть $\overline{\omega}$ – угловая скорость тела в сферическом движении тела около полюса A, а $\overline{\omega}_1$ – около полюса A_1.

Когда полюсом тела является точка A, то для скорости $\overline{v}_B$ произвольной точки тела имеем

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB}.$$

Если же за полюс принята точка A_1, то для $\overline{v}_B$ получим

$$\overline{v}_B = \overline{v}_{A1} + \overline{\omega} \times \overline{A_1 B}.$$

К тому же имеет место равенство

$$\overline{v}_A = \overline{v}_{A1} + \overline{\omega} \times \overline{AA_1}.$$

Из этих трех равенств находим, что

$$\left(\overline{\omega}-\overline{\omega}_1\right)\times\overline{A_1B}=0.$$

Отсюда же, так как $\overline{A_1B}$ – произвольный вектор, получается утверждение об инвариантности угловой скорости тела относительно выбора полюса:

$$\overline{\omega}_1=\overline{\omega}.$$

Вследствие этого вектор $\overline{\omega}$, названный угловой скоростью тела в его сферическом движении около полюса A, следует называть просто угловой скоростью тела, без указания полюса.

4.3. ПРОИЗВОДНАЯ ОТ ВЕКТОРА ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЫ

Радиус-вектор постоянной длины можно рассматривать как отрезок твёрдого тела γ, соединяющий две точки A и B этого тела (рис. 4.3.1).

$$\overline{\rho}=\overline{AB}=\overline{r}_B-\overline{r}_A.$$

Получаем:

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt}=\frac{d\overline{AB}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\overline{r}_B-\overline{r}_A\right)=\overline{v}_B-\overline{v}_A=\overline{\omega}\times\overline{\rho}\,.$$

Поэтому можно утверждать что

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt}=\overline{\omega}\times\overline{\rho} \qquad (4.3.1)$$

Производная от вектора постоянной длины равна векторному произведению угловой скорости на вектор.

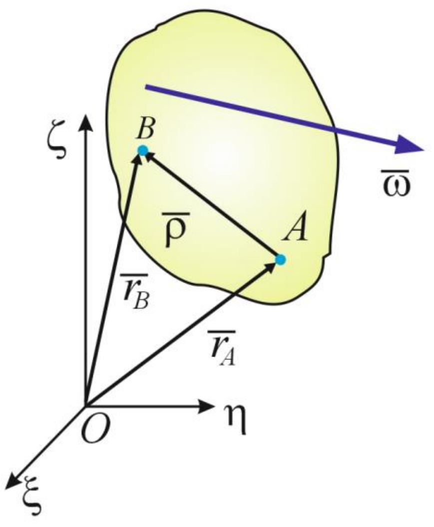


Fig. 4.3.1

4.4. ФОРМУЛЫ ПУАССОНА

Воспользуемся формулой (4.3.1) для нахождений производных ортов $\overline{i}\,,\overline{j}\,,\overline{k}$ подвижных осей Ax, Ay, Az, жестко связанных с телом (рис. 4.4.1).

Только теперь вектор $\overline{\omega}$ будем рассматривать как угловую скорость пространства $Axyz$ в пространстве $O\xi\eta\varsigma$.

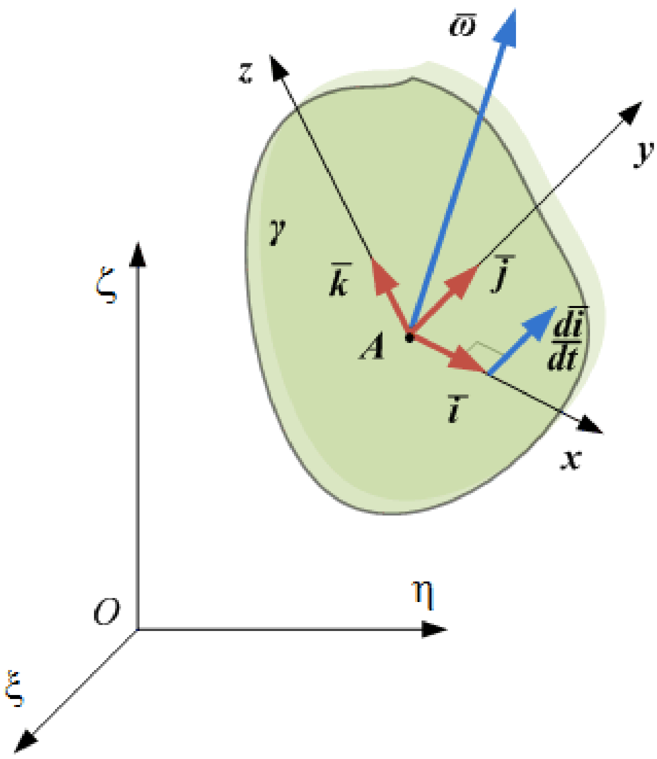


Рис. 4.4.1

Siméon Denis Poisson (1781–1840) французский математик и физик.

Подставляя в уравнение 4.3.1 вместо $\overline{\rho}$ вектор $\overline{i}$, получим первую из формул *Пуассона*

$$\frac{d\overline{i}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{i}\,.$$

Аналогично получаются две другие:

$$\frac{d\overline{j}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{j}\,, \quad \frac{d\overline{k}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{k}\,.$$

Здесь $\overline{\omega}$ – угловая скорость подвижного пространства в неподвижном.

4.5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТЕЛА

Вектор угловой скорости перпендикулярен скорости полюса

Можно доказать, что существует прямая l, скорости всех точек которой равны нулю. Эта прямая будет мгновенной осью вращения тела (рис. 4.5).

В самом деле, $\forall B \Rightarrow \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}$.

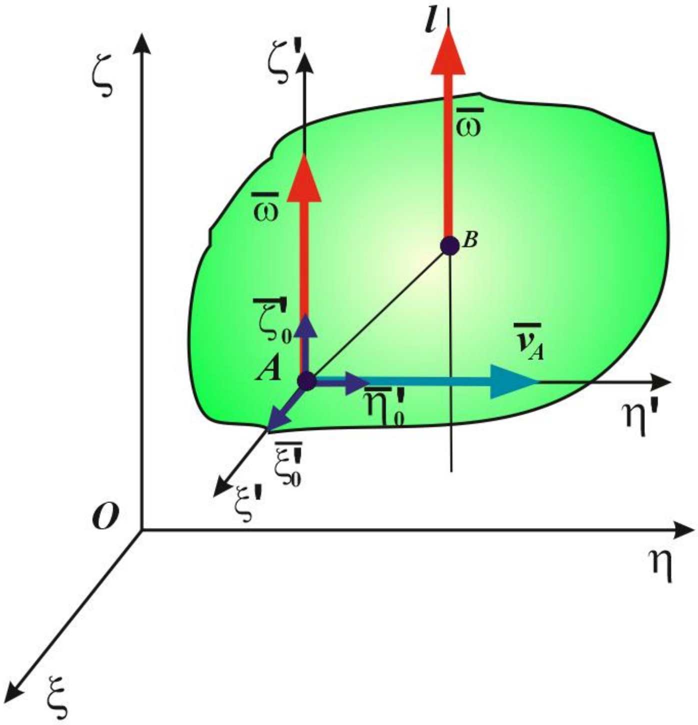


Рис. 4.5.1

В пространстве $A\xi'\eta'\zeta'$ $\bar{\omega}$ имеет координаты $(0, 0, \tilde{\omega})$, $\bar{v}_A = v_A \bar{\eta}'_0$ и координаты точки $B \in l$ $(\xi'_B, \eta'_B, \zeta'_B)$.

Если $\bar{v}_B = 0$, то

$$\bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB} = v_A \bar{\eta}'_0 + \begin{vmatrix} \bar{\xi}'_0 & \bar{\eta}'_0 & \bar{\zeta}'_0 \\ 0 & 0 & \tilde{\omega} \\ \xi'_B & \eta'_B & \zeta'_B \end{vmatrix} = v_A \bar{\eta}'_0 + \bar{\xi}'_0 \tilde{\omega} \eta'_B + \bar{\eta}'_0 \tilde{\omega} \xi'_B = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\omega}\eta' = 0, \; -v_A = \tilde{\omega}\xi' .$$

Т.е. геометрическое место точек B – прямая, параллельная оси $A\zeta'$ и отстоящая от неё в плоскости $\xi' A \zeta'$ на расстоянии $h = \dfrac{v_A}{\omega}$.

Вектор угловой скорости параллелен скорости полюса

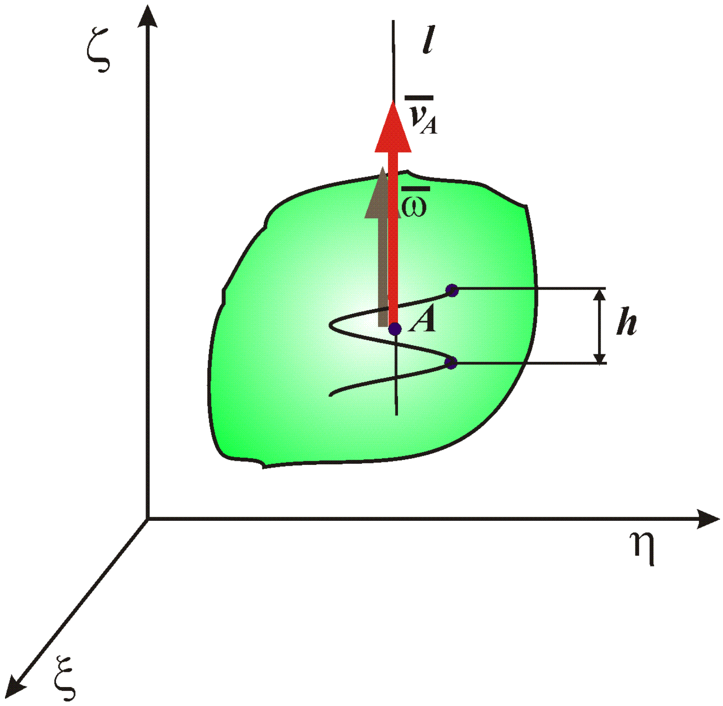


Рис. 4.5.2

Такое движение тела, при котором скорость полюса параллельна угловой скорости тела, называется *винтовым* (рис. 4.6). Любая точка тела, не лежащая на оси вращения будет описывать винтовую линию.

Ось l будет осью винта.

Величина $p = \dfrac{v_A}{\omega}$ называется параметром винта.

Если $\bar{v}_A \uparrow\uparrow \bar{\omega}$ то имеем правый винт, если же $\bar{v}_A \uparrow\downarrow \bar{\omega}$ то левый винт.

Величина

$$h = \frac{2\pi v_A}{\omega} = 2\pi p$$

называется шаг винта.

Представление мгновенного движения свободного тела

Пусть угловая скорость составляет некоторый угол со скоростью полюса.

Разложим скорость полюса на две составляющие, одна из которых параллельна скорости полюса, а другая ей перпендикулярна (рис. 5.6).

$$v'_A = v_A \cos\alpha, \quad v''_A = v_A \sin\alpha, \quad \bar{v}'_A \parallel \bar{\omega}, \ \bar{v}''_A \perp \bar{\omega}$$

Проведем ось l_B в плоскости, проходящей через точку $A \perp \bar{v}''_A$. Пусть

$l_B \parallel \bar{\omega}$ и отстоит от l_A на расстоянии $h = \dfrac{v_A}{\omega}$ так что $\bar{\omega} \times \overline{AB} = -\bar{v}''_A$.

$$\forall B \in l_B \Rightarrow \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB} = \bar{v}'_A + \bar{v}''_A + \bar{\omega} \times \overline{AB} = \bar{v}'_A.$$

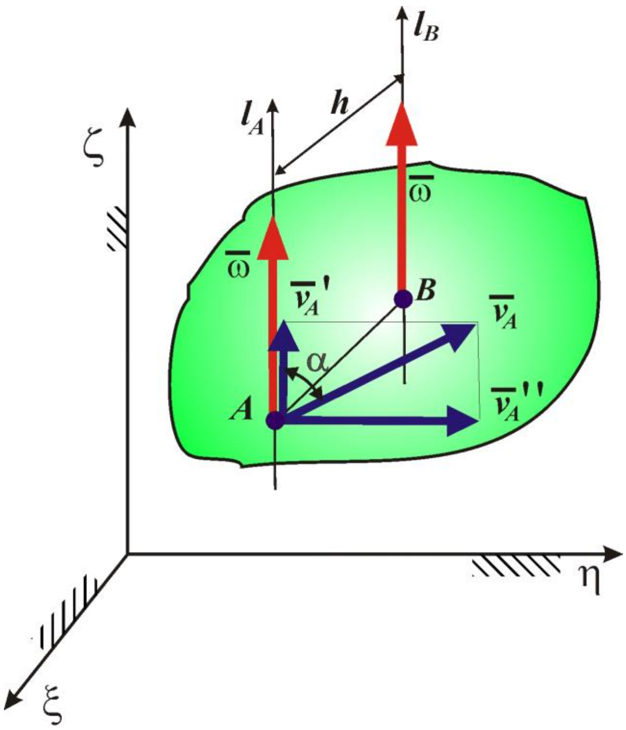


Рис. 4.5.3

Таким образом, взяв за полюс любую точку на оси l_B получаем что скорость полюса параллельна угловой скорости тела:

$$\overline{v}_B = \overline{v}'_A \parallel \overline{\omega}.$$

Из этого равенства следует: поле скоростей точек свободного тела в рассматриваемый момент времени является винтовым.

Теорема. *Движение свободного тела в каждый момент времени является винтовым.*

5. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1. КООРДИНАТЫ И УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела в пространстве $Oxyz$ называется ***плоским (плоскопараллельным)****, если все его точки движутся в параллельных плоскостях*. Любая из них, например плоскость π (рис.5.1), называется направляющей плоскостью или плоскостью движения тела.

Плоское движение тела наиболее распространено в технике: звенья большей части механизмов и машин совершают плоское движение.

Пусть Π (xOy) (рис.5.1.1) направляющая плоскость. Для любой точки A тела скорость параллельна направляющей плоскости.

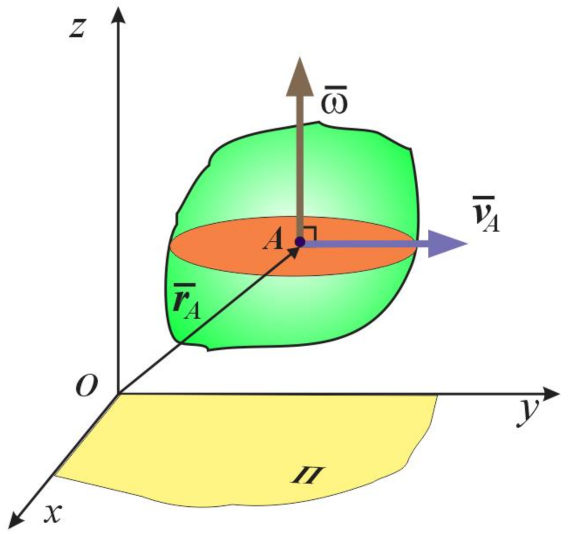


Рис. 5.1.1

$$\forall A \Rightarrow \overline{v}_A || \Pi, \overline{v}_A \perp Oz.$$

Скорость другой произвольной точки B, может быть найдена по формуле:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB}.$$

Т.к. $\overline{v}_B$ также параллельна Π, то проецируя это уравнение на ось Oz получим,

$$0 = 0 + \left(\overline{\omega} \times \overline{AB}\right)_z \Rightarrow \left(\overline{\omega} \times \overline{AB}\right)_z = 0.$$

В свою очередь

$$\left(\overline{\omega} \times \overline{AB}\right)_z = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ AB_x & AB_y & AB_z \end{vmatrix} \right) = \omega_x AB_y - \omega_y AB_x = 0.$$

Поскольку точки A et B выбраны произвольно, последнее выражение выполняется только при $\omega_x = 0$ et $\omega_y = 0$, или $\bar{\omega} \| Oz$. Следовательно $\bar{\omega} \perp \bar{v}_A$ для любой точки A.

Расстояния точек тела в плоском движении до направляющей плоскости остаётся неизменными.

$$AA' = \text{const}.$$

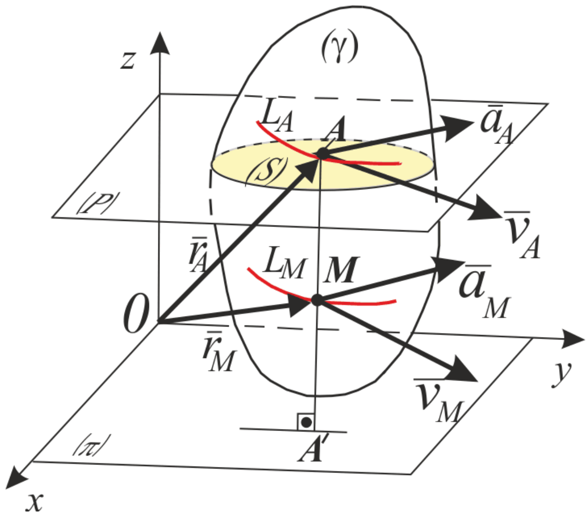


Рис. 5.1.2

Лемма. Точки тела, расположенные на одном перпендикуляре к направляющей плоскости, движутся одинаково; их траектории – конгруэнтные кривые, скорости и ускорения одинаковы в каждый момент времени.

$$L_A = L_M,\ \bar{v}_A = \bar{v}_M,\ \bar{a}_A = \bar{a}_M$$

Доказательство. Пусть A и M – две такие точки тела.

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AM}.$$

$$\overline{AM} \| \bar{\omega} \Rightarrow \overline{AM} \times \bar{\omega} = 0 \Rightarrow \bar{v}_M = \bar{v}_A.$$

Дифференцируя находим:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A.$$

В равенстве

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \overline{AM}, \tag{5.1.1}$$

которым связаны их радиус-векторы, вектор $\overline{AM}$ постоянен

$$\overline{AM} = \text{const}. \tag{5.1.2}$$

Так как траекторией точки служит годограф ее радиус-вектора, то из равенства (5.1) при условии (5.2) следует, что траектория L_M точки M может быть получена сдвигом на вектор $\overline{AM}$ траектории L_A точки A.

$$L_M \approx L_A.$$

Дифференцированием этого же равенства находим:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A, \quad \bar{a}_M = \bar{a}_A.$$

Плоская фигура S сечения тела γ плоскостью P, параллельной направляющей плоскости, движется все время в этой плоскости (P).

Поэтому, при изучении плоского движения твердого тела достаточно исследовать движение плоской фигуры S в ее плоскости P.

За координаты фигуры S примем координаты x_A, y_A какой-либо точки $A \in S$ и угол φ отрезка $\overrightarrow{AB} \in S$, например, с осью Ox (рис. 5.3). Точку A назовем **полюсом** фигуры, а угол φ – **углом поворота** фигуры около полюса.

Зависимости координат x_A, y_A, φ фигуры S а значит и тела γ от времени t (3.1) будут **уравнениями плоского движения** в плоскости P.

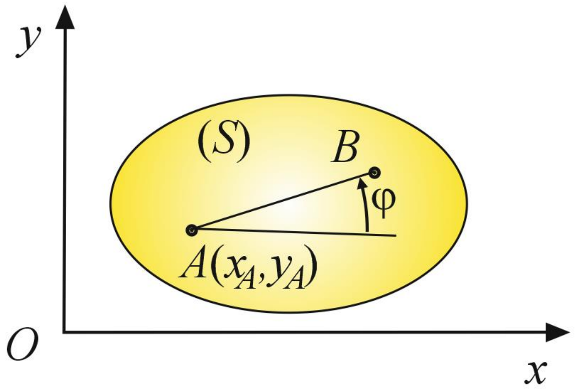


Рис. 5.1.3

$$\begin{cases} x_A = x(t), \\ y_A = y(t), \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases} \qquad (5.1.3)$$

Парциальными движениями фигуры на плоскости Oxy являются:

1) x_A — поступательное вдоль оси x;

2) y_A — поступательное вдоль оси y;

3) φ — вращательное вокруг оси, $\perp$ S, проходящей через полюс A.

Если два первых поступательных движения заменить одним поступательным, то любое перемещение фигуры можно осуществить последовательностью ее поступательного и вращательного движений. Поступательная часть движения фигуры при перемещении ее из одного положения в другое зависит от выбора полюса, а вращательная часть — не зависит, т.е. одинакова для любого полюса. За положительное направление вращения плоской фигуры примем направление против часовой стрелки.

Угловая скорость $\tilde{\omega}$ фигуры определяется отношением

$$\overline{\omega} = \overline{k}\,\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (5.1.4)$$

где $\overline{k}$ – единичный вектор, направленный перпендикулярно плоской фигуре на наблюдателя (рис. 5.1.4). Вектор $\overline{\omega}$ направлен перпендикулярно плоскости фигуры в ту сторону, откуда поворот фигуры на угол $d\varphi$ виден против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение $\overline{\varepsilon}$ фигуры определяется производной угловой скорости $\overline{\omega}$ по времени:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\,\overline{\omega}}{d\,t}. \qquad (5.1.5)$$

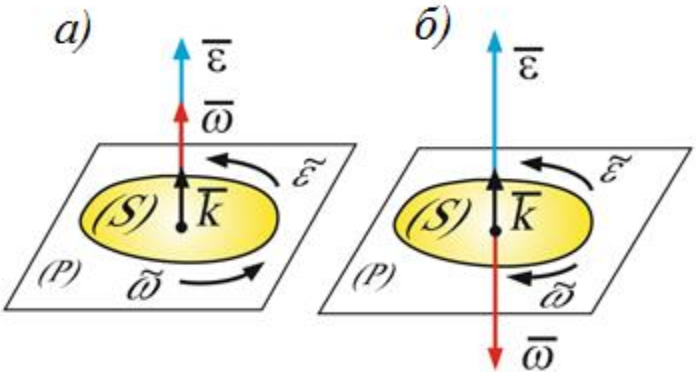


Рис. 5.1.4

При ускоренном вращении фигуры направление векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ одинаково $\overline{\omega}\uparrow\uparrow\overline{\varepsilon}$ (рис. 5.1.4,а), при замедленном – противоположно $\overline{\omega}\downarrow\uparrow\overline{\varepsilon}$ (рис. 5.1.4,б).

Проекции $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\varepsilon}$ векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ на перпендикуляр к плоскости фигуры, направленный одинаково с вектором $\overline{k}$, называются *алгебраическими угловой скоростью и угловым ускорением* фигуры. На рис.5.1.4 алгебраические угловые скорость и ускорение показаны изогнутыми стрелками.

5.2. СКОРОСТИ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Скорость произвольной точки плоской фигуры может быть получена по формуле

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}. \qquad (5.2.1)$$

$\omega \times \overline{AB}$ скорость точки B в её вращательном движении вокруг точки A. Можем записать

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Где

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_{BA} \perp_{\circlearrowright \tilde{\omega}} \overline{AB}, \\ v_{BA} = AB\omega, \end{cases}$$

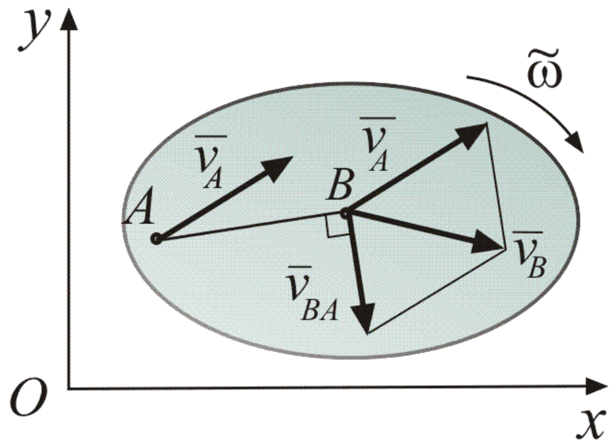


Рис. 5.2.1

ω – угловая скорость плоской фигуры.

Тем самым доказана следующая **теорема**:

Скорость произвольной точки фигуры равна скорости ее полюса, сложенной со скоростью этой точки в круговом движении около полюса (рис. 5.2.1):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \ \forall B \in S,$$

где $\bar{v}_{BA}$ скорость точки B в круговом движении около полюса A:

$$v_{BA} = AB\omega, \quad \bar{v}_{BA} \perp_{\circlearrowright \tilde{\omega}} \overline{AB},$$

где ω – модуль угловой скорости фигуры.

В задаче скоростей за полюс следует принимать ту точку фигуры, скорость которой известна или достаточно просто находится. Модуль скорости $\bar{v}_B$ найдется из параллелограмма скоростей (рис 5.2.1)

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 - 2v_A v_{BA} \cos\left(\bar{v}_A, \bar{v}_{BA}\right)},$$

или из треугольника скоростей (рис. 5.2.2)

$$\frac{v_B}{\sin\left(\bar{v}_A,\bar{v}_{BA}\right)}=\frac{v_A}{\sin\left(\bar{v}_B,\bar{v}_{BA}\right)}=\frac{v_{BA}}{\sin\left(\bar{v}_A,\bar{v}_B\right)},$$

или из равенства

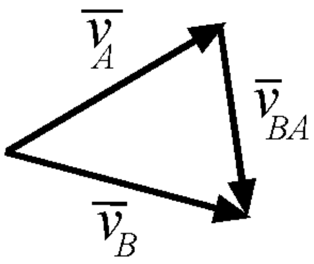


Рис. 5.2.2

$$\bar{v}_B=\bar{v}_A+\bar{v}_{BA}.$$

Здесь проекции вектора скорости $\bar{v}_B$ на оси Ox и Oy составляют:

$$Ox \Rightarrow v_{Bx}=v_A\cos\left(\bar{v}_A,Ox\right)+v_{BA}\cos\left(\bar{v}_{BA},Ox\right);$$

$$Oy \Rightarrow v_{By}=v_A\cos\left(\bar{v}_A,Oy\right)+v_{BA}\cos\left(\bar{v}_{BA},Oy\right).$$

Направляющие косинусы вектора $\bar{v}_B$ запишутся:

$$\cos\left(\bar{v}_B,Ox\right)=\frac{v_{Bx}}{v_B},\ \cos\left(\bar{v}_B,Oy\right)=\frac{v_{By}}{v_B}.$$

Модуль угловой скорости фигуры находится по формуле

$$\omega=\frac{v_{BA}}{AB}.$$

Модуль угловой скорости фигуры равен модулю скорости какой-либо ее точки в круговом движении вокруг полюса, деленному на расстояние от этой точки до полюса.

Алгебраическая угловая скорость $\tilde{\omega}$ фигуры определяется по направлению скорости $\bar{v}_{BA}$.

5.3. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ФИГУРЫ

В каждый момент времени на плоскости движущейся фигуры имеется точка, скорость которой равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей ее точек или МЦС фигуры.

Мгновенный центр скоростей представляет собой точку пересечения плоской фигуры с мгновенной осью вращения тела, совершающего плоское движение.

Пусть P – МЦС. Для произвольной точки фигуры B получаем (рис. 5.3.1):

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \overline{PB} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_B \perp_{\circlearrowleft \tilde{\omega}} \overline{PB} \\ v_B = BP\,\omega \end{cases} \quad \forall B \in S\,.$$

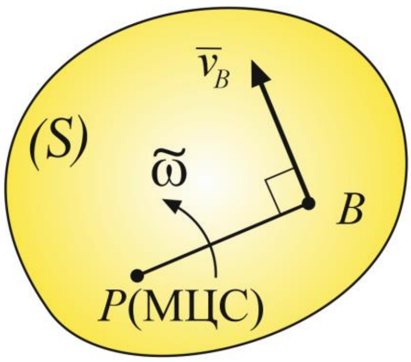


Рис. 5.3.1

Скорость произвольной точки фигуры равна её скорости во вращательном движении фигуры около мгновенного центра скоростей (МЦС).

Движение фигуры в каждый момент времени является мгновенно-вращательным около оси, проходящей через МЦС перпендикулярно плоскости фигуры.

Если допустить, что в момент времени t на фигуре имеется две точки P_1 и P_2 с нулевыми скоростями, то обнаружим, что нулю в этот момент равны скорости всех точек движущейся фигуры. Этим противоречием устанавливается единственность МЦС движущейся фигуры.

В доказательстве существования МЦС фигуры важно использовать отличие от нуля ее угловой скорости в рассматриваемый момент времени. Если же угловая скорость фигуры равна нулю, то скорости всех ее точек одинаковы. Движение фигуры оказывается мгновенно-поступательным, в котором МЦС не существует. Но чтобы распространить теорему о существовании МЦС и на мгновенно-поступательное движение фигуры, договоримся МЦС поступательно движущейся фигуры считать находящимся в бесконечности.

Модуль угловой скорости фигуры равен модулю скорости какой-либо ее точки, деленному на расстоянии от этой точки до МЦС.

$$\omega = \frac{v_B}{BP}\,.$$

Алгебраическая угловая скорость $\tilde{\omega}$ фигуры определяется по направлению скорости $\bar{v}_B$

Два правила нахождения МЦС фигуры:

1) *Известны скорость* $\bar{v}_B$ *точки* B *и алгебраическая угловая скорость* $\tilde{\omega}$ *фигуры*. МЦС находится на расстоянии $BP = \dfrac{v_B}{\omega}$ от точки B на перпендикуляре к скорости $\bar{v}_B$ этой точки, отклоненном от ее скорости на прямой угол в сторону вращения фигуры (рис. 5.3.1);

2) *Известны скорости* $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ *двух точек* A *и* B. МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров к скоростям двух точек фигуры (рис. 5.3.2*а*).

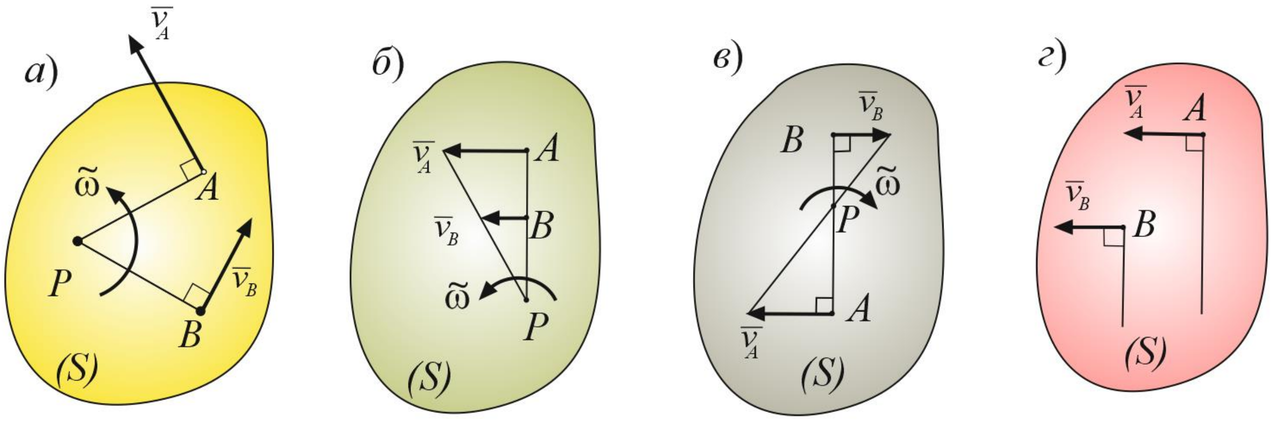


Рис. 5.3.2

В случаях, когда перпендикуляры к скорости совпадают, нахождение МЦС фигуры показано на рис. 5.3.2*б, в*. Если же они параллельны (рис. 5.3.2*г*) – пересекаются в бесконечно удаленной точке, МЦС фигуры устремляется в бесконечность и ее движение является мгновенно-поступательным (угловая скорость $\tilde{\omega} = 0$). Его можно рассматривать как мгновенно-вращательное около МЦС, находящегося в бесконечности.

Иногда сразу можно назвать точку фигуры, скорость которой равна нулю. Например, при качении без скольжения фигуры по неподвижной кривой ее МЦС находится в точке контакта (соприкосновения) фигуры с кривой (рис. 5.3.3).

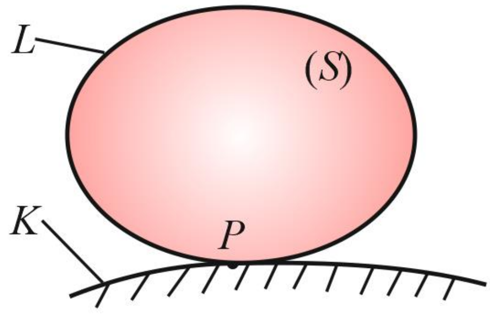


Рис. 5.3.3

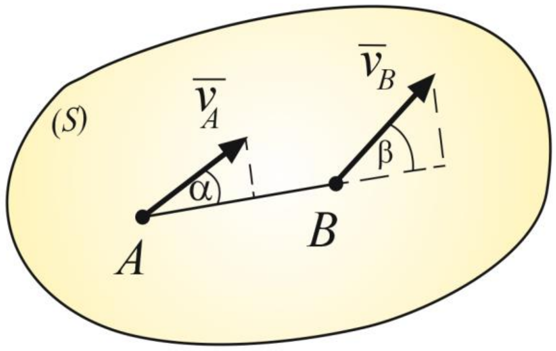


Рис. 5.3.4

Замечание

Если известно направление скорости $\overline{v}_B$ точки B фигуры, то ее модуль просто находится применением леммы о проекциях скоростей двух точек твердого тела на отрезок, соединяющий их

$$\left(\overline{v}_B\right)_{AB} = \left(\overline{v}_A\right)_{AB} \Rightarrow v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha,$$

где $\overline{v}_A$ – известная скорость точки A фигуры (рис. 5.3.4).

5.4. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР ВРАЩЕНИЯ. ЦЕНТРОИДЫ

Скорости точек сечения тела при плоском движении распределены в каждый момент времени так, как если бы движение плоской фигуры тела представляло собой вращение вокруг МЦС. Поэтому МЦС называют *мгновенным центром вращения.* Ось, вокруг которой в данный момент времени происходит вращение тела, перпендикулярную к его сечению и проходящую через МЦС – точку P, называют *мгновенной осью вращения.*

Мгновенный центр вращения при плоском движении тела меняет свое положение как на неподвижной плоскости, в которой движется фигура, так и на связанной с ней подвижной.

Геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости называют *неподвижной центроидой,* а геометрическое место этих же центров на подвижной плоскости, связанной с движущейся фигурой, – *подвижной центроидой.*

Например, при качении диска по плоской кривой без скольжения (рис. 5.3.3) неподвижной центроидой является кривая *К,* по которой катится диск, а подвижной – окружность *L* диска. В каждый момент времени подвижная и неподвижная центроиды имеют общую точку касания *Р,* скорость которой равна нулю. Эта точка является мгновенным центром скоростей диска. Таким образом, *при действительном движении плоской фигуры подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной.*

5.5. УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Для того чтобы: найти ускорение произвольной точки фигуры, продифференцируем по времени равенство (5.6) Тогда, получим

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA} \,. \qquad (5.5.1)$$

Векторные произведения в этом равенстве совпадают с теми, которыми определяются нормальное и касательное ускорения точки тела, вращающегося около неподвижной оси. Поэтому их следует интерпретировать как нормальное и касательное ускорения точки B в круговом ее движении около полюса A:

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_{BA} = \bar{a}^n_{BA}, \;\; \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} = \bar{a}^\tau_{BA} \,.$$

При этом равенство (5.5.1) примет вид,

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA} \,. \qquad (5.5.2)$$

Заменяя здесь два последних слагаемых ускорением $\bar{a}_{BA}$ точки B в круговом движении около, полюса A

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA} \,,$$

получим

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} \,. \qquad (5.5.4)$$

Ускорение произвольной точки фигуры равно ускорению полюса фигуры, сложенному с ускорением этой точки в круговом ее движении около полюса (рис. 5.5.1).

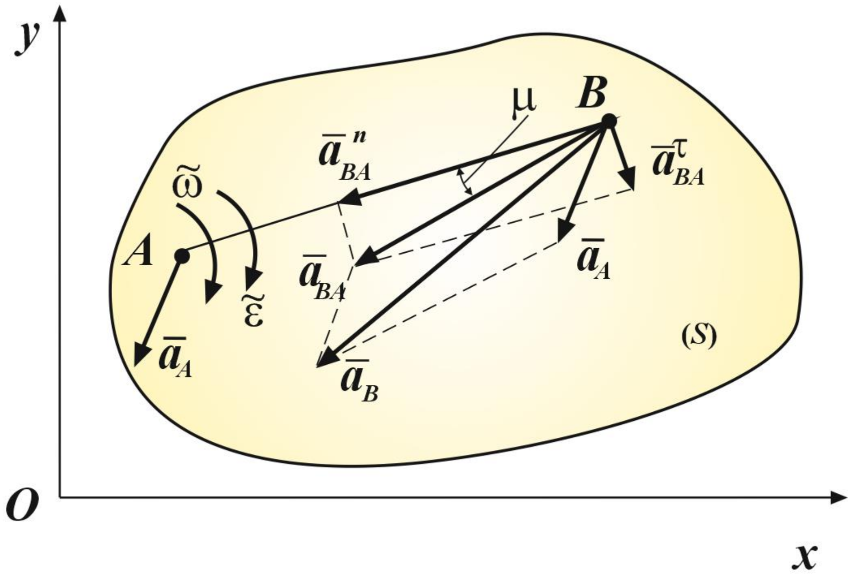


Рис. 5.5.1

За полюс фигуры в задаче нахождения ускорений точек фигуры может быть принята любая ее точка, ускорение которой известно. Поэтому равенство (5.5.4) надо рассматривать как формулу, которой связаны ускорения двух точек фигуры.

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} \quad \forall B \in S .$$

где $\overline{a}_{BA}^{n} = \overline{\omega} \times \overline{v}_{BA} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a}_{BA}^{n} \| \overline{AB} ; \\ a_{BA}^{n} = AB\omega^2 ; \end{cases} \quad \overline{a}_{BA}^{\tau} = \overline{\varepsilon} \times \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a}_{BA}^{\tau} \perp_{\circlearrowleft \tilde{\varepsilon}} \overline{AB} ; \\ a_{BA}^{\tau} = AB\varepsilon . \end{cases}$ (5.5.5)

$\overline{\omega}, \overline{\varepsilon}$ – угловые скорость и ускорение фигуры.

Модуль ускорения

$$a_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

Ускорение точки B в круговом движении около A отклонено на угол μ от вектора $\overline{AB}$ в сторону углового ускорения фигуры (рис. 5.5.1).

Тангенс угля μ, одинакового для всех точек фигуры,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} .$$

Модуль вектора $\overline{a}_{BA}^{n}$ определяется через ω или $\overline{v}_{BA}$. Каждая из этих величин находится при определении скоростей точек фигуры.

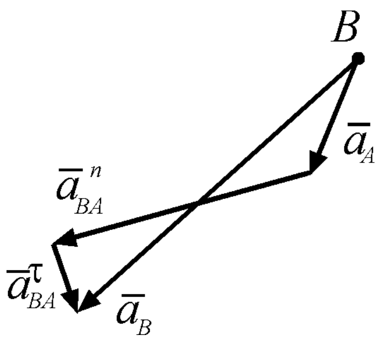


Рис.5.5.2

Следовательно, решение задачи скоростей точек фигуры должно предшествовать решению задачи ускорений: прежде чем находить ускорения точек, надо найти их скорости.

За полюс фигуры в задаче ускорений следует принимать ту точку на ней, ускорение которой известно или находится просто.

При графическом решении уравнения (5.5.2) ускорение точки B найдется как замыкающая сторона векторного многоугольника (рис.5.5.2).

При аналитическом решении находятся сначала проекции ускорения $\overline{a}_B$ на оси Ox, Oy (рис. 5.11):

$$\begin{aligned} &Ox \Rightarrow a_{Bx} = a_A \cos\left(\overline{a}_A, Ox\right) + a_{BA}^{n} \cos\left(\overline{a}_{BA}^{n}, Ox\right) + a_{BA}^{\tau} \cos\left(\overline{a}_{BA}^{\tau}, Ox\right); \\ &Oy \Rightarrow a_{By} = a_A \cos\left(\overline{a}_A, Oy\right) + a_{BA}^{n} \cos\left(\overline{a}_{BA}^{n}, Oy\right) + a_{BA}^{\tau} \cos\left(\overline{a}_{BA}^{\tau}, Oy\right). \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

Модуль и направление вектора $\overline{a}_B$ определяется из равенств:

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}; \; \cos\left(\overline{a}_B, Ox\right) = \frac{a_{Bx}}{a_B}; \; \cos\left(\overline{a}_B, Oy\right) = \frac{a_{By}}{a_B}. \tag{5.5.7}$$

Модуль углового ускорения фигуры равен модулю касательного ускорения какой-либо ее точки в круговом движении вокруг полюса, деленному на расстояние от этой точки до полюса

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB}. \tag{5.5.8}$$

Алгебраическое угловое ускорение $\tilde{\varepsilon}$ фигуры определяется по направлению ее касательного ускорения $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ в круговом движении вокруг полюса A.

5.6. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

Теорема. *При непоступательном движении плоской фигуры на фигуре или связанной с ней плоскости в каждый момент времени существует точка, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений (МЦУ).*

Доказательство. Пусть известны ускорение полюса A, а также угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры (рис. 5.6.1).

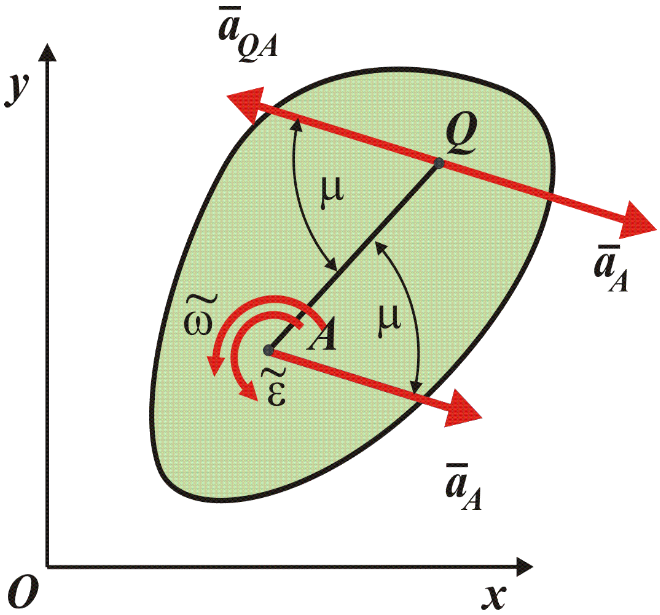


Рис. 5.6.1

Проведем прямую под углом μ к вектору $\bar{a}_A$ так, что

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

где угол μ откладывается в сторону углового ускорения, отложим отрезок

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Найдем ускорение точки Q.

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA}.$$

Модуль ускорения

$$a_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A.$$

Направлено оно под углом μ к AQ, следовательно,

$$\bar{a}_{QA} \parallel \bar{a}_A \Rightarrow \bar{a}_{QA} = -\bar{a}_A \Rightarrow \bar{a}_Q = 0.$$

Ускорение произвольной точки фигуры может быть найдено как ускорение во вращательном движении фигуры около мгновенного центра ускорений

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{BQ} \Rightarrow \bar{a}_B = \bar{a}_{BQ}^n + \bar{a}_{BQ}^\tau, \quad \forall B \in S, \tag{5.6.1}$$

где $$\bar{a}^n_{BQ} \parallel \overline{BQ}, \bar{a}^\tau_{BQ} \perp_{\circlearrowright\tilde{\varepsilon}} \overline{BQ}, \quad a^n_{BQ} = BQ\,\omega^2, a^\tau_{BQ} = BQ\,\varepsilon;$$

точка Q – МЦУ фигуры (рис. 5.6.2).

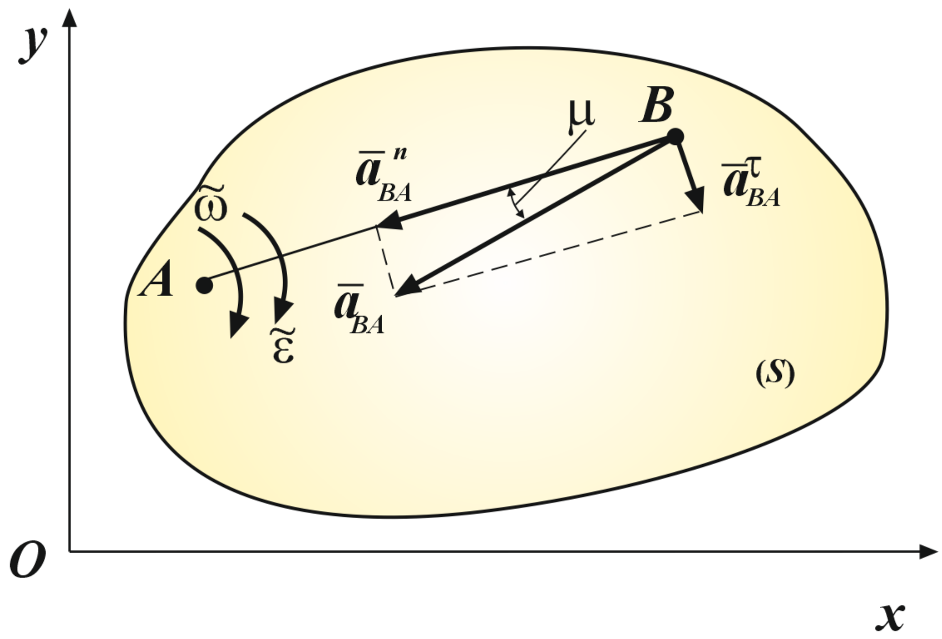


Рис. 5.6.2

Два правила нахождения МЦУ фигуры (в зависимости от исходной информации о кинематике фигуры):

1) Известны ускорение $\bar{a}_B$ точки B и алгебраические угловые скорость $\tilde{\omega}$ и ускорение $\tilde{\varepsilon}$ фигуры (рис. 5.6.3). МЦУ фигуры находится на расстоянии

$$BQ = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

от точки B по прямой, отклоненной в сторону углового ускорения фигуры на угол μ, тангенс которого находится по формуле:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

2) Известны ускорения $\overline{a}_A, \overline{a}_B$ двух точек A и B и угол μ. МЦУ фигуры находится в точке пересечения прямых, отклоненных от ускорений двух точек фигуры на угол μ в сторону углового ускорения фигуры (рис. 5.6.4).

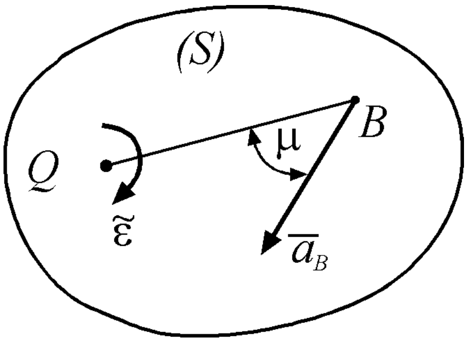


Рис. 5.6.3

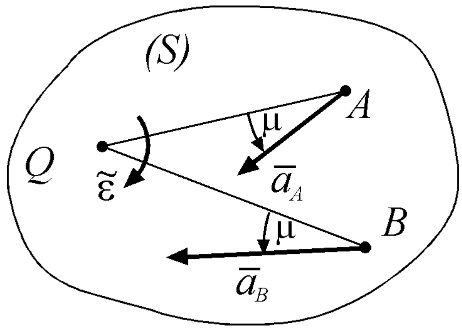


Рис. 5.6.4

6. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

6.1. АБСОЛЮТНОЕ, ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Пусть движение точки М одновременно исследуется в двух пространствах, движущихся известным образом одно в другом (рис. 6.1). Одно из этих пространств, например $O\xi\eta\varsigma$, назовем неподвижным или абсолютным, а другое – $Axyz$ – подвижным или относительным.

Движение точки M в неподвижном пространстве называют ее абсолютным движением, а в подвижном – относительным. Траектории L_a и L_r, скорости $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_r$ ускорения $\bar{a}_a$ и $\bar{a}_r$ точки в этих двух ее движениях называются соответственно абсолютными и относительными.

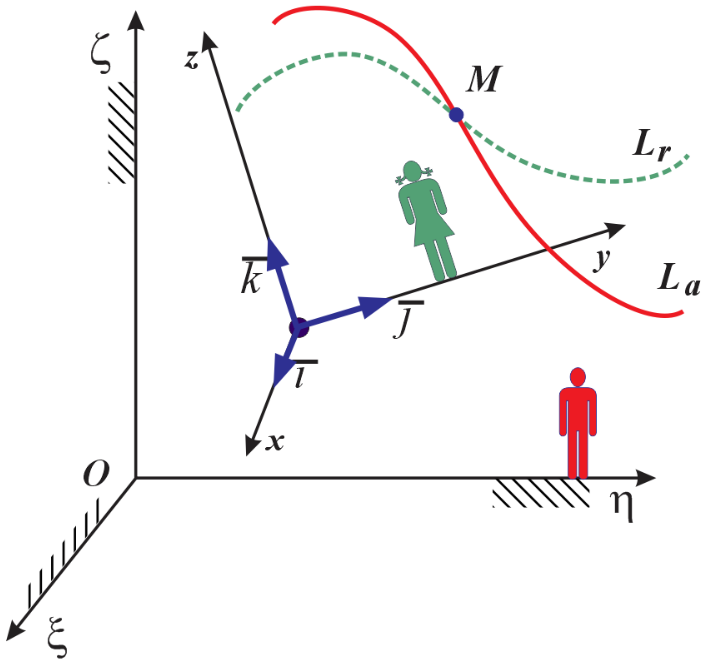


Рис. 6.1.1

Точку M_1 подвижного пространства, которая в данный момент времени совпадает с рассматриваемой точкой M назовем ***совпадающей точкой.*** Движение этой совпадающей точки подвижного пространства в неподвижном пространстве назовем переносным движением точки.

Кривая L_e, которую точка M_1 очертит в неподвижном пространстве, называется траекторией переносного движения точки. Скорость $\overline{v}_e$ и ускорение $\overline{a}_e$ точки M в переносном движении называются переносными.

Постановка задачи о сложном движении точки

Пусть известно движение точки в подвижном пространстве и его движение в неподвижном пространстве требуется найти движение точки в неподвижном пространстве.

Эта задача называется задачей о сложении движений точки.

Иначе: по известным относительному и переносному движениям точки надо найти ее абсолютное движение.

Если же известно абсолютное движение точки и требуется при известном её переносном движении найти относительное или при известном её относительном движении найти переносное, то это будет задача разложения движений.

Задача об установления связей между кинематическими характеристиками точки в двух пространствах, а значит задача о сложении движений точки, решается с помощью теорем сложения скоростей и ускорений.

6.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЕКТОРА В ДВУХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть мерой физического процесса, изучаемого наблюдателями из неподвижного и подвижного пространств, служит вектор $\overline{u} = \overline{u}(t)$.

Обозначим через $\dfrac{d\,\overline{u}}{dt}$ и $\dfrac{\tilde{d}\overline{u}}{dt}$ производные по времени вектора $\overline{U}$ в неподвижном $O\xi\eta\varsigma$ и подвижном $Axyz$ пространствах. Первую из них назовем абсолютной, вторую – относительной.

Чтобы установить связь между этими двумя производными, предложим каждому из наблюдателей продифференцировать формулу разложения

$$\overline{u} = \overline{i}u_x + \overline{j}u_y + \overline{k}u_z$$

вектора $\overline{U}$ по осям координат подвижного пространства $Axyz$.

В результате получаются следующие выражения для относительной и абсолютной производных вектора:

$$\frac{\tilde{d}\overline{u}}{dt} = \overline{i}\dot{u}_x + \overline{j}\dot{u}_y + \overline{k}\dot{u}_z \tag{6.2.1}$$

$$\frac{d\,\overline{u}}{dt} = \overline{i}\dot{u}_x + \overline{j}\dot{u}_y + \overline{k}\dot{u}_z + u_x\frac{d\,\overline{i}}{dt} + u_y\frac{d\,\overline{j}}{dt} + u_z\frac{d\overline{k}}{dt}. \tag{6.2.2}$$

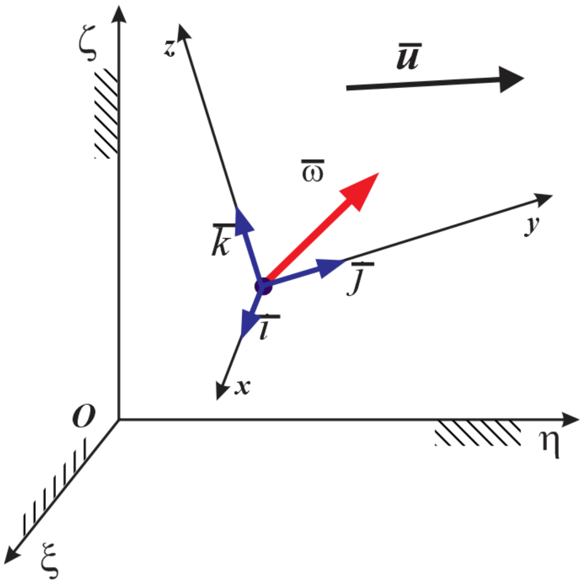


Рис. 6.2.1

Используя в последнем равенстве формулы Пуассона и равенство (6.2.1) получим формулу, которой устанавливается связь между абсолютной и относительной производными вектора:

$$\frac{d\overline{u}}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{u}}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{u}\,. \tag{6.2.3}$$

В этой формуле $\overline{\omega}$ – угловая скорость вращения подвижного пространства в неподвижном. Эта формула носит название *формула Бура*.

Обратим внимание на два следствия формулы (6.2.3).

1. *Производные вектора в поступательно движущихся одно в другом пространствах одинаковы.*

2. *Абсолютная производная вектора, постоянного в подвижном пространстве,*

$$\frac{d\overline{u}}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{u}\,, \quad \textit{если} \quad \overline{u} = \text{const} \;\text{ в }\; Axyz. \tag{6.2.4}$$

6.3. ТЕОРЕМЫ О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

Пусть радиус-векторы $\bar r$ и $\bar\rho$ точки M в пространствах $O\xi\eta\varsigma$ и $Axyz$ связаны равенством (рис. 6.3).

$$\bar r = \bar r_A + \bar\rho. \tag{6.3.1}$$

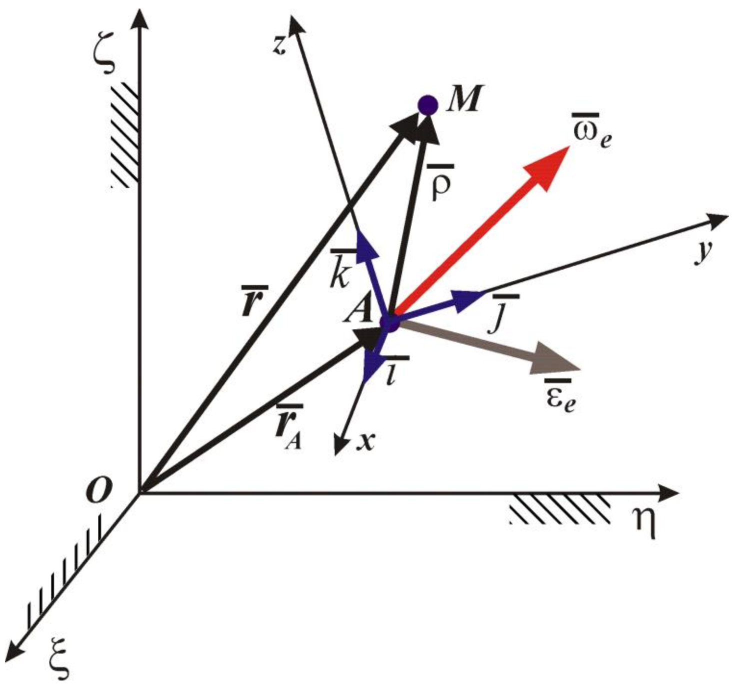


Рис. 6.3.1

Рассмотрим относительное движение точки.

Для скорости и ускорения $\bar a_r$ точки M в пространстве и $Axyz$ имеем:

$$\bar v_r = \frac{\tilde d\bar\rho}{dt}, \tag{6.3.2}$$

$$\bar a_r = \frac{\tilde d^2\bar\rho}{dt^2} = \frac{\tilde d^2\bar v_r}{dt}. \tag{6.3.3}$$

Переносное движение

Когда точка М совершает переносное движение в неподвижном пространстве, ее радиус-вектором в этом пространстве служит вектор $\bar r_1$, равный:

$$\bar r_1 = \bar r_A + \left(\bar\rho\right)_{\text{const}} \ \text{в} \ Axyz.$$

Поэтому наблюдатель в неподвижном пространстве $O\xi\eta\varsigma$ для нахождения переносных скорости и ускорения воспользуется равенствами:

$$\bar v_e = \frac{d\bar r_1}{dt} = \bar v_A + \frac{d}{dt}\left(\bar\rho\right)_{\text{const в } Axyz} = \bar v_A + \bar\omega\times\bar\rho, \tag{6.3.4}$$

$$\bar a_e = \frac{d^2\bar r_1}{dt^2} = \frac{d\bar v_A}{dt} + \bar\varepsilon\times\bar\rho + \bar\omega\times\left(\bar\omega\times\bar\rho\right) \tag{6.3.5}$$

Абсолютное движение

$$\bar v_a = \frac{d\,\bar r}{dt} = \frac{d\,\bar r_A}{dt} + \frac{d\bar\rho}{dt} = \frac{d\,\bar r_A}{dt} + \frac{\tilde d\bar\rho}{dt} + \omega\times\bar\rho\,.$$

С учетом равенств (6.3.2) и (6.3.4) получим

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e \tag{6.3.6}$$

Теорема 1. ***Абсолютная скорость точки равна сумме ее относительной и переносной скоростей.***

Для абсолютного ускорения получаем

$$\bar{a}_a = \frac{d\,\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\,\bar{v}_e}{dt} + \frac{d\,\bar{v}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_A + \bar{\omega}\times\bar{\rho}\right) + \frac{\tilde{d}\,\bar{v}_r}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{v}_r\ . \tag{6.3.7}$$

В свою очередь:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\bar{v}_A + \bar{\omega}\times\bar{\rho}\right) = \frac{d\,\bar{v}_A}{dt} + \bar{\varepsilon}\times\bar{\rho} + \bar{\omega}\times\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \\ = \frac{d\,\bar{v}_A}{dt} + \bar{\varepsilon}\times\bar{\rho} + \bar{\omega}\times\left(\frac{\tilde{d}\bar{\rho}}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{\rho}\right) = \frac{d\,\bar{v}_A}{dt} + \bar{\varepsilon}\times\bar{\rho} + \bar{\omega}\times\bar{v}_r + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{\rho}\right).\end{gathered} \tag{6.3.8}$$

С учетом равенств (10) и (12) получаем:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + 2\left(\bar{\omega}\times\bar{v}_r\right).$$

$2\left(\bar{\omega}\times\bar{v}_r\right) = \bar{a}_к$ называется добавочным ускорением или ускорением Кориолиса.

Теорема 2. (Теорема Кориолиса). *Абсолютное ускорение точки равно сумме ее относительного, переносного и добавочного ускорений*.

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_к\ .$$

Нахождение ускорения Кориолиса

Добавочное ускорение точки в неподвижном пространстве, которое называется ускорением Кориолиса или поворотным, равно удвоенному векторному произведению угловой скорости $\bar{\omega}$ вращения подвижного пространства и относительной скорости $\bar{v}_r$ точки

Модуль и направление добавочного ускорения точки часто проще находить, используя правило *Н.Е. Жуковского* построения векторного произведения.

Модуль добавочного ускорения точки равен удвоенному произведению модуля угловой скорости $\bar{\omega}$ подвижного пространства и модуля проекции $\bar{v}'_r$

относительной скорости этой точки на плоскость, перпендикулярную вектору $\overline{\omega}$:

$$a_k = 2\omega v_r' \quad , \quad v_r' = v_r \sin\alpha .$$

Направление вектора $\overline{a}_k$ получается поворотом на 90° проекции $\overline{v}_r'$ в сторону вращения подвижного пространства.

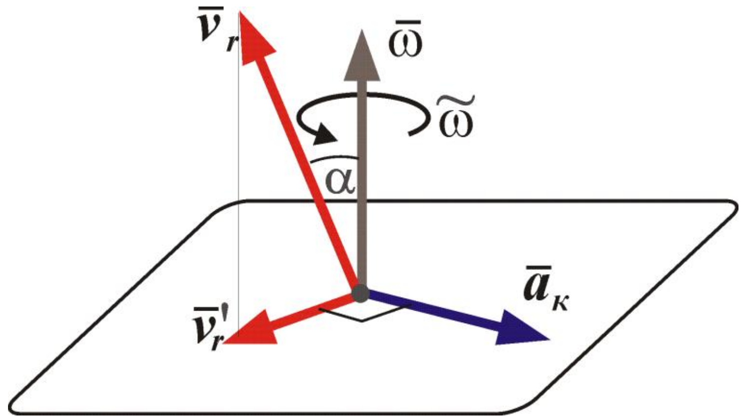


Рис. 6.3.2

Теорема 3. *В случае поступательного движения подвижного пространства в неподвижном абсолютное ускорение точки равно сумме ее относительного и переносного ускорений.*

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e .$$

Утверждение теоремы очевидно: если равна нулю угловая скорость $\overline{\omega}$ подвижного пространства, то обращается в нуль и добавочное ускорение $\overline{a}_k$ точки в неподвижном пространстве.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>БУР Жак Эдмонд Эмиль (Jacques Edmond Emile BOUR, 1832-1866)
Математик и механик. Профессор механики в Политехнической школе в Париже. Основные работы Бура относятся к механике, дифференциальной геометрии (теорема Бура, проблема изометрических поверхностей Бура) и дифференциальным уравнениям в частных производных.</td>
<td>КОРИОЛИС Гюстав Гапар (Gaspard-Gustave Coriolis, 1792 –1843)
Механик и математик, чл. Парижской АН (1836). Род. в Париже. Образование получил в Политехнической школе. С 1838 руководил здесь занятиями. В трудах «Трактат о механике твердых тел и о расчете действия машин» (1829) и «Об уравнениях относительного движения систем тел» (1835) Кориолис дал окончательное оформление теории относительного движения, введя понятие о т. н. силе и ускорений Кориолиса.</td>
</tr>
</table>

7. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

7.1. АБСОЛЮТНОЕ, ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Пусть движение тела γ одновременно регистрируется в двух пространствах $O\xi\eta\varsigma$ и $Axyz$, движущихся известным образом одно в другом. Назовем одно из этих пространств неподвижным, а другое подвижным.

Движение тела в неподвижном пространстве называется абсолютным, а в подвижном – относительным. Переносным движением тела называется его движение в неподвижном пространстве, если тело считать жестко скрепленным с подвижным. Короче, переносным движением тела называется его движение в неподвижном пространстве вместе с подвижным. Примем за полюс тела γ точку S. Тогда кинематическими характеристиками тела в абсолютном, относительном и переносном его движениях будут три набора величин:

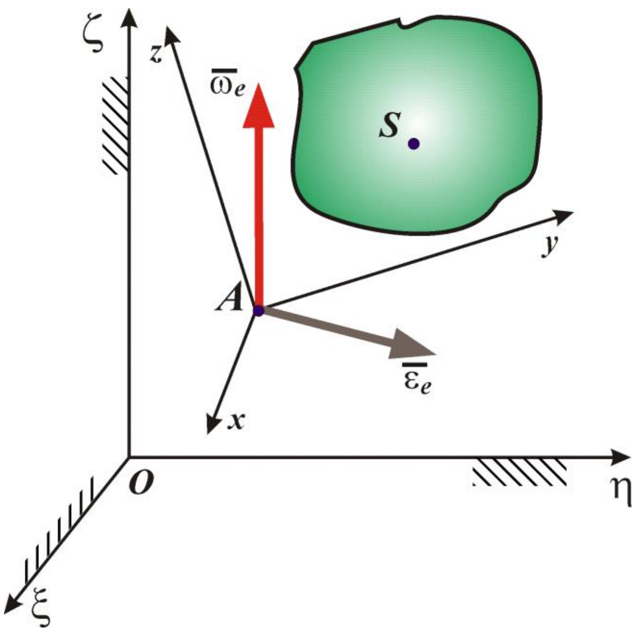


Рис. 7.1.1

$$\left(\overline{v}_S^a, \overline{a}_S^a, \overline{\omega}_a, \overline{\varepsilon}_a\right),$$

$$\left(\overline{v}_S^r, \overline{a}_S^r, \overline{\omega}_r, \overline{\varepsilon}_r\right),$$

$$\left(\overline{v}_S^e, \overline{a}_S^e, \overline{\omega}_e, \overline{\varepsilon}_e\right).$$

Первые две величины – абсолютные, относительные и переносные скорости и ускорения полюса S, а вторые – угловые скорости и ускорения тела в неподвижном и подвижном пространствах и вместе с подвижным в неподвижном.

Переносные угловые скорость и ускорение тела равны угловым скорости и ускорению подвижного пространства в неподвижном:

$$\overline{\omega}_e = \overline{\omega}, \quad \overline{\varepsilon}_e = \overline{\varepsilon}. \tag{7.1.1}$$

Переносные скорость $\overline{v}_S^e$ и ускорение $\overline{a}_S^e$ надо находить, считая тело γ жестко скрепленным с подвижным пространством $Axyz$. В этом движении тела за полюс примем точку *A*, которую при этом следует рассматривать принадлежащей телу γ.

Постановка задачи о сложении движений тела

Постановку задачи о сложении движений тела можно сформулировать следующим образом: ***по известным относительному и переносному движениям тела надо найти его абсолютное движение***.

Эта задача решается с помощью теорем о сложении движений тела. При доказательстве теорем о сложении движений тела ограничимся задачей скоростей. Поэтому совершенно недопустимо использовать результаты этих теорем для нахождения ускорений точек тела.

7.2. СВЯЗИ МЕЖДУ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ТЕЛА В ДВУХ ПРОСТРАНСТВАХ

Теорема. *Абсолютная скорость полюса S тела γ равна сумме его скоростей в относительном и переносном движениях тела:*

$$\overline{v}_S^a = \overline{v}_S^r + \overline{v}_S^e. \tag{7.2.1}$$

*Доказательство***.** Чтобы получить утверждение теоремы, надо движение точки $S \in \gamma$ в неподвижном пространстве представить сложным и применить теорему сложения скоростей.

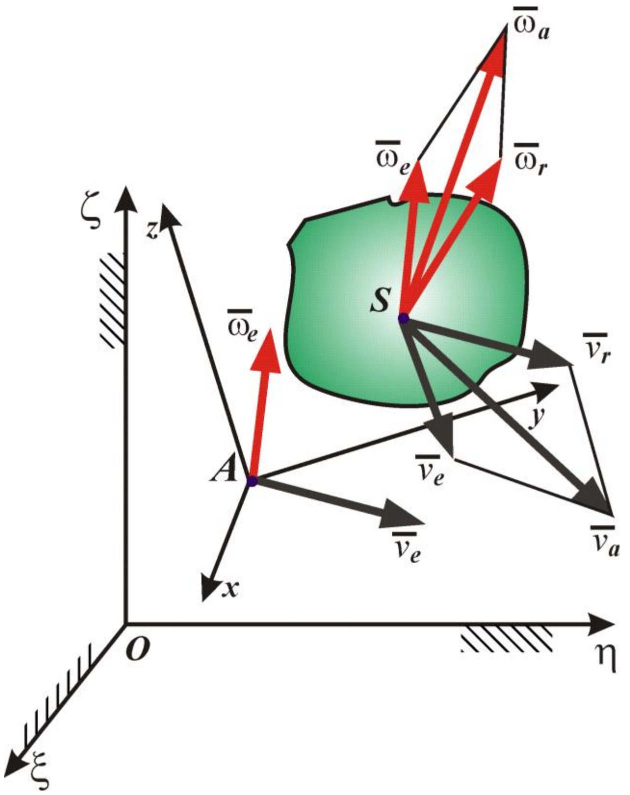


Рис. 7.2.1

Теорема 2. *Абсолютная угловая скорость тела равна сумме его относительной и переносной угловых скоростей:*

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e . \qquad (7.2.2)$$

Доказательство. Найдем скорость $\overline{v}_B^a|$ произвольной точки тела γ в неподвижном пространстве. Рассматривая движение точки B в пространстве $O\xi\eta\varsigma$ как сложное, получим

$$\overline{v}_B^a = \overline{v}_B^r + \overline{v}_B^e . \qquad (7.2.3)$$

Поскольку точка $B \in \gamma$, эти три скорости надо находить по формуле для скорости точки твердого тела. Найдем:

$$\overline{v}_B^a = \overline{v}_S^a + \overline{\omega}_a \times \overline{SB}, \quad \overline{v}_B^r = \overline{v}_S^r + \overline{\omega}_r \times \overline{SB}, \quad \overline{v}_B^e = \overline{v}_S^e + \overline{\omega}_e \times \overline{SB}.$$

После подстановки этих трех равенств в уравнение (7.2.3), имея также в виду равенство (7.2.1), получим

$$\left(\overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e - \overline{\omega}_a\right) \times \overline{SB} = 0.$$

Отсюда, так как вектор $\overline{SB}$ произвольный, и получается утверждение теоремы о сложении угловых скоростей тела.

7.3. СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЕЛА

Результирующее движение тела, полученное сложением двух его поступательных движений, является поступательным со скоростью, равной сумме скоростей складываемых движений:

Так как угловые скорости $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}_e$ тела в относительном и переносном движениях равны нулю, то в соответствии с равенством (3) найдем $\overline{\omega}_a = 0$. Следовательно, результирующее движение двух поступательных движений – поступательное.

7.4. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЕЛА ВОКРУГ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ

Тело γ с угловой скоростью $\overline{\omega}_r$ вращается около оси l_r в подвижном пространстве $AXYZ$, которое с угловой скоростью $\overline{\omega}_e$ вращается около оси l_e в неподвижном пространстве $O\xi\eta\varsigma$. Оси l_r и l_e, пересекаются в точке O. Надо найти абсолютное движение тела.

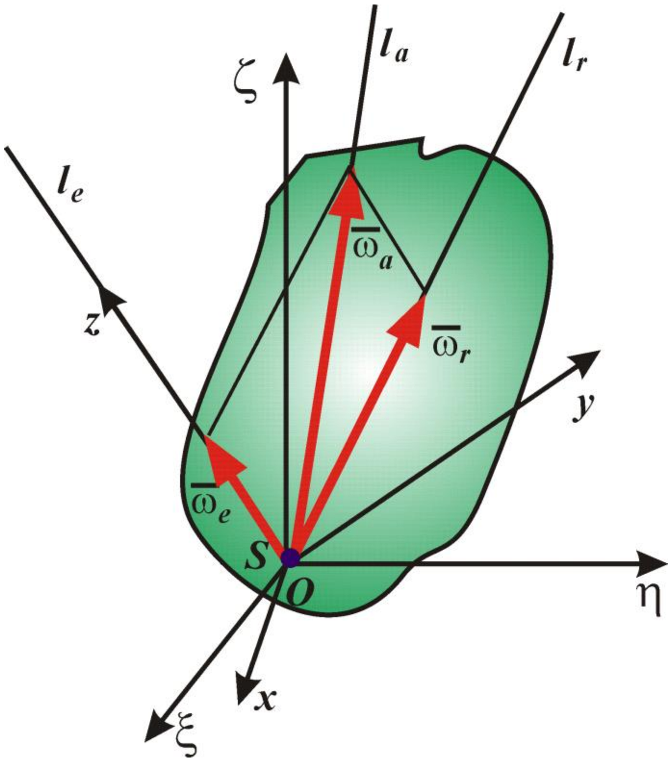


Рис. 7.4.1

Относительное и переносное движения тела – вращательные около осей l_r и l_e с угловыми скоростями $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}_e$. Поэтому абсолютное движение тела следует рассматривать как результирующее движение двух вращательных его движений около пересекающихся осей.

Теорема. *Результирующее движение тела, полученное сложением двух его вращательных движений около пересекающихся осей является вращательным с угловой скоростью* $\overline{\omega}_a$, *равной сумме угловых скоростей складываемых вращений, около оси, проходящей через точку пересечения осей этих вращений, параллельно вектору* $\overline{\omega}_a$:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e. \tag{7.4.1}$$

Доказательство. Примем за полюс S тела γ ту его точку, которая в рассматриваемый момент времени находится над точкой О пересечения осей l_r и l_e. Скорости и этой точки в относительном и переносном движениях тела равны нулю: $\overline{v}_S^r = 0$, $\overline{v}_S^e = 0$. Следовательно, равна нулю скорость $\overline{v}_S^a$ полюса S и в неподвижном пространстве. Из этого следует, что абсолютное движение тела в момент, времени t будет вращательным с некоторой угловой скоростью $\overline{\omega}_a$ около оси l_a, проходящей точку S, параллельно вектору $\overline{\omega}_a$.

Угловую скорость этого вращения, используя равенство (5), найдем равной $\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e$.

Теорема доказана.

7.5. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТЕЛА ОКОЛО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

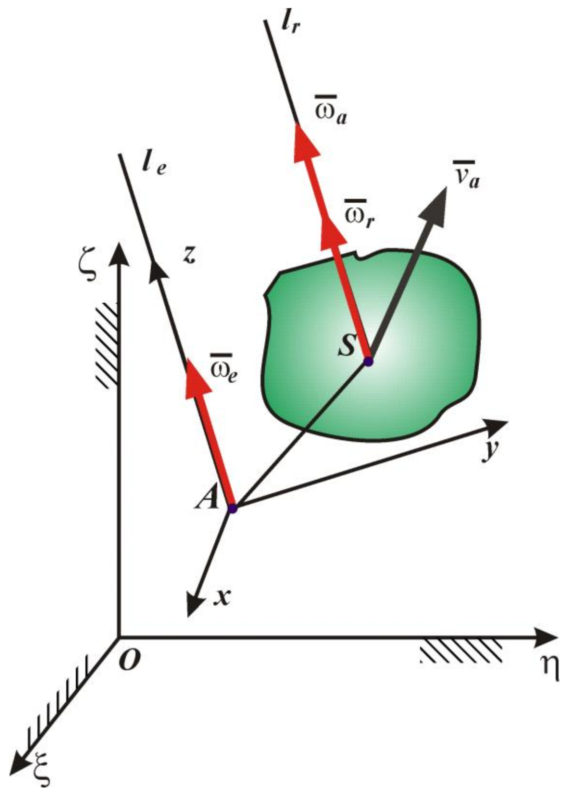


Рис. 7.5.1

Тело γ с угловой скоростью $\overline{\omega}_r$ вращается около оси l_r в подвижном пространстве $Axyz$, которое с угловой скоростью $\overline{\omega}_e$ вращается около оси l_e, параллельной l_r, в неподвижном пространстве $O\xi\eta\varsigma$. Надо найти абсолютное движение тела γ.

Абсолютная угловая скорость:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e.$$

Вектор $\overline{\omega}_a$ направлен одинаково с векторами $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}_e$. Модуль его

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e, \text{если } \overline{\omega}_e \uparrow\uparrow \overline{\omega}_r \text{ и}$$
$$\omega_a = \omega_r - \omega_e, \quad \text{если } \overline{\omega}_e \downarrow\uparrow \overline{\omega}_r.$$

Примем за полюс тела γ его точку S, находящуюся в рассматриваемый момент времени на оси l_r. Ее скорости в относительном и переносном движениях тела равны:

$$\bar{v}_S^r = 0, \quad \bar{v}_S^e = \bar{\omega}_e \times \overline{AS}.$$

Скорость полюса тела в неподвижном пространстве:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_S^r + \bar{v}_S^e = \bar{\omega}_e \times \overline{AS} \qquad (7.5.1)$$

Так как $\bar{v}_S^a \perp \bar{\omega}_e$ и $\bar{\omega}_a \| \bar{\omega}_e$, то, следовательно $\bar{v}_S^a \perp \bar{\omega}_a$: скорость полюса тела γ в абсолютном движении перпендикулярна его угловой скорости $\bar{\omega}_a$ в этом движении. Отсюда следует, что абсолютное движение тела γ является вращательным с угловой скоростью $\bar{\omega}_a$ около оси $l_a \| \bar{\omega}_a$, отстоящей от полюса на расстоянии

$$SP = \frac{v_S^a}{\omega_a} \qquad (7.5.2)$$

Положение оси l_a показано на рисунках.

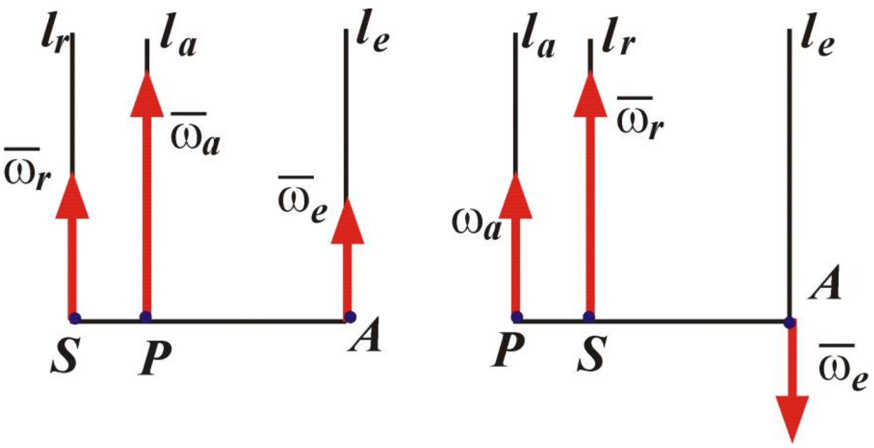


Рис. 7.5.2

Подставляя в равенство 7.5.1 выражения

$$v_S^a = AS\,\omega_a, \quad \omega_a = \omega_r \pm \omega_e, \quad AS = AP + PS,$$

найдем

$$\frac{PS}{AP} = \frac{\omega_e}{\omega_r} \qquad (7.5.3)$$

Теорема. *Результирующее движение тела, полученное сложением двух вращений около параллельных осей, является вращательным с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей складываемых вращений, около оси, которая делит расстояние между осями вращений внутренним* $\left(\bar{\omega}_e \uparrow\uparrow \bar{\omega}_r\right)$ *или внешним* $\left(\bar{\omega}_e \downarrow\uparrow \bar{\omega}_r\right)$ *образом на части, обратно пропорциональные модулям к угловых скоростей:*

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e. \tag{7.5.4}$$

Обратим внимание, что ось l_a результирующего вращения расположена ближе к оси большего из складываемых вращений. Два равенства 7.5.4 можно объединить в одной записи для алгебраических значений угловых скоростей

$$\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_r + \tilde{\omega}_e. \tag{7.5.5}$$

Пара вращений

Два равных и противоположных вращения тела около параллельных осей называют парой вращений. Вектор $\bar{\omega}_e \times \overline{AS}$ или равный ему другой вектор $\bar{\omega}_r \times \overline{SA}$ называется моментом пары вращений

$$\overline{mom}\left(\bar{\omega}_r, \bar{\omega}_e\right) = \bar{\omega}_e \times \overline{AS} = \bar{\omega}_r \times \overline{SA}$$

Угловая скорость результирующего движения тела равна нулю $\bar{\omega}_a = 0$, следовательно, это движение поступательное со скоростью, равной скорости полюса:

$$\bar{v} = \bar{v}_S^a = \bar{\omega}_e \times \overline{AS} = \overline{mom}\left(\bar{\omega}_r, \bar{\omega}_e\right).$$

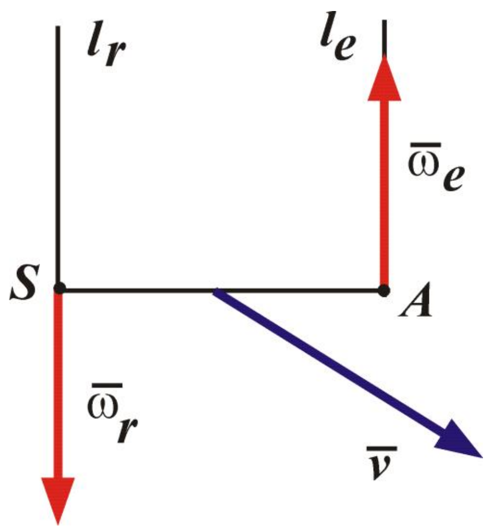


Рис. 7.5.3

7.6. ПЛАНЕТАРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ. МЕТОД ВИЛЛИСА

Сложные зубчатые механизмы, в которых ось хотя бы одного колеса подвижна, называются *планетарными механизмами* (рис. 7.6.1).

Элементы планетарного механизма имеют специальные названия:

- колесо с внешними зубьями (1), расположенное в центре механизма называется "*солнечным*";
- колеса, оси которых подвижны (2), называют "*сателлитами*";
- колесо с внутренними зубьями (3) называют "*короной*" или "*эпициклом*";
- подвижное звено, на котором установлены сателлиты, называют "*водилом*".

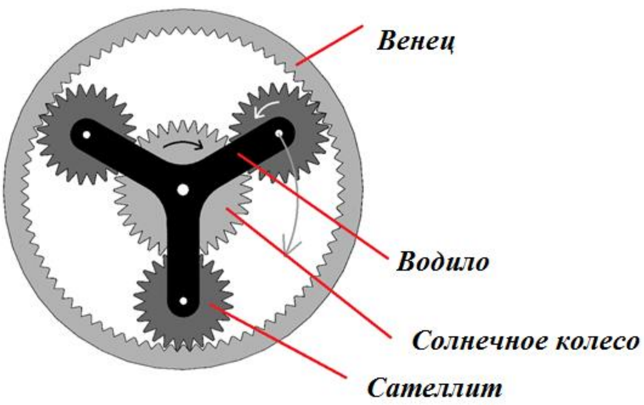


Рис. 7.6.1

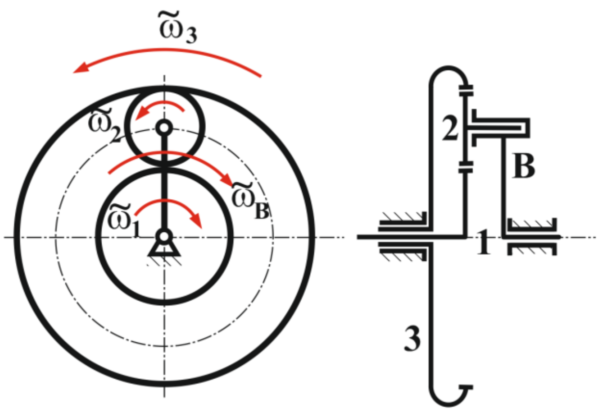


Рис. 7.6.2

При расчете планетарного механизма с водилом связывают подвижную систему отсчета. Поскольку векторы всех угловых скоростей параллельны, то можем для любого звена записать

$$\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_r \Rightarrow \tilde{\omega}_r = \tilde{\omega}_a - \tilde{\omega}_e \Rightarrow \tilde{\omega}_r = \tilde{\omega}_a - \tilde{\omega}_в,$$

где $\tilde{\omega}_в$ – угловая скорость водила, $\tilde{\omega}_r$ скорость при остановленном водиле.

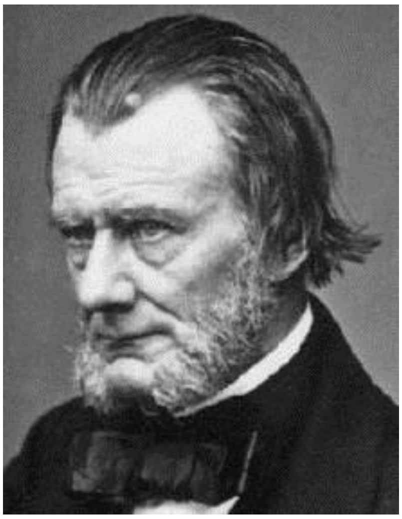
Соотношения для относительных скоростей записываются как для обычного рядового зацепления.

Так, например, для данного механизма имеем:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_в}{\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_в} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad \frac{\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_в}{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_в} = -\frac{z_3}{z_2}.$$

Здесь z – число зубьев.

Эта формула называется *формулой Виллиса*

	Преподобный Роберт Виллис **Robert Willis** (1800 – 1875) был первым профессором в Кембридже, который получил широкое признание в качестве инженера-механика, и известен своими многочисленными архитектурными трудами, включая 4 тома об архитектуре Кембриджского университета.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Полецкий А.Т. Кинематика твёрдого тела: Текст лекций. – Челябинск, ЧПИ, 1977.–115 с.

2. Теоретическая механика. Кинематика плоского движения: учебное пособие / Караваев В.Г., Пономарева С.И., Прядко Ю.Г., Чернобривец М.Г., Черногоров Е.П. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2014. – 74 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ