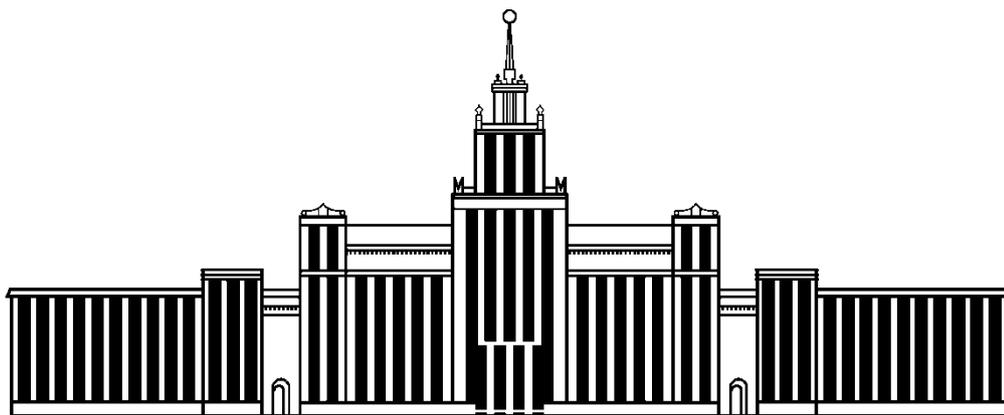


**Федеральное агентство по образованию  
Южно-Уральский государственный университет**



**Кафедра теоретической механики и основ проектирования машин**

**Черногоров Е.П.**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.**

**Динамика**

*Курс лекций*

**Челябинск  
2016**

# Введение

*Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение различных материальных объектов в зависимости от действующих на них сил.*

Основоположителем динамики явился великий Галилей (1564 – 1642), который впервые ввёл понятие скорости и ускорения движущейся точки при неравномерном прямолинейном движении и установил законы падения тел в пустоте. Галилей сформулировал первый закон динамики – закон инерции.

Работу по созданию динамики продолжил великий английский учёный Ньютон (1643 – 1727), который в своём знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии» (1686) сформулировал основные законы классической механики, часто называемые аксиомами, так как они принимаются без доказательств, без каких-либо математических выводов: они «вводятся», а не «выводятся».

Область применения законов классической механики, созданной Галилеем и Ньютоном, ограничена. Эти законы не согласуются с опытом при изучении движения тел, скорость которых одного порядка со скоростью света. Новая релятивистская механика (теория относительности), созданная в начале XX века немецким физиком Альбертом Эйнштейном (1879 – 1955), коренным образом изменила представления в механике о пространстве, времени, массе и энергии.

Однако результаты, полученные на основе законов классической и релятивистской механики для тел, движущихся с обычными скоростями, далёкими от скорости света, совпадают. Поэтому классическую механику можно рассматривать как частный случай релятивистской механики. Она полностью сохраняет своё значение в настоящее время, являясь научно-теоретической базой большинства отраслей техники.

# 1. Динамика точки

## 1.1. Основные понятия и законы динамики

*В динамике изучаются законы движения материальных тел под действием приложенных к ним сил.*

Динамика – наиболее общий раздел механики. В динамике в отличие от статики, кроме постоянных сил, изучаются ещё и переменные силы, зависящие от времени, положения тела и его скорости:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Движение любого тела определяется не только действующими на него силами, но и его инертностью. Это – одно из важнейших свойств материи. Оно проявляется в способности тела сохранять своё движение или покой при отсутствии сил. Чем больше вещества заключено в теле, тем больше его инертность.

Величина, зависящая от количества вещества данного тела и определяющая меру его инертности, называется массой тела. Размерность массы – килограмм (кг).

Основные законы динамики были сформулированы Ньютоном для свободной материальной точки.

### ***I закон (закон инерции)***

Всякая точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на неё не действуют никакие силы:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const}.$$

Движение, сохраняемое точкой при отсутствии сил, называется движением *по инерции*. Система отсчёта, в которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной системой отсчёта*. Можно считать инерциальной гелиоцентрическую систему отсчёта с началом в центре Солнца и осями, проходящими через три так называемые неподвижные звезды. Инерциальной будет также любая система отсчёта, движущаяся поступательно, прямолинейно и равномерно относительно гелиоцентрической.

### ***II закон (основной закон динамики)***

Он устанавливает связь между массой точки, приложенной к ней силой и ускорением.

Произведение массы точки на её ускорение равно действующей на точку силе:

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

Этот закон справедлив лишь в инерциальной системе отсчёта.

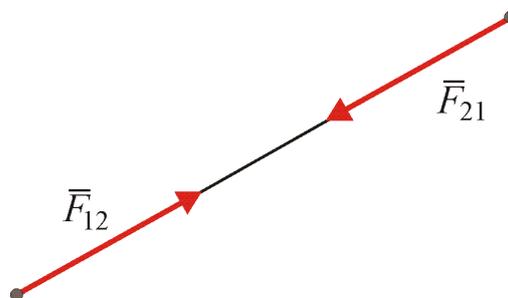


Рис. 1.1.1

### **III закон (закон равенства действия и противодействия)**

*Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными в разные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки (рис. 1.1.1):*

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$$

### **IV закон (закон независимости действия сил)**

Ускорение, приобретённое точкой под действием нескольких сил, приложенных к ней, равно сумме ускорений этой точки, полученных при раздельном действии каждой из этих сил:

$$\bar{a} = \sum \bar{a}_k, \quad \bar{a}_k = \frac{\bar{F}_k}{m}.$$

Отсюда следует, что несколько одновременно действующих на точку сил сообщают ей такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме:

$$m\bar{a}_k = \bar{F}_k \Rightarrow m\sum \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k.$$

*Этот закон ещё называют обобщённым законом параллелограмма сил.*

## 1.2. Дифференциальные уравнения движения точки

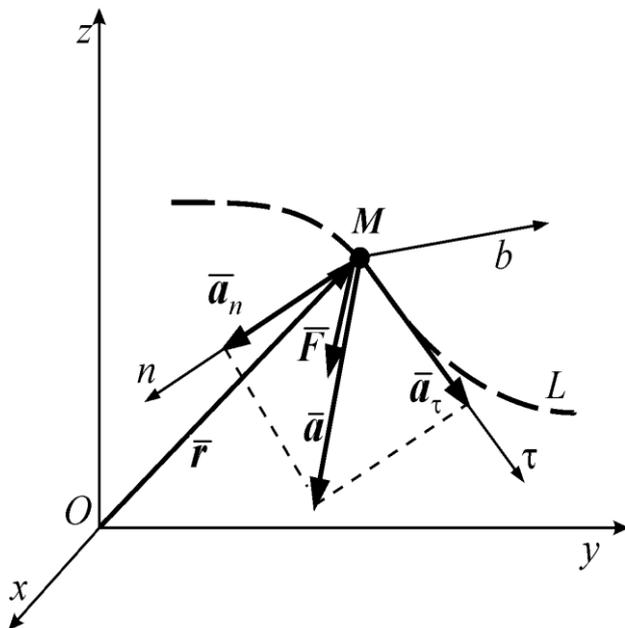


Рис. 1.2.1

Пусть точка  $M$  движется по кривой  $L$  под действием силы  $\vec{F}$  (рис. 1.2.1):

Основной закон динамики может быть записан:

а) в векторной форме:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

б) в координатной форме:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z,$$

в) в естественной форме:

$$m a_\tau = F_\tau \Rightarrow a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \Rightarrow m \frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau,$$

$$m a_n = F_n \Rightarrow a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho} \Rightarrow m \frac{v_\tau^2}{\rho} = F_n,$$

$$m a_b = F_b \Rightarrow a_b = 0 \Rightarrow F_b = 0.$$

Полученные уравнения и представляют собой дифференциальные уравнения движения точки соответственно в векторной, координатной и естественной формах.

### Две основные задачи динамики

**Первая (прямая) задача:** зная закон движения материальной точки и ее массу, определить, под действием какой силы такое движение может происходить.

Например, закон движения дан в координатной форме:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Найти действующую на точку силу.

Задача решается дифференцированием уравнений движения:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z},$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

и особой сложности не представляет.

**Вторая (обратная) задача:** зная действующие на точку силы, ее массу, а также её начальное положение и начальную скорость, определить закон движения точки.

В общем случае сила  $\vec{F}$  является функцией времени, а также положения и скорости точки:  $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$

Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F(t, \vec{r}, \vec{v}).$$

Необходимо отыскать функцию  $\vec{r}(t)$ . Для этого нужно проинтегрировать уравнение второго порядка, векторное (или три скалярных уравнения). После интегрирования получим уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2).$$

Наличие постоянных интегрирования показывает, что точка под действием данной силы может совершать целый класс движений. Чтобы конкретизировать решение задачи, нужно найти постоянные интегрирования. Для их нахождения используют начальные условия движения.

Начальными условиями движения точки называются величины, определяющие начальное положение и начальную скорость точки:

$$\text{при } t = t_0 \quad \vec{r} = \vec{r}_0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0.$$

Начальные условия определяют единственное решение системы дифференциальных уравнений.

Такая задача, в которой требуется найти частное решение, удовлетворяющее определенным начальным условиям, получила название *задача Коши* (начальная задача). Задача интегрирования в квадратурах системы дифференциальных уравнений в общем случае довольно трудна и решается лишь в некоторых частных случаях.

Уравнения и законы динамики были выведены для свободной материальной точки (М.Т.).

Если рассматривать движение несвободной материальной точки, то можно воспользоваться принципом освобождения связей.

### ***Алгоритм решения задач динамики материальной точки***

При решении задач динамики следует придерживаться определенного порядка, устанавливающего программу операций, выполнение которых достаточно для решения задачи. Строгое и последовательное выполнение этой программы в каждой задаче даст необходимые навыки и умение разбираться в задачах любой сложности.

Для решения задач динамики материальной точки предлагается следующая программа операций (*алгоритм*):

- 1) выбрать материальную точку и указать систему отсчета (пространство), в которой движение этой точки будет рассматриваться;
- 2) показать заданные силы, действующие на выбранную точку;
- 3) назвать связи, наложенные на эту точку, и заменить их реакциями;
- 4) выписать силы, под действием которых совершается движение точки;
- 5) составить дифференциальные уравнения движения точки, с помощью которых найти неизвестные величины, или использовать для этой цели общие теоремы динамики.

#### Пример 1.2.1.

Материальная точка массой  $m$  брошена с поверхности Земли с начальной скоростью  $v_0$ , образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Принимая во внимание, что сила тяжести точки постоянна, и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) закон движения точки; 2) траекторию точки; 3) высоту полёта точки при данном угле  $\alpha$ ; 4) угол  $\alpha$ , при котором высота полёта точки будет максимальной; 5) дальность полёта точки при данном угле  $\alpha$ ; 6) угол  $\alpha$ , при котором дальность полёта точки будет максимальной.

#### *Решение*

1. Рассмотрим движение точки в пространстве Земли (рис. 1.2.2). Поместим начало отсчёта  $O$  в начальном положении движущейся точки и направим ось  $Oz$  по вертикали вверх, а ось  $Oy$  выберем так, чтобы вектор начальной скорости точки  $v_0$  лежал в плоскости  $Oyz$ . В этой системе отсчёта начальные условия будут следующими:

$$\text{при } t=0 \begin{cases} x = x_0 = 0, & y = y_0 = 0, & z = z_0 = 0, \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = 0, & \dot{y} = \dot{y}_0 = v_0 \cos \alpha, & \dot{z} = \dot{z}_0 = v_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

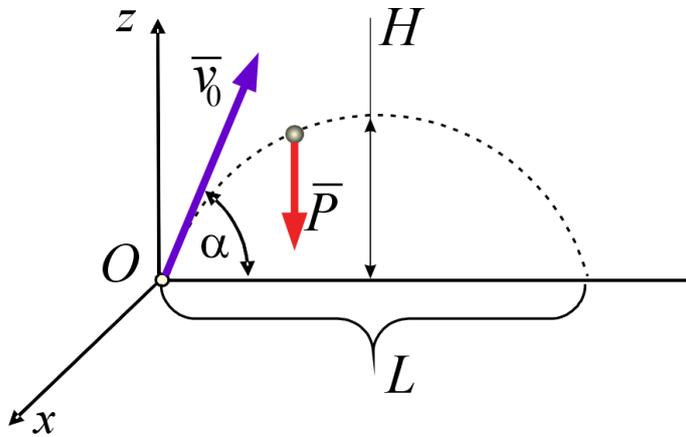


Рис. 1.2.2

Изображаем в произвольном положении движущуюся точку  $M$  и действующие на неё силы.

2. *Заданные силы.* Единственной силой, действующей на точку, является постоянная сила тяжести  $\bar{P} = m\bar{g}$ , направленная по вертикали вниз.

3. *Связи.* Нет.

4. Точка движется под

действием силы  $(\bar{P})$ .

5. Составим дифференциальные уравнения движения точки.

Проекция силы  $\bar{P}$  на оси координат:

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -P = -mg.$$

Подставляя эти величины в дифференциальные уравнения движения точки, получаем

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg,$$

или после сокращений на  $m$

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g.$$

Проинтегрировав один раз каждое из составленных дифференциальных уравнений движения, найдём:

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = C_2, \quad \dot{z} = -gt + C_3.$$

Удовлетворяя начальным условиям, будем иметь:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = v_0 \cos \alpha, \quad C_3 = v_0 \sin \alpha.$$

Подставляя эти значения  $C_1, C_2, C_3$  в найденные выше решения, придём к уравнениям:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{z} = -g t + v_0 \sin \alpha.$$

Интегрируя каждое из этих уравнений, получаем:

$$x = C_4, \quad y = v_0 t \cos \alpha + C_5, \quad z = -\frac{g t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + C_6.$$

Подстановка начальных условий дает  $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ , и мы окончательно находим уравнения движения точки в виде:

$$x = 0, \quad y = v_0 t \cos \alpha, \quad z = -\frac{g t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

Исключая из этих уравнений время  $t$ , получаем уравнение траектории точки в форме, содержащей только координаты точки:

$$x = 0, \quad z = y \operatorname{tg} \alpha - \frac{g y^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Данное уравнение есть уравнение параболы, ось симметрии которой параллельна оси  $Oz$ .

Для нахождения высоты полёта  $H$  точки найдём максимум функции

$$z = -\frac{g t^2}{2} + v_0 t \cos \alpha:$$

$$\dot{z} = -g t + v_0 \sin \alpha = 0; \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g};$$

$$z_{\max} = -\frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Таким образом,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Отсюда следует, что высота полёта будет максимальной при  $\alpha = 90^\circ$  и

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Чтобы найти дальность полёта  $L$  движущейся точки, подставим в уравнение траектории этой точки координаты точки  $A$  ( $y = L, z = 0$ ), в которой траектория пересекает ось  $Oy$ . Тогда получим

$$0 = -\frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + L \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда найдём

$$L = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{g}.$$

Из этой формулы следует, что  $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$  и максимальная дальность

полёта будет при  $\alpha = 45^\circ$ .

### 1.3. Динамика несвободной материальной точки

Уравнения и законы динамики были выведены для свободной материальной точки. Рассмотрим теперь движение несвободной материальной точки, свобода движения которой ограничена связями (рис. 1.3.1).

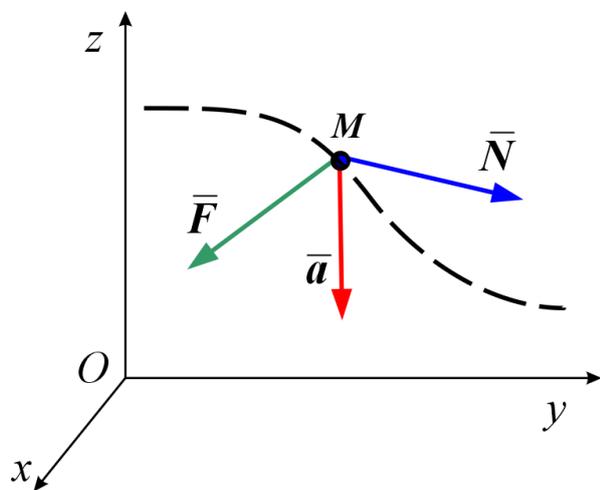


Рис. 1.3.1

Основное уравнение динамики несвободной материальной точки можно получить с помощью принципа освобождения связей: *не нарушая движения несвободной точки, её можно сделать свободной, если отбросить связи и заменить их реакциями.*

Применяя к «свободной» точке  $M$ , движущейся под действием сил  $(\vec{F}, \vec{N})$  основное уравнение динамики получаем

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}.$$

Это – основное уравнение динамики несвободной точки.

### Пример 1.3.1. Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, принужденная двигаться по окружности в вертикальной плоскости. Радиус этой окружности называется длиной математического маятника.

Пусть математический маятник представляет собой материальную точку массой  $m$  подвешенную на нерастяжимой, невесомой нити длиной  $l$  и совершающую движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Найти закон малых качаний маятника.

#### Решение

1. Рассмотрим движение маятника в пространстве основания (рис. 1.3.2).

В качестве системы координат возьмем естественные оси  $\tau$  и  $n$ . Начало отсчёта в точке  $M_0$ , положительное направление указано. Положение маятника будем определять углом  $\varphi$  отклонения нити от равновесного положения.

2. Заданные силы: сила тяжести  $\bar{P}$ ,  $P = mg$ .

3. Связь: нить; её реакция  $\bar{N}$ .

4. Движение маятника совершается под действием сил ( $\bar{P}$ ,  $\bar{N}$ ).

5. Составим дифференциальные уравнения движения маятника в естественной форме:

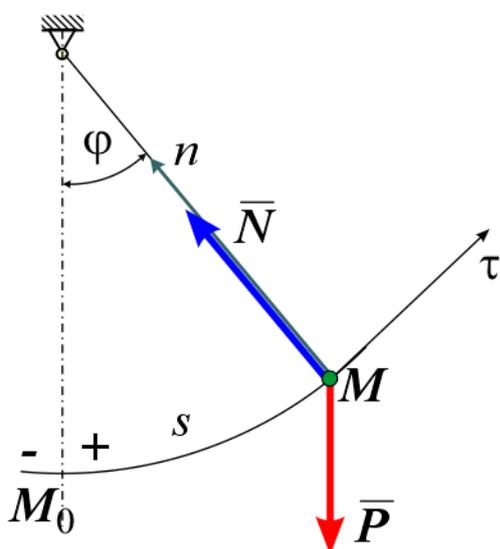


Рис. 1.3.2

$$\begin{cases} m \frac{dv_\tau}{dt} = -P \sin \varphi, \\ m \frac{v_\tau^2}{l} = -P \cos \varphi + N. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Второе из этих уравнений служит для нахождения силы  $N$

$$N = mg \cos \varphi + \frac{mv_\tau^2}{l}. \quad (1.3.2)$$

С помощью первого уравнения, после подстановки в него  $v_\tau = \dot{s} \Rightarrow l \dot{\varphi}$ , получается дифференциальное уравнение качаний маятника

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0, \quad (1.3.3)$$

где  $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Уравнение (1.3.3) является нелинейным и в элементарных функциях не интегрируется.

Когда исследуются малые качания маятника, можно полагать  $\sin \varphi \approx \varphi$ . В этом случае дифференциальное уравнение (3) принимает вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0. \quad (1.3.4)$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдем закон малых качаний математического маятника:

$$\varphi = A \sin(kt + \alpha), \quad (1.3.5)$$

где амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\alpha$  являются константами интегрирования и определяются с помощью начальных условий движения:

$$t = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_0; \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0. \quad (1.3.6)$$

Как видно, малые качания математического маятника меняются по гармоническому закону. Период этих качаний

$$T = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Поскольку период  $T$  малых качаний маятника не зависит от начальных условий движения его  $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ , то говорят, что малые качания математического маятника являются изохронными.

Возникает вопрос, когда качания маятника можно считать малыми. Оказывается, что при амплитуде  $A = 20^\circ$  ошибка периода  $T$  составляет 0,8 %, при  $A = 40^\circ \sim 3$  %.

## 1.4. Динамика относительного движения материальной точки

До сих пор мы рассматривали движение точки по отношению к так называемой инерциальной системе отсчёта, т.е. системе, в которой справедливы основные законы динамики свободной материальной точки – законы Галилея –

Ньютона. Инерциальную систему отсчёта можно считать условно неподвижной.

Рассмотрим движение точки  $M$  относительно двух систем отсчёта, одна из которых  $O\xi\eta\zeta$  неподвижна, а другая  $Axyz$  движется известным образом относительно первой (рис. 1.4.1). Пусть на точку  $M$  действует сила  $\vec{F}$ , являющаяся результатом взаимодействия этой точки с другими телами. Составим уравнения движения этой точки по отношению к системе отсчёта  $Axyz$ .

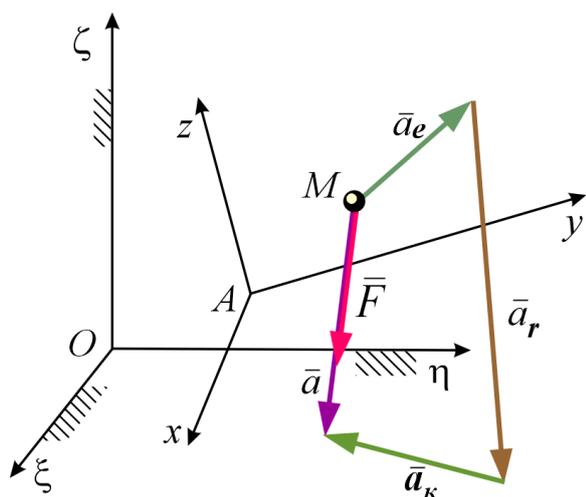


Рис. 1.4.1

Из кинематики известно, что ускорение точки

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k, \text{ где } \vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

Уравнение движения точки относительно инерциальной системы  $O\xi\eta\zeta$  имеет вид

$$m\vec{a}_a = \vec{F}.$$

Подставляя значение  $\vec{a}_a$ , получим

$$m\vec{a}_e + m\vec{a}_r + m\vec{a}_k = \vec{F}.$$

Откуда

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_k).$$

Обозначим

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e; \quad \vec{\Phi}_k = -m\vec{a}_k.$$

Величины  $\vec{\Phi}_e$  и  $\vec{\Phi}_k$ , имеющие размерность силы, назовем соответственно *переносной* и *кориолисовой* силами инерции точки. В итоге будем иметь

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k. \tag{1.4.1}$$

**Это основное уравнение динамики точки в неинерциальном пространстве.**

*Дифференциальные уравнения движения точки в неинерциальном пространстве составляются так же, как уравнения движения в инерциальном пространстве, если к действующим на точку силам прибавить переносную и кориолисову силы инерции (динамическая теорема Кориолиса).*

Заметим, что силы инерции  $\vec{\Phi}_e$  и  $\vec{\Phi}_k$ , по своему определению не являются результатом механического взаимодействия точки с другими материальными

объектами внешнего мира и поэтому не являются для точки реальными физическими силами. Появление этих сил целиком обусловлено движением неинерциальной системы отсчета  $Axyz$  по отношению к инерциальной системе  $O\xi\eta\zeta$  и движением точки относительно неинерциальной системы отсчета.  $\bar{\Phi}_e$  и  $\bar{\Phi}_k$ , представляют собой поправки на неинерциальность системы отсчета  $Axyz$ .

В частном случае, если система  $Axyz$  движется поступательно, равномерно и прямолинейно,  $a_e = a_k = 0$  и тогда уравнение (1.4.1) будет иметь вид

$$m\bar{a}_r = \bar{F}.$$

Из полученных результатов видно, что никаким механическим экспериментом, проведенным внутри инерциальной системы отсчета, нельзя обнаружить, находится данная система в покое или движется поступательно, прямолинейно и равномерно. С механической точки зрения все инерциальные системы отсчета эквивалентны. Любую из инерциальных систем отсчета можно считать покоящейся, а скорости всех остальных инерциальных систем определять относительно нее.

В этом заключается принцип относительности Галилея – Ньютона.

Из уравнения (1.4.1) можно получить уравнение равновесия (покоя) точки в неинерциальной системе отсчета. Если точка находится в покое относительно  $Axyz$ , то  $a_r = 0$ ,  $v_r = 0$ , следовательно, и  $\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0$ . В итоге получим

$$\bar{F} + \bar{\Phi}_e = 0. \quad (1.4.2)$$

Уравнение покоя точки в неинерциальной системе отсчета составляется так же, как уравнение равновесия в неподвижной системе, если к действующим на точку силам добавить переносную силу инерции.

Уравнение равномерного и прямолинейного движения в неинерциальной системе отсчета при  $\omega_e \neq 0$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{a}_r = 0; \quad \bar{v}_r = \text{const}; \quad \bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r \neq 0; \\ \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k = 0. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Для инерциальной же системы отсчета уравнения покоя и равномерного прямолинейного движения имеют одинаковый вид

$$\bar{F} = 0. \quad (1.4.4)$$

Используя эти зависимости можно опытным путем установить, находится ли объект в инерциальной или неинерциальной системе отсчета.

При решении задач на составление дифференциальных уравнений движения в неинерциальной системе отсчёта необходимо в число заданных сил, действующих на точку, ввести переносную и кориолисову силы инерции.

## 1.5. Относительный покой и относительное движение вблизи поверхности Земли

Земля не является инерциальной системой отсчёта, т.к. по отношению к звёздам она совершает вращение вокруг своей оси и движется непрямолинейно вокруг Солнца. Однако, последнее движение для промежутков времени много меньших одного года мало отличается от прямолинейного и равномерного. Поэтому мы рассмотрим только влияние суточного вращения Земли вокруг её оси. Это сравнительно медленное вращение. Оно совершается со скоростью 1 оборот в сутки, т.е. угловая скорость будет равна

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 0,0000729 \text{ с}^{-1}.$$

Вектор угловой скорости Земли  $\vec{\omega}$  направлен по оси вращения Земли с юга на север.

### *Кажущийся вес тела*

Рассмотрим груз массы  $m$  подвешенный к пружинным весам и находящийся относительно Земли в покое (рис. 1.5.1). На него действует сила притяжения Земли  $\vec{F}$ , направленная к центру Земли, и реакция весов  $\vec{N}$ . Для получения уравнений относительного равновесия в число действующих сил необходимо включить переносную силу инерции  $\vec{\Phi}_e$ .

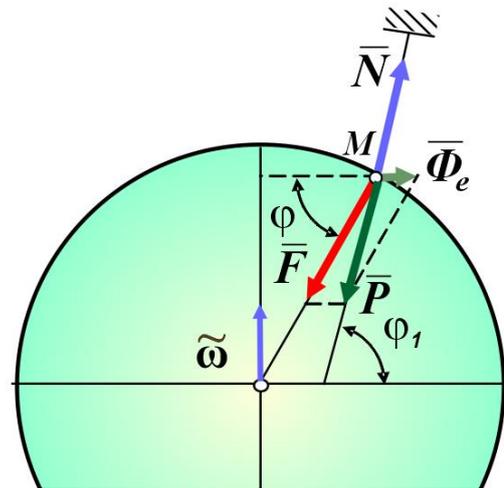


Рис. 1.5.1

Так как угловая скорость вращения Земли  $\omega = \text{const}$ , то  $\vec{\Phi}_e = \vec{\Phi}_e^n$ ;  $\Phi_e^n = m\omega^2 R \cos \varphi$ .

Обозначим

$$\vec{F} + \vec{\Phi}_e = \vec{P}.$$

Условие равновесия тела будет иметь вид

$$\bar{P} + \bar{N} = 0.$$

Следовательно,  $\bar{P}$  есть сила, которую пружинные весы регистрируют как вес груза. Направление дает направление кажущейся вертикали к земной поверхности. Так как  $\omega$  мала, то  $P$  мало отличается от  $F$  (на 0,34% на экваторе).

Наблюдаемый на поверхности Земли вес материального тела есть равнодействующая силы притяжения Земли и центробежной силы инерции этой точки.

Поскольку взвешиванием мы всегда определяем не силу притяжения  $\bar{F}$ , а силу  $\bar{P}$ , то при этом всегда автоматически учитываем вращение Земли. И никаких поправок в уравнениях равновесия делать не нужно.

Линия действия силы тяжести  $\bar{P}$  точки называется *вертикалью* в данном пункте земной поверхности, а плоскость, перпендикулярная к вертикали, называется *горизонтальной плоскостью*. Угол, составленный вертикалью (а не радиусом Земли) с плоскостью экватора, называется географической широтой в данном пункте земной поверхности.

Из изложенного ясно, что сила тяжести  $\bar{P}$  (следовательно, и ускорение силы тяжести  $\bar{g} = \bar{P}/m$ ) зависят от географической широты в данном пункте земной поверхности, а также и от высоты этого пункта над уровнем моря.

### ***Влияние вращения Земли на движение тел вдоль земной поверхности***

Рассмотрим материальную точку массой  $m$ , движущуюся равномерно по поверхности Земли в северном полушарии к югу (рис. 1.5.2).

При движении вдоль земного меридиана уравнение движения точки можно представить в виде

$$m\bar{a}_r = \bar{P} + \bar{R} + \bar{\Phi}_k,$$

где  $\bar{P}$  учитывает переносную силу инерции, а  $\bar{R}$  – реакция земной поверхности на точку.

Проецируя это уравнение на ось  $Ox$ , перпендикулярную к направлению движения, и учитывая, что  $\bar{a}_r$  лежит в плоскости меридиана, мы получаем

$$R_x + \Phi_k = 0,$$

т.е. реакция  $\bar{R}$  земной поверхности будет иметь составляющую в направлении оси  $Ox$  и, следовательно, точка будет давить на Землю вправо по движению (на восток) с силой

$$\bar{R}_x^* = \bar{\Phi}_k; \quad \Phi_k = 2m\omega v_r \sin \varphi.$$

Под действием этой силы инерции точка будет стремиться отклониться вправо от направления своего движения.

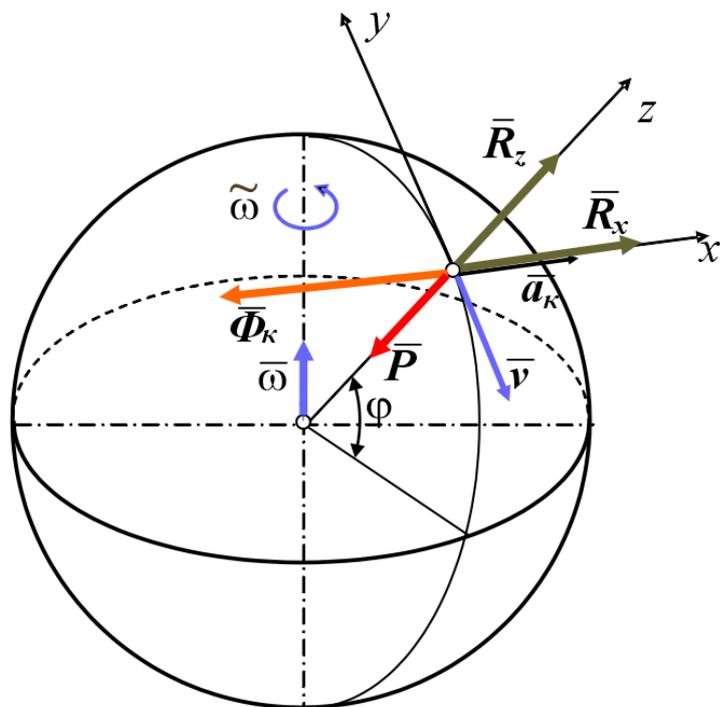


Рис. 1.5.2

Если же точка будет двигаться в северном полушарии по меридиану на север, то на нее также будет действовать кориолисова сила инерции, но уже направленная на запад, и поэтому точка будет опять отклоняться вправо от направления своего движения.

Вместо материальной точки можем рассматривать их непрерывную совокупность (реку, поезд), и увидим весьма интересные явления: у

всех двухколейных железных дорог сильнее изнашивается правый рельс каждой колеи; реки, текущие в северном полушарии, стремятся размыть свой правый берег (закон *Бэра*). Более значительны силы Кориолиса в морских и воздушных течениях (Гольфстрим отклоняется вправо, северные ветры переходят в восточные). По той же причине ракеты дальнего действия будут отклоняться вправо от плоскости стрельбы.

### ***Невесомость***

**Невесомость:** состояние материального тела, движущегося в поле тяготения, при котором действующие на него силы тяжести или совершаемое им движение не вызывают давления частиц друг на друга.

Невесомость – отсутствие давления точки на соприкасающиеся с ней тела, находящиеся в данной системе координат. В частности, невесомая точка не

давит на площадку весов, находящихся в покое относительно рассматриваемой системы координат.

Рассмотрим невесомость материальной точки в подвижной неинерциальной системе отсчёта, связанной со свободным телом, движущимся под действием притяжения Земли (например, со спутником) (рис. 1.5.3).

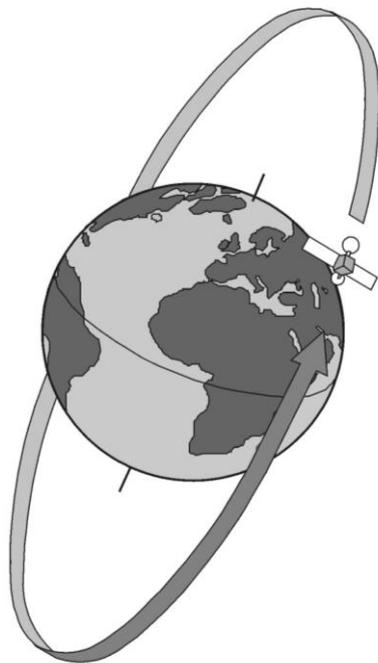


Рис. 1.5.3

Невесомость следует рассматривать для материальной точки, находящейся в относительном равновесии, когда скорость и ускорение относительного движения равны нулю

$$\bar{P} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e = 0.$$

Здесь  $\bar{P} = m\bar{g}$  – сила тяжести (см. выше: «Кажущийся вес тела»),  $\bar{N}$  – реакция спутника,  $\bar{\Phi}_e$  – переносная сила инерции, определяемая движением спутника. Так как в случае невесомости

$$\bar{N} = 0 \Rightarrow \bar{P} + \bar{\Phi}_e = 0,$$

или

$$m\bar{g} = m\bar{a}_e \Rightarrow \bar{a}_e = \bar{g}.$$

Переносное ускорение точки равно ускорению свободного падения. Другими словами, ускорение подвижной системы отсчёта, движущейся поступательно, равно ускорению силы тяжести.

Это будет, в частности, в лифте, падающем вниз под действием силы тяжести, или в спутнике, вращающемся вокруг Земли со скоростью  $v$  на высоте  $H$  так, что ускорение

$$\bar{a}_e = \bar{g} \Rightarrow a_e = \frac{v^2}{R + H}.$$

При  $H$  ничтожно малом по сравнению с  $R$  имеем

$$v^2 = gR \approx 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \Rightarrow v \approx 8 \cdot 10^3 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$

Это – скорость, при которой на космическом корабле будет наблюдаться невесомость.

Вообще, любое тело, размеры которого очень малы по сравнению с земным радиусом, совершая свободное поступательное движение в поле тяготения Земли, будет при отсутствии других внешних сил находиться в состоянии невесомости.

# 2. Геометрия масс

## 2.1. Центр масс. Статические моменты

Мы переходим к рассмотрению движения механической системы (М.С.) т.е. выделенному по какому-либо признаку множеству точек и тел, взаимодействующих между собой. Частным случаем М.С. является твердое тело (Т.Т.) – совокупность точек, расположенных непрерывно; расстояние между любыми двумя точками Т.Т. не меняется. В теоретической механике изучается движение только таких М.С., положение которых определяется конечным набором её координат.

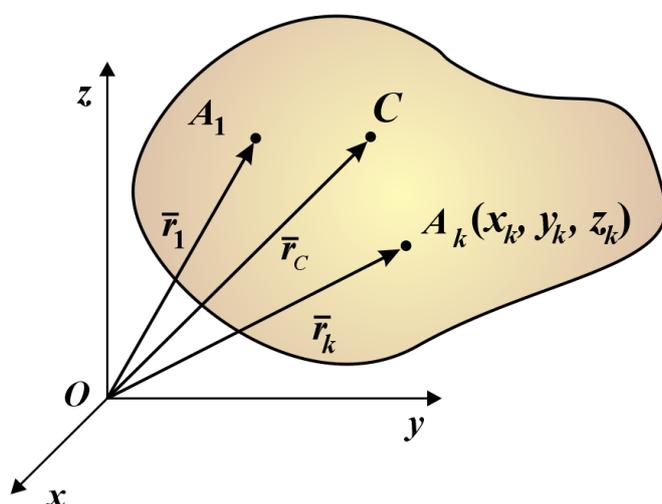


Рис 2.1.1

Рассмотрим движение механической системы  $\{A_k\}_n$  точек (рис. 2.1.1). Пусть  $m_k$  масса точки  $A_k$ ,  $x_k, y_k, z_k$  – её координаты,  $\bar{r}_k$ , её радиус-вектор.

Величина

$$M = \sum_{k=1}^n m_k$$

называется массой системы.

Точка  $C$  пространства, ра-

диус-вектор которой

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k$$

называется центром масс системы.

В однородном поле тяготения центр масс совпадает с центром тяжести. Иногда центр масс называют центром инерции.

**Координаты центра масс:**

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (2.1.2)$$

При движении системы  $\{M_k\}_n$  точек центр масс будет также двигаться.

Скорость центра масс:

$$\bar{v}_C = \frac{d\bar{r}_C}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k \quad (2.1.3)$$

Ускорение центра масс:

$$\bar{a}_C = \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k \quad (2.1.4)$$

Здесь  $\bar{v}_k$  – скорость и  $\bar{a}_k$  – ускорение точки  $M_k$ .

Величина

$$\bar{S}_O = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k$$

называется статическим моментом механической системы относительно центра  $O$ .

Поскольку  $\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C$ , то  $\bar{S}_O = M\bar{r}_C$  и  $\bar{r}_C = \frac{\bar{S}_O}{M}$ .

Отсюда видно, что если центр  $O$  совпадает с центром масс, то статический момент равен нулю.

$$O \in C \Rightarrow \bar{S}_O = \bar{S}_C = 0$$

Выражения

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k = S_{Oyz}; \quad \sum_{k=1}^n m_k y_k = S_{Oxz}; \quad \sum_{k=1}^n m_k z_k = S_{Oyx}$$

называют статическими моментами системы относительно координатных плоскостей:

Очевидно, что

$$M x_C = S_{Oyz}, \quad M y_C = S_{Oxz}, \quad M z_C = S_{Oxy}.$$

Если  $x_C$ ,  $y_C$ , или  $z_C$  равны нулю, то и соответствующий статический момент равен нулю.

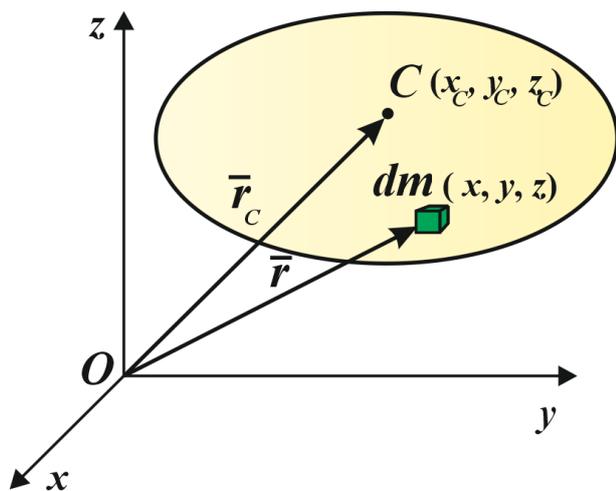


Рис. 2.1.2

Рассмотрим твёрдое тело  $(\gamma)$  (рис. 2.1.2). Выделим в нем элементарный элемент массой  $dm$ . Пусть  $\bar{r}$  радиус-вектор этого элемента, его координаты  $x, y, z$ .

Тогда масса твёрдого тела

$$M = \int_{(\gamma)} dm.$$

Радиус-вектор центра масс

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M} \int_{(\gamma)} \bar{r} dm.$$

Координаты центра масс

$$x_C = \frac{1}{M} \int_{(\gamma)} x dm, \quad y_C = \frac{1}{M} \int_{(\gamma)} y dm, \quad z_C = \frac{1}{M} \int_{(\gamma)} z dm.$$

Скорость и ускорение центра масс твёрдого тела найдутся по формулам:

$$\bar{v}_C = \frac{1}{M} \int_{(\gamma)} \bar{v} dm, \quad \bar{a}_C = \frac{1}{M} \int_{(\gamma)} \bar{a} dm,$$

Здесь  $\bar{v}$  и  $\bar{a}$  скорость и ускорение произвольной точки тела.

Статические моменты твёрдого тела запишутся так:

$$\bar{S}_O = \int_{(\gamma)} \bar{r} dm = M \bar{r}_C \text{ – статический момент относительно центра } O;$$

$$\left. \begin{aligned} S_{Oyz} &= \int_{(\gamma)} x dm = Mx_C; \\ S_{Oxz} &= \int_{(\gamma)} y dm = My_C; \\ S_{Oxy} &= \int_{(\gamma)} z dm = Mz_C. \end{aligned} \right\}$$

статические моменты относительно координатных плоскостей.

## 2.2. Моменты инерции

Положение центра масс не может полностью характеризовать распределение масс М.С. и Т.Т., вследствие чего при изучении динамики М.С. вводится характеристика распределения масс – момент инерции данного тела (системы) относительно точки, оси или плоскости.

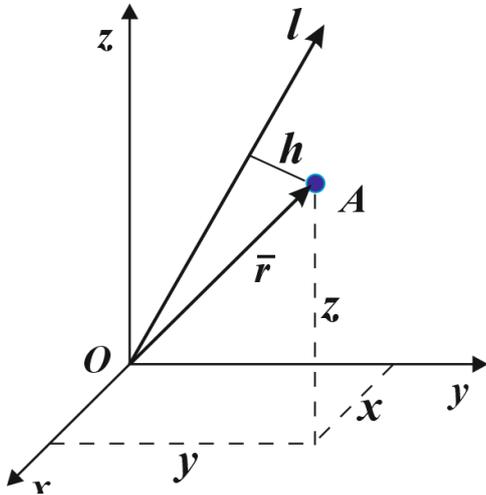


Рис. 2.2.1

### а. Полярный момент инерции

Моментом инерции точки относительно центра  $O$  (*полярным моментом инерции*) называют произведение массы точки на квадрат расстояния от точки до центра  $O$  (рис. 2.2.1):

$$I_O = m \cdot r^2.$$

Рассмотрим М.С.  $\{A_k\}_n$  материальных точек.

Пусть  $m_k$  масса точки  $A_k$ ,  $x_k, y_k, z_k$  – её координаты.  $\bar{r}_k$ , её радиус-вектор.

Моментом инерции М.С. относительно центра (*полярным моментом инерции*) называется сумма произведений масс точек М.С. на квадраты их расстояний до центра.

$$I_O = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2.$$

### б. Осевой момент инерции

*Осевым моментом инерции точки* относительно оси  $l$  называют произведение массы точки на квадрат расстояния от точки до оси  $l$ :

$$I_l = m \cdot h^2.$$

Осевые моменты инерции точки относительно осей прямой декартовой системы координат:

$$I_x = m(y^2 + z^2), \quad I_y = m(x^2 + z^2), \quad I_z = m(x^2 + y^2).$$

Осевым моментом инерции (моментом инерции М.С. относительно оси) называется величина, равная сумме произведений масс частиц М.С. на квадрат их расстояний до оси.

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad I_y = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2), \quad I_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Сложив осевые моменты инерции, получим:

$$I_x + I_y + I_z = 2 \cdot m (x^2 + y^2 + z^2), \quad 2I_O = I_x + I_y + I_z.$$

Осевой момент инерции часто представляют в виде произведения массы М.С. на квадрат некоторой длины  $i$ . Например

$$I_z = M i^2$$

Величина  $i$  называется радиусом инерции тела относительно данной оси. Радиус инерции тела равен тому расстоянию оси, на которое нужно поместить точку с массой равной массе тела, чтобы её момент инерции относительно оси был равен моменту инерции всего тела.

Для тел с непрерывным распределением массы осевые моменты инерции определяются интегралами по массе:

$$I_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm.$$

### ***в. Центробежный момент инерции***

Центробежные моменты инерции (*произведения инерции*) учитывают знаки координат.

Для точки:

$$I_{yx} = I_{xy} = m xy, \quad I_{xz} = I_{zx} = m xz, \quad I_{yz} = I_{zy} = m yz.$$

где  $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  – центробежные моменты инерции точки относительно соответствующих осей.

Для механической системы точек с массами  $\{m_k\}$ , координатами  $\{x_k, y_k, z_k\}$ :

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k, \quad I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k.$$

*Центробежным моментом инерции М.С. относительно какой-либо пары координатных осей называют сумму произведений масс точек М.С. на произведение их координат по этим осям*

Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю, тогда как осевые и полярные моменты только положительны.

Для однородных твёрдых тел моменты инерции определяются по следующим формулам

$$I_{xy} = \int_{(M)} x y dm, \quad I_{xz} = \int_{(M)} x z dm, \quad I_{yz} = \int_{(M)} y z dm.$$

Размерность момента инерции  $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

### ***Главные и центральные оси инерции***

Ось координат являются *центральной* осью инерции М.С., если она проходит через центр масс тела. Ось декартовых координат является *главной осью инерции* М.С. в данной точке если оба центробежных момента инерции, содержащиеся в индексах знак этой же оси равны нулю.

Если  $I_{xz} = I_{yz} = 0$ , то  $z$  – главная ось инерции.

Если  $I_{xy} = I_{xz} = 0$ , то  $x$  – главная ось инерции.

Если  $I_{xy} = I_{yz} = 0$ , то  $y$  – главная ось инерции.

Ось главная и проходящая через центр масс тела будет являться *главной центральной осью инерции тела*.

В ряде случаев можно по форме тела сразу указать, какие оси являются главными.

Рассмотрим два случая.

1. Если  $z$  – ось симметрии (рис. 2.2.2), то тело состоит из попарно симметричных относительно оси частичек одинаковой массы с координатами  $(x, y, z)$  и  $(-x, -y, z)$ .

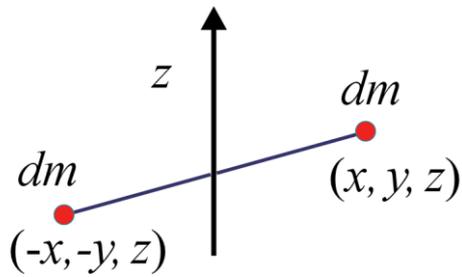


Рис. 2.2.2

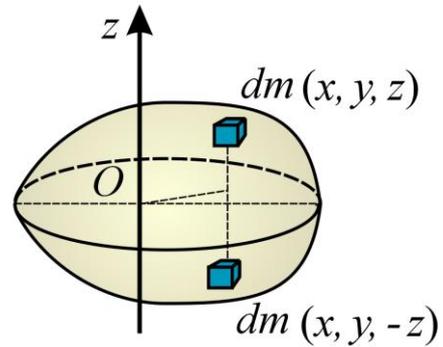


Рис. 2.2.3

Центробежные моменты инерции  $I_{xz}, I_{yz}$  этих двух частичек:

$$I_{xz} = dm(xz - xz) = 0, \quad I_{yz} = dm(yz - yz) = 0.$$

Следовательно, оба центробежных момента инерции частиц, а значит, и всего тела, равны нулю. *Ось симметрии тела – главная ось инерции.*

2. Если ось  $z$  – перпендикулярна плоскости симметрии тела и имеет начало в этой плоскости (рис. 2.2.3), то для двух симметричных частичек тела справедливо:

$$I_{xz} = dm(x \cdot z - x \cdot z) = 0,$$

$$I_{yz} = dm(y \cdot z - y \cdot z) = 0.$$

Следовательно, в этом случае можно сделать вывод: ось, перпендикулярная плоскости симметрии тела и имеющая начало в этой плоскости – главная ось инерции тела.

Например, для прямого кругового конуса все изображённые на рисунке 2.2.4 оси – главные оси инерции:  $z$  – ось симметрии тела,  $x, y_1, y_2, y_3, y_4$  –

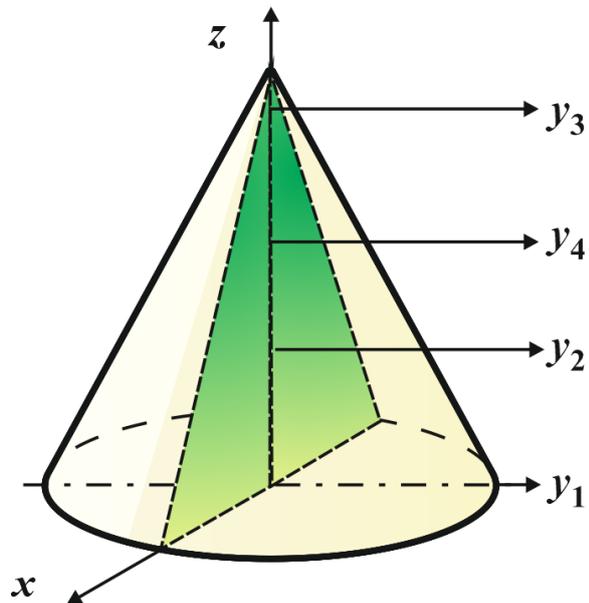


Рис. 2.2.4

оси, перпендикулярные плоскости симметрии тела с началом в этой плоскости.

## 2.3. Моменты инерции относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса-Штейнера

**Теорема.** Момент инерции тела  $I_{z_1}$  относительно некоторой оси  $z$  равен сумме момента инерции  $I_{z_C}$  тела относительно оси  $z_C$ , проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояний между осями:

$$I_{z_1} = I_{z_C} + Md^2$$

где  $M$  – масса тела,  $d$  – расстояние между двумя параллельными осями (рис. 2.3.1).

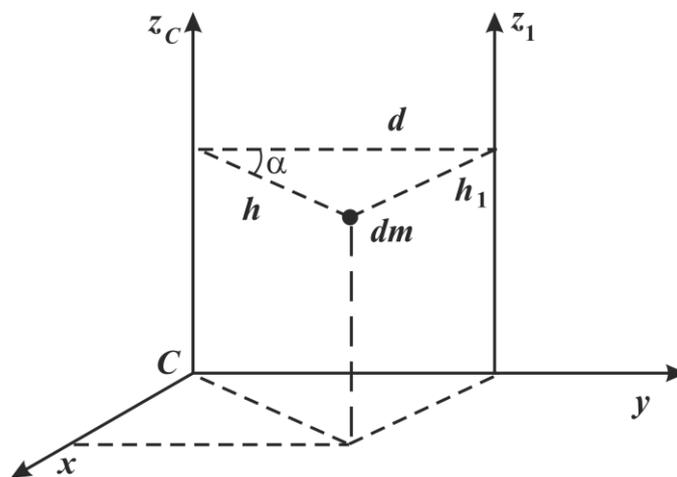


Рис. 2.3.1

Осевые моменты инерции

$$I_{z_C} = \int_{(M)} h^2 dm, \quad I_{z_1} = \int_{(M)} h_1^2 dm.$$

По теореме косинусов найдем

$$h_1^2 = h^2 + d^2 - 2hd \cos \alpha, \quad h \cos \alpha = y,$$

где  $y$  – координата элемента, тогда  $h_1^2 = h^2 + d^2 - 2yd$ .

Подставим полученное выражение в формулу, определяющую момент инерции  $I_{z_1}$ .

$$I_{z1} = \int_{(M)} (h^2 + d^2 - 2yd) dm = \int_{(M)} h^2 dm + d^2 \int_{(M)} dm - 2d \int_{(M)} y dm$$

Первый интеграл равен  $I_{zC}$  по определению, второй – массе тела  $M$ , а третий – нулю, так как:  $\int_{(M)} y dm = y_C = 0$ , поскольку начало координат совпадает с центром масс. Следовательно,

$$I_{z1} = I_{zC} + Md^2$$

## 2.4. Осевые моменты инерции тел простейшей формы

Однородное тонкое кольцо массой  $M$ , радиусом  $R$  (рис. 2.4.1)

Выделим частицу массой  $dm$ , расстояние от частицы до центральной оси  $z$  равно радиусу. Осевым моментом инерции кольца относительно оси  $z$ :

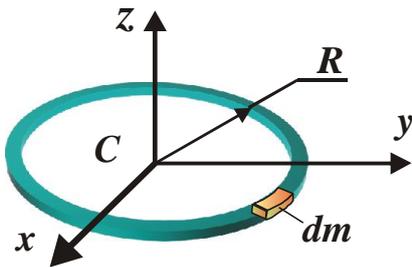


Рис. 2.4.1

$$I_z = \int_{(M)} R^2 dm = R^2 \int_{(M)} dm = M R^2$$

Моменты инерции относительно центра  $C$  кольца и оси  $z$  равны между собой:

$$I_z = I_C = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = M R^2$$

Но известно, что

$$2I_C = I_x + I_y + I_z$$

Следовательно,

$$I_x + I_y = I_C = I_z$$

В силу симметричности тела

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{M R^2}{2}$$

**Однородный тонкий диск массой  $M$ , радиусом  $R$**  (рис. 2.4.2)

Выделим в теле диска однородное тонкое кольцо текущим радиусом  $r$ , толщиной  $dr$ .

Масса элементарного кольца

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2M r}{R^2} dr.$$

Осевой момент инерции элементарного кольца относительно оси  $z$

$$dI_z = dm r^2 = \frac{2M}{R^2} r^3 dr.$$

Осевой момент инерции всего диска относительно оси  $z$  после интегрирования по  $r$

$$I_z = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}.$$

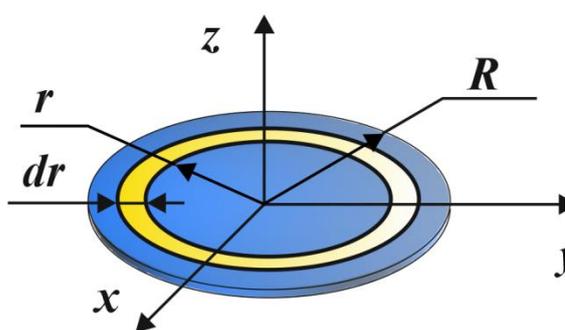


Рис. 2.4.2

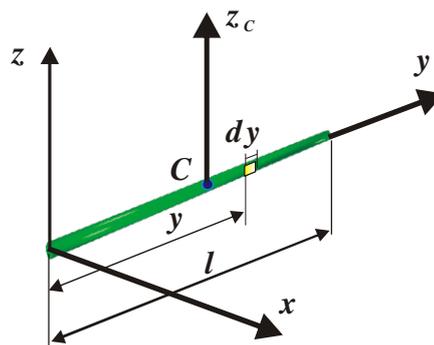


Рис. 2.4.3

Так же, как и для тонкого кольца будем иметь:

$$I_z = I_C = \frac{MR^2}{2}, \quad 2I_C = I_x + I_y + I_z,$$

$$I_x + I_y = I_C = \frac{MR^2}{2},$$

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{MR^2}{4}.$$

**Тонкий стержень массой  $M$ , длиной  $l$**  (рис. 2.4.3)

Выделим в стержне частицу длиной  $dy$ . Масса частицы

$$dm = \frac{M}{l} dy.$$

Осевые моменты инерции относительно осей  $z$  и  $x$  равны:

$$I_z = I_x = \frac{M}{l} \int_0^l y^2 dy = \frac{M l^2}{3}. \quad (2.4.1)$$

Подсчитаем моменты инерции стержня относительно центральных осей  $z_c, x_c$ .

Считая, что стержень состоит из двух половинок массой  $\frac{M}{2}$ , длиной  $\frac{l}{2}$ , моменты инерции которых относительно этих осей можно считать по формуле (2.4.1), получим:

$$I_{z_c} = I_{x_c} = 2 \cdot \frac{M}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{M l^2}{12}.$$

## 2.5. Тензор инерции

Рассмотрим момент инерции М.С. относительно произвольной оси центрального пучка (рис. 2.5.1). Пусть  $l$  – произвольная ось, проходящая через точку  $O$ . Направляющие косинусы которой  $\alpha, \beta, \gamma$ .

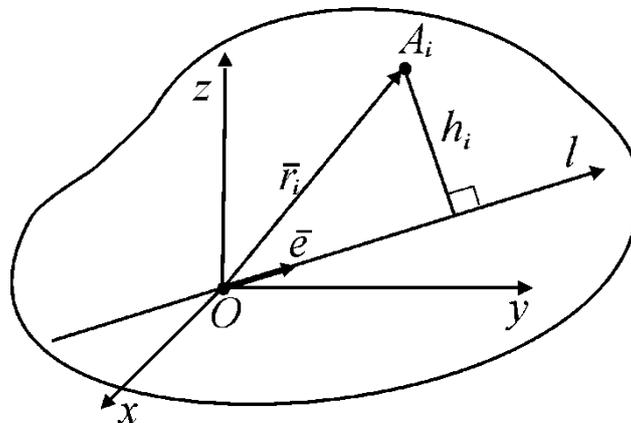


Рис 2.5.1

Момент инерции М.С. запишется в виде

$$I_l = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i \left( \bar{r}_i^2 - (\bar{r}_i \cdot \bar{e})^2 \right)$$

Во многих случаях это выражение удобно записывать с помощью матриц. Любому трехмерному вектору  $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$  можно поставить в соответствие матрицу-столбец

$$\bar{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

$\bar{r}_i^T = [x_i \quad y_i \quad z_i] \rightarrow$  транспонированная матрица – вектор-строка.

Вектор

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad \bar{e}^T = [\alpha \quad \beta \quad \gamma].$$

В этом случае скалярное произведение векторов можно представить в виде

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = [\bar{a}^T][\bar{b}] = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Кроме того, введем так называемое *диадное произведение* векторов или *диаду* (тензорное произведение).

$$\bar{a} \otimes \bar{b} = [\bar{a}][\bar{b}^T] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}.$$

Квадрат скалярного произведения  $\bar{r}_i \cdot \bar{e}$  можно представить в виде

$$(\bar{r}_i \cdot \bar{e})^2 = ([\bar{e}^T][\bar{r}_i])([\bar{r}_i^T][\bar{e}]) = [\bar{e}^T]([\bar{r}_i][\bar{r}_i^T])[\bar{e}].$$

Здесь выделена диада  $([\bar{r}_i][\bar{r}_i^T]) = \bar{r}_i \otimes \bar{r}_i$ .

Далее можно записать  $[\bar{e}^T] \mathbf{E} [\bar{e}] = 1$ , где  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  – единичная

матрица.

Нетрудно проверить, что

$$[\bar{e}^T] \mathbf{E} [\bar{e}] = [\alpha \quad \beta \quad \gamma] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Также легко убедиться, что

$$\bar{r}_i^2 = [\bar{e}^T] \mathbf{E} \bar{r}_i^2 [\bar{e}].$$

Теперь для момента инерции относительно оси  $l$  можем в матричной форме записать

$$\begin{aligned} I_l &= \sum_{i=1}^n m_i \left( [\bar{e}^T] \mathbf{E} \bar{r}_i^2 [\bar{e}] - [\bar{e}^T] ([\bar{r}_i] [\bar{r}_i^T]) [\bar{e}] \right) = \\ &= [\bar{e}^T] \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \left( \mathbf{E} \bar{r}_i^2 - [\bar{r}_i] [\bar{r}_i^T] \right) \right\} [\bar{e}]. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\mathbf{I}_O = \sum_{i=1}^n m_i \left( \mathbf{E} \bar{r}_i^2 - [\bar{r}_i] [\bar{r}_i^T] \right) = \sum_{i=1}^n m_i \left( \mathbf{E} \bar{r}_i^2 - \bar{r}_i \otimes \bar{r}_i \right).$$

Эта величина не зависит от ориентации оси  $l$ , а зависит только от радиус-вектора  $\bar{r}_i$ , т.е. от расположения М.С. относительно точки  $O$ . Эта величина получила название *тензор инерции* М.С. в точке  $O$ . Для любой оси, проходящей через точку  $O$  будем иметь

$$I_l = [\bar{e}^T] \mathbf{I}_O [\bar{e}].$$

Рассмотрим подробнее выражение для  $\mathbf{I}_O$ .

Имеем

$$\mathbf{E}\bar{r}_i^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \begin{bmatrix} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) & 0 & 0 \\ 0 & (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \end{bmatrix},$$

$$\bar{r}_i \otimes \bar{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i \\ y_i x_i & y_i^2 & y_i z_i \\ z_i x_i & z_i y_i & z_i^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}\bar{r}_i^2 - \bar{r}_i \otimes \bar{r}_i = \begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + z_i^2 \end{bmatrix}.$$

Теперь легко видеть, что

$$\mathbf{I}_O = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{E}\bar{r}_i^2 - \bar{r}_i \otimes \bar{r}_i) = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}.$$

Тензор инерции М.С. в данной точке представляет собой симметричный тензор второго ранга. Диагональные члены тензора представляют собой осевые моменты инерции. Недиагональные являются центробежными моментами инерции. При движении системы, составляющие тензора инерции изменяются вместе с расположением точек системы друг по отношению к другу и по отношению к принятой системе координат. Исключением является случай твёрдого тела, если тензор инерции вычисляется в системе осей, связанной с телом.

$$\text{Для произвольной оси } I_l = [\bar{e}^T] \mathbf{I}_O [\bar{e}] = \bar{e}^T \mathbf{I}_O \bar{e}.$$

$$I_l = [\alpha \quad \beta \quad \gamma] \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (I_x \alpha - I_{xy} \beta - I_{xz} \gamma) & (-I_{xy} \alpha + I_y \beta - I_{yz} \gamma) & (-I_{zx} \alpha - I_{zy} \beta + I_z \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= I_x \alpha^2 - I_{xy} \beta \alpha - I_{xz} \gamma \alpha - I_{xy} \alpha \beta + I_y \beta^2 - I_{yz} \gamma \beta - I_{zx} \alpha \gamma - I_{zy} \beta \gamma + I_z \gamma^2 = \\
&= I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \beta - 2I_{zx} \alpha \gamma - 2I_{zy} \beta \gamma.
\end{aligned}$$

В итоге

$$I_l = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \beta - 2I_{zx} \alpha \gamma - 2I_{zy} \beta \gamma.$$

## 2.6. Преобразование тензора инерции

Пусть известен тензор инерции  $\mathbf{I}_O$ , в точке  $O$ . Определим его значение в точке  $O' \rightarrow \mathbf{I}_{O'}$ .

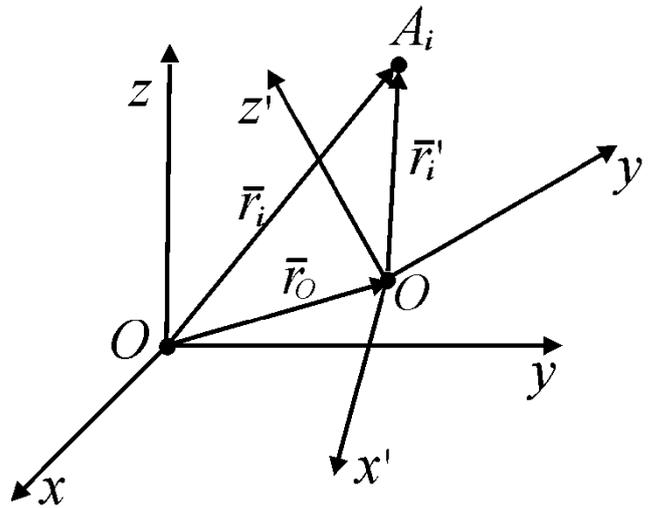


Рис. 2.6.1

Для этого сделаем замену  $\bar{r}_i = \bar{r}_O + \bar{r}'_i$  (рис. 2.6.1).

$$\bar{r}_i^2 = (\bar{r}_O + \bar{r}'_i)^2 = \bar{r}_O^2 + \bar{r}'_i{}^2 + 2\bar{r}_O \cdot \bar{r}'_i;$$

$$\bar{r}_i \otimes \bar{r}_i = (\bar{r}_O + \bar{r}'_i) \otimes (\bar{r}_O + \bar{r}'_i) = \bar{r}_O \otimes \bar{r}_O + \bar{r}_O \otimes \bar{r}'_i + \bar{r}'_i \otimes \bar{r}_O + \bar{r}'_i \otimes \bar{r}'_i.$$

Теперь

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_O &= \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{E} \bar{r}_i^2 - \bar{r}_i \otimes \bar{r}_i) + \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{E} \bar{r}_O^2 - \bar{r}_O \otimes \bar{r}_O) + \sum_{i=1}^n m_i (2\bar{r}_O \cdot \bar{r}'_i) \mathbf{E} - \\
&\quad - \bar{r}_O \otimes \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}'_i - \left( \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}'_i \right) \otimes \bar{r}_O.
\end{aligned}$$

Или

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_{O'} + M \left( \mathbf{E} \bar{r}_O^2 - \bar{r}_O \otimes \bar{r}_O \right) + 2 \bar{r}_O \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{E} \bar{r}'_i - \\ - \bar{r}_O \otimes \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}'_i - \left( \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}'_k \right) \otimes \bar{r}_O.$$

Учтем, что центр масс в подвижной системе можно найти как

$$\bar{r}'_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}'_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}'_i = M \bar{r}'_C.$$

Теперь

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_{O'} + M \left( \mathbf{E} \bar{r}_O^2 - \bar{r}_O \otimes \bar{r}_O \right) + 2 \bar{r}_O \mathbf{E} M \bar{r}'_C - \bar{r}_O \otimes M \bar{r}'_C - M \bar{r}'_C \otimes \bar{r}_O.$$

Это соотношение значительно упрощается, если за центр взять центр масс, т.е.  $\bar{r}'_C = 0$  и  $\bar{r}_O = \bar{r}_C$  (рис. 2.6.2)

Тогда получим

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_C + M \left( \mathbf{E} \bar{r}_C^2 - \bar{r}_C \otimes \bar{r}_C \right).$$

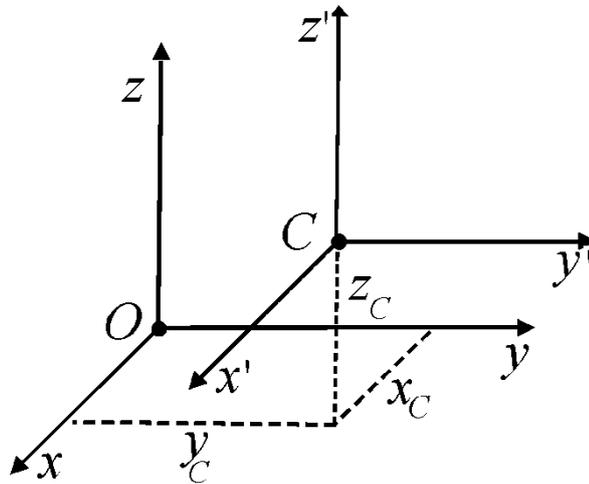


Рис. 2.6.2

Здесь  $\bar{r}_O = \bar{r}_C$  – радиус-вектор центра масс относительно центра O.

В частности, если оси «старой» и «новой» систем координат параллельны друг другу, т.е.  $Ox \parallel Cx'$ ,  $Oy \parallel Cy'$ ,  $Oz \parallel Cz'$  (рис. 2.13), получим:

$$\mathbf{E}\bar{r}_C^2 - \bar{r}_C \otimes \bar{r}_C = \begin{bmatrix} (y_C^2 + z_C^2) & (-x_C y_C) & (-x_C z_C) \\ (-y_C x_C) & (x_C^2 + z_C^2) & (-y_C z_C) \\ (-z_C x_C) & (-z_C y_C) & (x_C^2 + y_C^2) \end{bmatrix}.$$

Тензор  $\mathbf{I}_O$  приобретает вид

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} (I_{Cx} + M(y_C^2 + z_C^2)) & (-I_{Cxy} - M x_C y_C) & (-I_{Cxz} - M x_C z_C) \\ (-I_{Cxy} - M y_C x_C) & (I_{Cy} + M(x_C^2 + z_C^2)) & (-I_{Czy} - M y_C z_C) \\ (-I_{Cxz} - M z_C x_C) & (-I_{Czy} - M z_C y_C) & (I_{Cz} + M(x_C^2 + y_C^2)) \end{bmatrix}.$$

Видим, что для осевых моментов инерции выполняются зависимости:

$$I_{Ox} = I_{Cx} + M d^2,$$

где  $d^2 = z_C^2 + y_C^2$  – квадрат расстояния между осями.

**Теорема Гюйгенса:** Момент инерции М.С. относительно оси равен моменту инерции М.С. относительно параллельной ей центральной оси сложенного с произведением массы на квадрат расстояния между осями.

Для центробежных моментов инерции имеем следующие зависимости.

$$I_{Oxy} = I_{Cxy} + M x_C y_C.$$

## 2.7. Эллипсоид инерции

Для данной механической системы с каждой точкой пространства удобно увязывать геометрический образ тензора инерции, называемый эллипсоидом инерции. Для этого проведём через точку  $O$  центральный пучок осей, каждая из которых определяется своими направляющими косинусами  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Для каждой из осей момент инерции может быть представлена в виде

$$I_l = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha\beta - 2I_{zx} \alpha\gamma - 2I_{zy} \beta\gamma.$$

Построим поверхность, точки которой удалены от начала системы координат на расстояние

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_l}}.$$

Здесь  $I_l$  – осевой момент инерции тела относительно оси  $l$ , проходящей через начало системы координат,  $N$  – точка поверхности, лежащая на этой оси. Найдём уравнение этой поверхности (рис. 2.7.1).

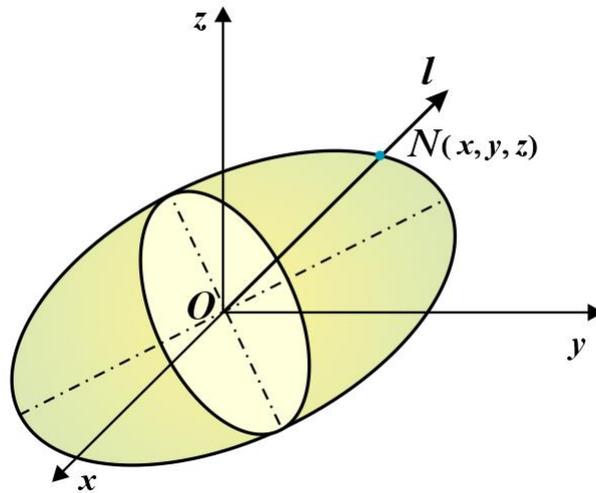


Рис. 2.7.1

Направляющие косинусы оси  $l$  можно выразить через координаты точки  $N$ :

$$\alpha = \frac{x}{ON} = x \cdot \sqrt{I_l}, \quad \beta = \frac{y}{ON} = y \cdot \sqrt{I_l}, \quad \gamma = \frac{z}{ON} = z \cdot \sqrt{I_l}.$$

Подставим эти выражения в формулу для  $I_l$

$$I_l = I_x x^2 I_l + I_y y^2 I_l + I_z z^2 I_l - 2I_{xy} xy I_l - 2I_{xz} xz I_l - 2I_{yz} yz I_l,$$

Сокращая, получаем:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{xz} xz - 2I_{yz} yz = 1. \quad (2.7.1)$$

Здесь  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  – осевые и центробежные моменты инерции тела.

Уравнение (2.7.1) – уравнение поверхности второго порядка. Эта поверхность замкнута и не вырождена, если  $I_l \neq 0$ . Известно, что такой поверхностью является поверхность эллипсоида.

В осях симметрии  $Ox'y'z'$  уравнение эллипсоида будет иметь вид:

$$I_{x'} x'^2 + I_{y'} y'^2 + I_{z'} z'^2 = 1.$$

Следовательно, оси симметрии эллипсоида инерции являются главными осями инерции тела в точке  $O$  ( $I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0$ ).

Эллипсоид имеет не менее 3-х взаимно перпендикулярных осей симметрии. Это говорит о том, что через любую точку тела можно провести не менее 3-х главных осей инерции.

Рассмотрим два случая симметрии эллипсоида

а) Пусть два осевых момента инерции относительно главных осей равны,

например,  $I_{x'} = I_{y'}$ . Эллипсоид принимает форму эллипсоида вращения относительно третьей оси. Этот случай можно назвать *цилиндрической симметрией*.

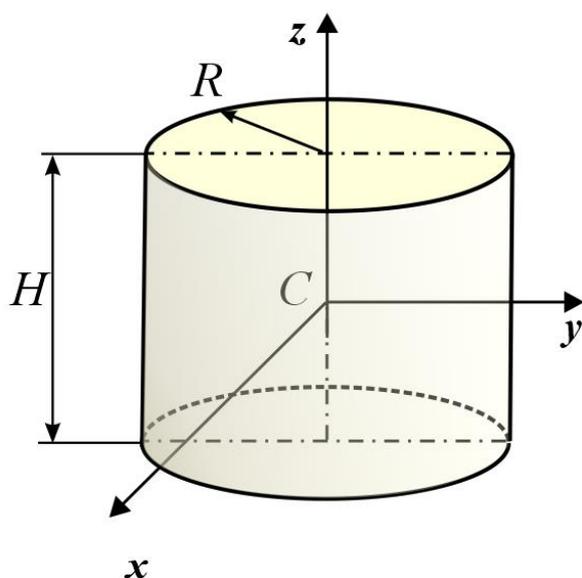


Рис. 2.7.2

Например, у однородного цилиндра радиусом  $R$  и высотой  $H$  (рис. 2.7.2) центральные оси  $Cx, Cy, Cz$  – оси симметрии, и, следовательно, главные оси инерции.

Известно, что

$$I_x = I_y = \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{H^2}{3} \right), \quad I_z = \frac{mR^2}{2}.$$

Эллипсоид инерции цилиндра в точке  $C$  и всех других точках оси  $z$  – поверхность вращения около оси  $z$ . В этом случае все оси, перпендикулярные оси  $z$ , – главные оси инерции, моменты инерции тела относительно любых таких осей одинаковы:

$$I_x = I_y = \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{H^2}{3} \right).$$

Тензор инерции цилиндра в таких осях имеет диагональный вид:

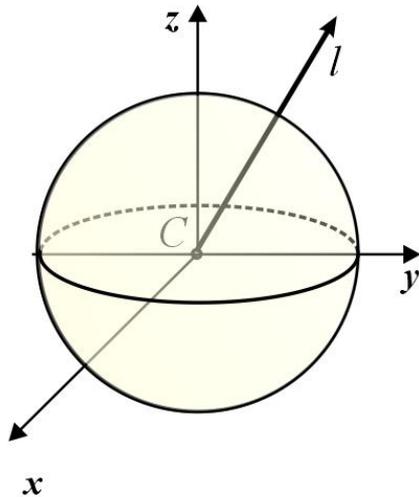
$$I_C = \begin{pmatrix} \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} m.$$

б) Пусть все три момента инерции относительно главных осей равны:

$$I_{x'} = I_{y'} = I_{z'}.$$

Это – случай «шаровой» симметрии (рис. 2.7.3).

Эллипсоид инерции – сфера радиусом



$$R_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\sqrt{I_{x'}}}.$$

Следовательно, осевые моменты инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр такого эллипсоида, равны.

Любая ось  $l$ , проходящая через т.  $C$  – главная ось инерции. Это видно из того, что уравнение эллипсоида в любых взаимно - перпендикулярных

Рис. 2.7.3

осях  $Cx'y'z'$  будет таким:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R_{\mathcal{O}}^2,$$

или

$$I_{x'}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 1.$$

Это означает, что все центробежные моменты инерции тела с таким эллипсоидом равны нулю:

$$I_{x'y'} = I_{y'z'} = I_{x'z'} = 0.$$

# 3. Общие теоремы динами- КИ

Задача об интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки, представляющая даже в случае одной точки некоторые трудности, становится подчас непосильной, когда приходится иметь дело с движением механической системы.

В некоторых задачах достаточно бывает определить изменение некоторых суммарных мер движения системы в целом, т.е. *динамически мер движения системы* (количества движения, кинетического момента относительно какого-либо центра или оси кинетической энергии) в зависимости от *суммарных мер действия сил* (главный вектор и главный момент приложенных сил, работа сил, потенциальная энергия).

Такого рода соотношения между изменениями во времени суммарных мер движения системы материальных точек и суммарными мерами действия приложенных к точкам совокупности сил выражают *общие теоремы динамики механической системы*, применяемые как для отдельных точек и их систем, так и для сплошных сред.

Общие теоремы динамики могут быть выведены из дифференциальных уравнений движения как в дифференциальной, так и в конечной (интегральной) формах.

С помощью общих теорем динамики можно получить лишь некоторые, наиболее общие сведения о движении механической системы в целом. Исчерпывающие сведения о движении каждой точки может дать только полное интегрирование дифференциальных уравнений движения системы.

### 3.1. Количество движения материальной точки и механической системы

Количество движения есть первая, векторная мера механического движения. Для материальной точки массы  $m$ , движущейся в пространстве  $Oxyz$  со скоростью  $\bar{v}$ , количество движения точки есть вектор, равный произведению массы точки на её скорость (рис. 3.1.1):

$$\bar{q} = m\bar{v}.$$

Проекции количества движения на координатные оси соответственно равны:

$$q_x = mv_x = m\dot{x}, \quad q_y = mv_y = m\dot{y}, \quad q_z = mv_z = m\dot{z}.$$

Рассмотрим движение механической системы  $\{A_k\}_n$  материальных точек в пространстве  $Oxyz$ . Пусть точка  $A_k$ , радиус-вектор которой  $\bar{r}_k$  и масса  $m_k$ , движется со скоростью  $\bar{v}_k$ . Количество движения этой точки  $\bar{q}_k = m\bar{v}_k$  (рис. 3.1.2).

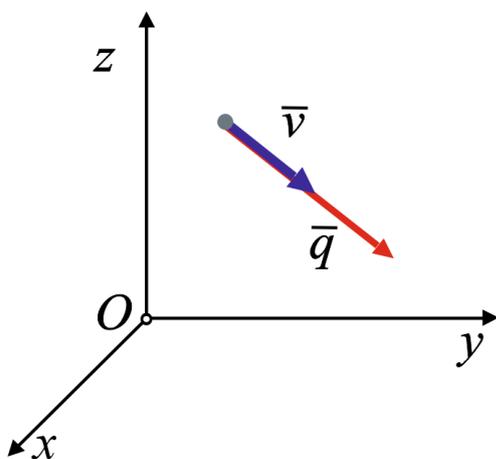


Рис. 3.1.1

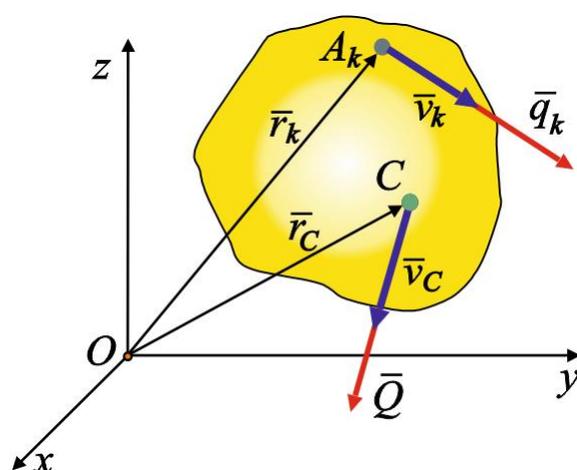


Рис. 3.1.2

Количеством движения механической системы называют сумму количеств движений точек системы:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k.$$

Вектор  $\bar{Q}$  называют также *главным вектором количеств движения точек механической системы*.

Проекция количества движения  $\bar{Q}$  на оси прямоугольной декартовой системы координат имеют вид

$$Q_x = \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = \sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_k, \quad Q_y = \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = \sum_{k=1}^n m_k \dot{y}_k, \quad Q_z = \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = \sum_{k=1}^n m_k \dot{z}_k.$$

Размерность количества движения  $[Q] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ .

Поскольку скорость центра масс механической системы равна (см. 2.1.3)

$$\bar{v}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k}{M}, \quad \text{то} \quad M \bar{v}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k,$$

где  $M = \sum_{k=1}^n m_k$  – масса системы.

Получаем

$$\bar{Q} = M \bar{v}_c. \tag{3.1.1}$$

*Количество движения механической системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс.*

Проекция вектора количества движения системы на оси прямоугольной декартовой системы координат соответственно:

$$Q_x = M v_{Cx}; \quad Q_y = M v_{Cy}; \quad Q_z = M v_{Cz}. \tag{3.1.2}$$

Количество движения твердого тела может быть найдено по тем же формулам, как для механической системы.

## 3.2. Теоремы о количестве движения

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из  $\{A_k\}_n$  материальных точек в инерциальной системе отсчета  $Oxuz$ . Силы, действующие на точки системы, разделим на внешние  $\{\bar{F}_k^e\}_n$  и внутренние  $\{\bar{F}_k^i\}_n$  (рис. 3.2.1).

Пусть точка  $A_k$  массой  $m_k$  движется под действием силы  $\bar{F}_k^e$ , являющейся равнодействующей внешних сил, действующих на данную точку, и  $\bar{F}_k^i$ , являющейся равнодействующей внутренних сил, действующих на данную точку,  $\bar{a}_k$  – ускорение точки.

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из  $\{A_k\}_n$  материальных точек в инерциальной системе отсчета  $Oxyz$ . Силы, действующие на точки системы, разделим на внешние  $\{\bar{F}_k^e\}_n$  и внутренние  $\{\bar{F}_k^i\}_n$  (рис. 3.2.1). Пусть точка  $A_k$  массой  $m_k$  движется под действием силы  $\bar{F}_k^e$ , являющейся равнодействующей внешних сил, действующих на данную точку, и  $\bar{F}_k^i$ , являющейся равнодействующей внутренних сил, действующих на данную точку,  $\bar{a}_k$  – ускорение точки.

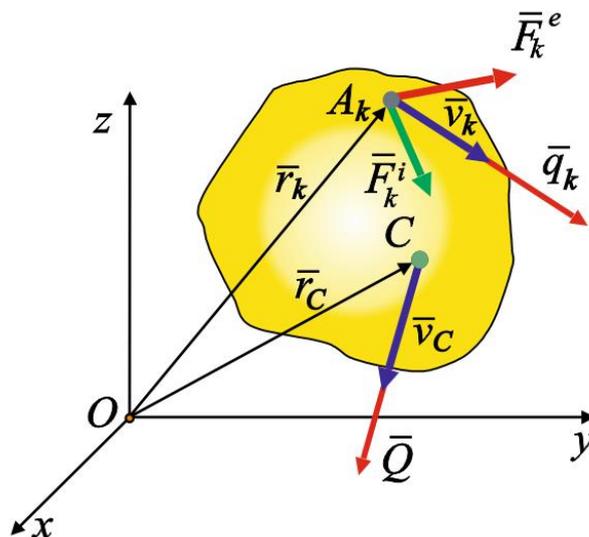


Рис. 3.2.1

В соответствии с основным законом динамики точки можем записать

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i,$$

или

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

Если массы отдельных точек системы остаются постоянными, то последнее выражение можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}(m_k \bar{v}_k) = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i,$$

или

$$\frac{d\bar{q}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i. \quad (3.2.1)$$

Уравнение (3.2.1) выражает **теорему о количестве движения для точки в дифференциальной форме**: производная по времени от количества движения точки равна сумме сил, действующих на точку.

Записывая выражения (3.2.1) для всех точек системы и суммируя их, получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\bar{q}_k}{dt} = \frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i.$$

Здесь  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = \bar{U}^e$  – главный вектор внешних сил системы.

$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0$ , так как внутренние силы системы попарно равны и

противоположны.

В итоге получаем

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{U}^e. \quad (3.2.2)$$

Это **теорема о количестве движения механической системы в дифференциальной форме**: производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на точки системы.

Проецируя (3.2.2) на оси неподвижной системы координат, получим:

$$\frac{dQ_x}{dt} = U_x^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = U_y^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = U_z^e.$$

Производные по времени от проекций количества движения механической системы на оси координат равны проекциям на те же оси главного вектора внешних сил, действующих на точки системы.

Если масса всей системы  $M = \sum_{k=1}^n m_k$  остается постоянной, то выраже-

ние (3.2.2) можно представить в виде

$$M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{U}^e, \text{ или } M \bar{a}_C = \bar{U}^e. \quad (3.2.3)$$

Уравнение (3.2.3) выражает **теорему о движении центра масс механической системы**: центр масс механической системы движется как материальная точка с массой равной массе всей системы под действием силы, равной главному вектору внешних сил, действующих на точки системы.

Проецируя равенство (3.2.3) на оси координат, получаем:

$$m\ddot{x}_C = U_x^e; \quad m\ddot{y}_C = U_y^e; \quad m\ddot{z}_C = U_z^e.$$

Это дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы в координатной форме.

### **Законы сохранения количества движения**

Пусть главный вектор внешних сил, действующих на точки системы, равен нулю, т.е.  $\bar{U}_e = 0$ . Тогда из (3.2.2) следует, что

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{Q} = \text{const.} \quad (3.2.4)$$

Равенство (3.2.4) выражает **закон сохранения количества движения в данном пространстве**: если главный вектор внешних сил, действующих на точки системы, равен нулю, то количество движения системы остается постоянным по величине и направлению.

Для системы, масса которой постоянна, получаем **закон сохранения движения центра масс**:

$$\bar{U}^e = 0 \Rightarrow M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{v}_C = \text{const.} \quad (3.2.5)$$

Если главный вектор внешних сил системы равен нулю, то скорость центра масс системы остается постоянной по величине и направлению.

Предположим, что  $\bar{U}^e \neq 0$ , но одна из его проекций, равна нулю, тогда получаем

$$U_x^e = 0 \Rightarrow \frac{dQ_x}{dt} = 0 \Rightarrow Q_x = \text{const.}$$

Для системы с постоянной массой

$$\bar{U}_x^e = 0 \Rightarrow M \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = \text{const.}$$

Эти равенства выражают закон сохранения проекции количества движения и закон сохранения проекции скорости центра масс.

### Действие пары сил на свободное твердое тело

Если приложить пару сил к свободному твердому телу, то центр масс будет оставаться в покое, поскольку главный вектор пары равен нулю. Под действием пары сил тело начнет вращаться вокруг центра масс.

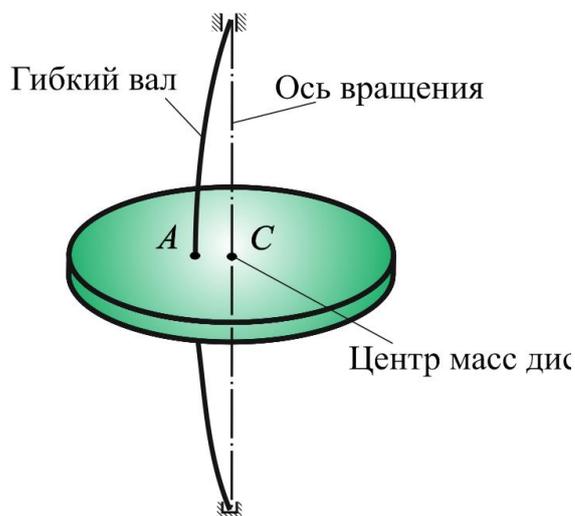


Рис. 3.2.2

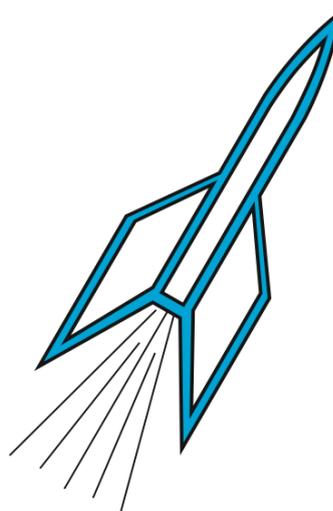


Рис. 3.2.3

Пусть центр масс вращающегося тела (например, маховика) не находится на геометрической оси вращения, тогда при вращении возникают центробежные силы, стремящиеся изогнуть вал, и, передаваясь через подшипники на основание, вызывают вибрации всей машины.

Чтобы бороться с этим вредным, действием, шведский инженер *Лаваль* прибегнул к средству, кажущемуся на первый взгляд парадоксальным. Он уменьшил диаметр вала, насадив рабочее колесо паровой турбины на тонкий и гибкий вал в палец толщиной (рис. 3.2.2). Оказалось, что колесо турбины в этом случае ведет себя как свободное твердое тело под действием пары сил, т.е. приобретает свойство самоцентрирования: при весьма большой угловой скорости вращения гибкий вал изгибается так, что центр масс колеса приближается к геометрической оси вращения.

### Реактивное движение

В реактивном снаряде газообразные продукты сгорания топлива с большой скоростью выбрасываются из сопла (рис. 3.2.3).

При отсутствии влияния сил тяжести и сил сопротивления среды и при нулевой начальной скорости, центр масс системы (ракета-топливо) остаётся на месте, а сама ракета движется вперед.

## ***Импульс силы и теорема импульсов***

Элементарным импульсом  $d\bar{S}$  силы  $\bar{F}$ , действующей в течение времени  $dt$ , называют вектор

$$d\bar{S} = \bar{F}dt.$$

Проекции элементарного импульса  $d\bar{S}$  на оси прямоугольной декартовой системы координат равны:

$$dS_x = F_x dt; \quad dS_y = F_y dt; \quad dS_z = F_z dt.$$

Импульсом силы  $\bar{F}$ , действующей на интервале времени  $(t_0, t)$ , назовем вектор

$$\bar{S} = \int_{t_0}^t \bar{F} dt.$$

Проекции импульса силы на оси координат выражаются формулами

$$S_x = \int_{t_0}^t F_x dt; \quad S_y = \int_{t_0}^t F_y dt; \quad S_z = \int_{t_0}^t F_z dt.$$

Размерность импульса силы

$$[S] = \text{Н} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Запишем теорему о количестве движения в дифференциальной форме:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e.$$

Откуда

$$d\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e dt = \sum_{k=1}^n dS_k^e. \quad (3.2.6)$$

Таким образом, *дифференциал количества движения механической системы равен сумме элементарных импульсов внешних сил, действующих на точки механической системы.*

Интегрируя (3.2.6) на интервале  $[t_1, t_2]$ , получим

$$\int_{\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_2} d\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} d\bar{S}_k^e \quad \text{или} \quad \bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e. \quad (3.2.7)$$

Здесь  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$  – количество движения системы в начальный и конечный моменты времени;  $\bar{S}_k^e$  – импульс равнодействующей внешних сил, действующих на точку.

Выражение (3.2.7) представляет собой математическое выражение **теоремы об изменении количества движения механической системы в интегральной форме или теоремы импульсов**: изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил, действующих на точки механической системы за это время.

В проекциях на оси координат получаем:

$$Q_{x2} - Q_{x1} = \sum S_{kx}^e; \quad Q_{y2} - Q_{y1} = \sum S_{ky}^e; \quad Q_{z2} - Q_{z1} = \sum S_{kz}^e.$$

### **Решение задач**

#### **Программа решения задач на общие теоремы динамики механической системы**

1. Выбрать механическую систему, движение которой необходимо рассмотреть для решения задачи, и указать пространство, в котором надо рассматривать это движение.
2. Указать внешние заданные силы, действующие на точки системы.
3. Назвать внешние связи, наложенные на систему, и заменить их реакциями.
4. Выписать все внешние и внутренние силы, действующие на точки механической системы.
5. Применить общие теоремы динамики для определения искомых величин.

Механические системы обычно представляют собой различные механизмы, кинематические характеристики звеньев которых требуется находить относительно основания механизма. Поэтому пространство, в котором надо рассмотреть движение такой механической системы, должно быть пространством основания. За начало координатных осей этого пространства может быть принята любая точка на основании механизма, положение которой должно быть специально оговорено. На чертеже задачи положение механической системы

показывается в произвольный момент времени. При использовании общих теорем в интегральной форме иногда положение системы целесообразно изобразить в начальном и конечном положениях.

На чертеже показываются внешние заданные силы и реакции внешних связей. Конечно, предварительно надо назвать внешние связи, наложенные на механическую систему. В механических системах, состоящих из твердых и деформируемых тел (механизмы), внутренние силы делятся на два вида: силы взаимодействия между частицами одного и того же тела и силы взаимодействия между телами системы (контактные силы). Следует иметь в виду, что показать все эти силы на чертеже не представляется возможным. Если для решения задачи применяется теорема об изменении кинетической энергии системы или теорема о производной кинетической энергии по времени, то на чертеже следует показать только те внутренние силы, сумма работ или мощностей которых отлична от нуля.

Теорему о количестве движения механической системы удобно применять в том случае, когда силы постоянны или являются функциями времени, а в число данных или неизвестных величин входят: масса, силы, время действия силы, скорости. Для твердого тела эту теорему удобно применять в случае поступательного его движения.

### Пример 3.2.1

Электромотор (рис. 3.2.5, а), массы статора и ротора которого соответственно равны  $M$  и  $m$ , может свободно скользить по неподвижным горизонтальным направляющим.

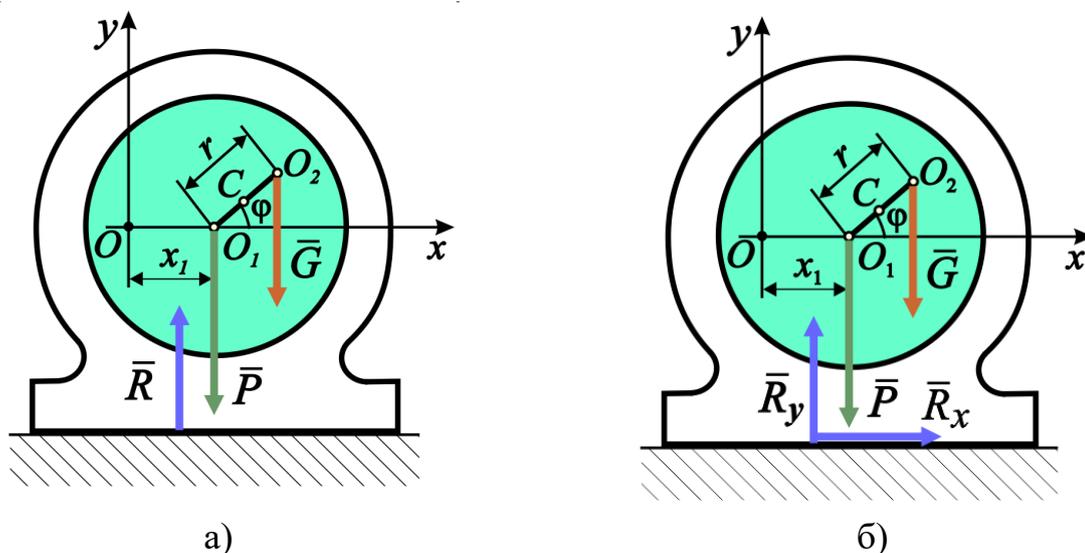


Рис. 3.2.5

Ось вращения ротора проходит через центр тяжести  $O_1$  статора, а центр тяжести  $O_2$  ротора (рис. 3.2.5, б) расположен на малом расстоянии  $r$  (эксцентриситет ротора) от оси вращения. Пренебрегая силами трения между статором и направляющими, определить движение статора и реакцию направляющих. Какова будет эта реакция, если мотор жестко закреплен на основании?

**Решение**

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из ротора и статора, в пространстве неподвижного основания.
2. *Заданными внешними силами*, приложенными к системе, будут сила тяжести статора  $\bar{P}$  и сила тяжести ротора  $\bar{G}$  ( $P = Mg$ ,  $G = mg$ ).
3. *Связь*: гладкая поверхность основания; её реакция –  $\bar{R}$ .
4. Механическая система движется под действием сил

$$\left( \bar{P}, \bar{G}, \bar{R}, \{ \bar{F}_k^i \} \right).$$

5. Для решения задачи составим дифференциальные уравнения движения центра масс при незакрепленном моторе:

$$(M + m)\ddot{x}_C = 0; \quad (M + m)\ddot{y}_C = R - Mg - mg.$$

Координаты центра масс  $C$  системы, состоящей из статора и ротора, равны:

$$x_C = \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m}, \quad y_C = \frac{My_1 + my_2}{M + m} = \frac{m}{M + m} y_2,$$

где  $x_1$  и  $y_1 = 0$  — координаты центра тяжести  $O_1$  статора, а  $x_2, y_2$  — координаты центра тяжести  $O_2$  ротора (рис. 2.5), причем все координаты берутся по отношению к системе координат  $Oxy$ , связанной с неподвижным фундаментом.

Если через  $\omega$  обозначить угловую скорость ротора, то координаты центра масс ротора соответственно равны:

$$x_2 = x_1 + r \cos \varphi = x_1 + r \cos \omega t,$$

$$y_2 = r \sin \varphi = r \sin \omega t.$$

Дважды дифференцируя эти выражения и подставляя эти значения в дифференциальные уравнения движения центра масс, получаем:

$$M \ddot{x}_1 + m \ddot{x}_1 - mr\omega^2 \cos \omega t = 0,$$

$$- mr\omega^2 \sin \omega t = R - Mg - mg.$$

Из первого уравнения можно получить уравнение движения статора, из второго – переменное давление мотора на направляющие. Имеем

$$\ddot{x}_1 = \frac{m}{M + m} r\omega^2 \cos \omega t,$$

откуда

$$\dot{x}_1 = \frac{m}{M + m} r\omega \sin \omega t + C_1 \Rightarrow x_1 = -\frac{m}{M + m} r \cos \omega t + C_1 t + C_2.$$

Замечая, что в начальный момент (до запуска мотора) статор был неподвижен, т. е.  $\dot{x}_1 = 0$  при  $t = 0$ , находим  $C_1 = 0$ . Помещая начало координат  $O$  в начальное положение (при  $\varphi = 0$ ) центра масс  $C$  системы, будем иметь (индекс 0 характеризует начальный момент движения):

$$C_2 = x_{10} + \frac{m}{M + m} r = \frac{Mx_{10} + m(x_{10} + r)}{M + m} = x_{C0} = 0.$$

Окончательно уравнение движения статора будет иметь вид

$$x_1 = -\frac{m}{M + m} r \cos \omega t.$$

Это – гармонические колебания с амплитудой

$$a = \frac{m}{M + m}$$

и частотой, равной угловой скорости вращения ротора.

Из второго уравнения находим

$$R = (M + m)g - mr\omega^2 \sin \omega t.$$

Максимальное и минимальное значения опорной реакции:

$$R_{\max} = (M + m)g + mr\omega^2, \quad R_{\min} = (M + m)g - mr\omega^2.$$

Условие отсутствия вертикального движения статора имеет вид

$$M + m \left( 1 - \frac{r\omega^2}{g} \right) \geq 0,$$

т.е. угловая скорость должна удовлетворять условию

$$\omega^2 \leq \frac{M + m}{m} \frac{g}{r}.$$

При невыполнении этого условия, т.е. при достаточно больших угловых скоростях, статор придет в вертикальное движение.

Если мотор закреплен в направляющих, то центр статора  $O_1$  будет неподвижен и его можно принять за начало координат ( $x_1 = y_1 = 0$ ). Опорная реакция  $\bar{R}$ , будет иметь в этом случае две проекции: горизонтальную и вертикальную (рис. 2.5б)

Дифференциальные уравнения движения центра масс будут иметь вид

$$(M + m)\ddot{x}_c = R_x, \quad (M + m)\ddot{y}_c = R_y - Mg - mg,$$

причем,

$$x_c = \frac{m x_2}{M + m}, \quad y_c = \frac{m y_2}{M + m}.$$

Из этих уравнений находим реакции:

$$R_x = m\ddot{x}_2 = -mr\omega^2 \cos \omega t, \quad R_y = -(M + m)g - mr\omega^2 \sin \omega t.$$

Вертикальная реакция сохранила прежний вид, а за счет уничтожения горизонтальных колебаний появилась горизонтальная реакция. Реакция эта переменна по величине и направлению; максимальное её значение по абсолютной величине равно

$$|R_x|_{\max} = mr\omega^2.$$

### 3.3. Кинетический момент точки и механической системы

#### *Кинетический момент точки относительно центра*

Пусть материальная точка  $A$  массой  $m$  движется со скоростью  $\bar{v}$  в пространстве  $Oxyz$  (рис. 3.3.1),  $\bar{q} = m\bar{v}$  – количество движения точки в этом пространстве.

*Кинетическим моментом точки относительно центра  $O$  (моментом количества движения точки относительно центра  $O$ ) называют величину, равную векторному произведению радиус-вектора точки относительно центра на количество движения точки:*

$$\bar{k}_O = \overline{m} \bar{q} = \bar{r} \times \bar{q} = \bar{r} \times m\bar{v}. \quad (3.3.1)$$

Вектор  $\bar{k}_O$  приложен в центре  $O$  и образует с векторами  $\bar{r}$  и  $\bar{q}$  правую тройку векторов. Модуль кинетического момента равен произведению количества

движения на расстояние от центра до линии действия вектора скорости (рис. 3.3.1).

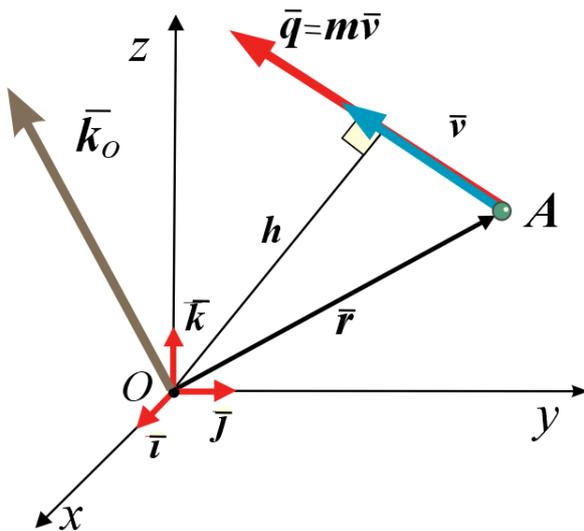


Рис. 3.3.1

$$k_O = qh$$

Кинетический момент точки относительно центра можно представить в матричной форме:

$$\bar{k}_O = \bar{r} \times \overline{m} \bar{v} = m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Здесь  $x, y, z$  – координаты точки;  $v_x, v_y, v_z$  – проекции ее скорости на оси координат.

Проекции кинетического момента на оси координат можно записать, раскрывая определитель (3.3.2) по элементам первой строки:

$$(k_O)_x = m(yv_z - zv_y); (k_O)_y = m(zv_x - xv_z); (k_O)_z = m(xv_y - yv_x). \quad (3.3.3)$$

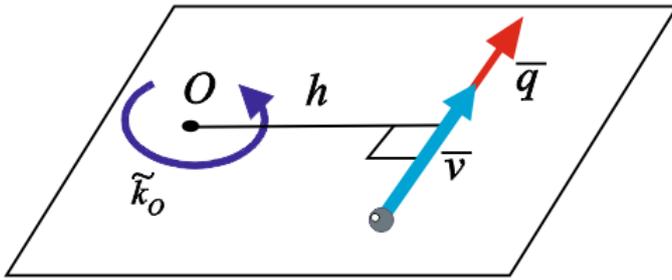


Рис. 3.3.2

В плоскости, проходящей через центр  $O$  и вектор скорости точки, кинетический момент точки относительно центра можно рассматривать как величину алгебраическую и изображать дуговой стрелкой (рис. 3.3.2):

$$\tilde{k}_O = \pm m v h.$$

Знак  $\tilde{k}_O$  берется положи-

тельным, когда кинетический момент направлен против хода часовой стрелки.

### Кинетический момент точки относительно оси

Кинетическим моментом точки относительно оси назовем алгебраический момент проекции количества движения точки на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 3.2.3):

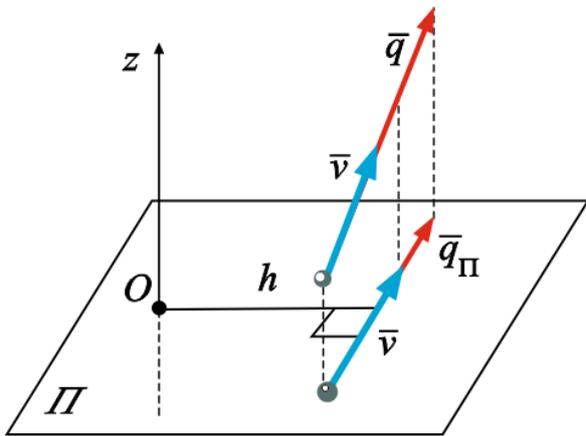


Рис. 3.3.3

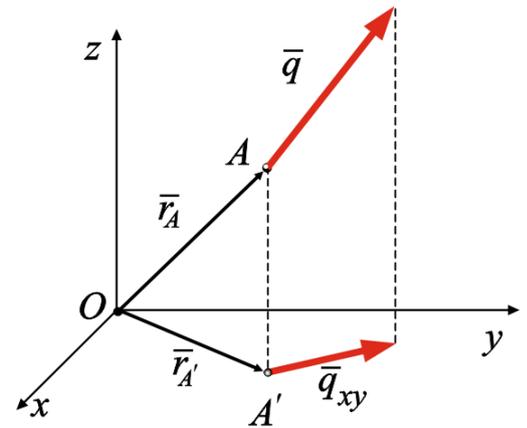


Рис. 3.3.4

$$k_z = \text{mom}_O(m \cdot \bar{v}_\Pi) = \pm m v_\Pi h_\Pi.$$

Величина  $k_z$  считается положительной, если наблюдатель, смотрящий с конца положительного направления оси  $z$ , видит движение точки относительно оси происходящим против хода часовой стрелки.

Кинетические моменты относительно центра  $O$  и оси  $z$ , проходящей через этот центр, связаны зависимостью

$$k_z = (\bar{k}_O)_z. \quad (3.3.4)$$

Проекция кинетического момента точки относительно некоторого центра на ось проходящую через этот центр равна кинетическому моменту точки относительно данной оси.

В самом деле, модули величин в уравнении (3.3.4) равны (рис. 3.3.4):

$$|k_z| = \left| \overline{mom}_O \bar{q}_{xy} \right| = \left| \bar{r}_{A'} \times \bar{q}_{xy} \right| = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & 0 \\ q_x & q_y & 0 \end{vmatrix} = |q_y x - y q_x| = \left| (k_O)_z \right|.$$

Нетрудно проверить и равенство их знаков.

Теперь можем записать:

$$k_x = (\bar{k}_O)_x; \quad k_y = (\bar{k}_O)_y; \quad k_z = (\bar{k}_O)_z.$$

### **Кинетический момент механической системы**

Рассмотрим движение механической системы  $\{A_k\}_n$  материальных точек в пространстве  $Oxyz$ .

Кинетический момент механической системы или главный момент количеств движения точек системы относительно какого-либо центра или оси – это сумма кинетических моментов точек системы относительно того же центра или той же оси:

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^n \bar{k}_{Ok} = \sum_{k=1}^n \overline{mom}_O \bar{q}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k, \quad (3.3.5)$$

$$K_z = \sum_{k=1}^n k_{zk} = \sum_{k=1}^n mom_z \bar{q}_k. \quad (3.3.5)$$

Здесь  $\bar{r}_k$  – радиус-вектор точки  $A_k$ ;  $\bar{v}_k$  – ее скорость;  $m_k$  – масса (рис. 3.3.5).

Проекции кинетического момента системы относительно центра на оси координат с началом в этом центре равны кинетическим моментам системы относительно соответствующих осей координат:

$$\left( \bar{K}_O \right)_x = K_x; \quad \left( \bar{K}_O \right)_y = K_y; \quad \left( \bar{K}_O \right)_z = K_z.$$

## Изменение кинетического момента механической системы при изменении центра

Пусть  $\bar{\rho}_k$  – радиус-вектор точки  $A_k$  относительно произвольной точки  $D$ , а  $\bar{r}_D$  – радиус-вектор точки  $D$  (рис. 3.3.5):

$$\bar{r}_k = \bar{\rho}_k + \bar{r}_D \Rightarrow \bar{\rho}_k = \bar{r}_k - \bar{r}_D.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{K}_D &= \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r}_D \times m_k \bar{v}_k = \\ &= \bar{K}_O - \bar{r}_D \times \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = \bar{K}_O - \bar{r}_D \times \bar{Q} \end{aligned}$$

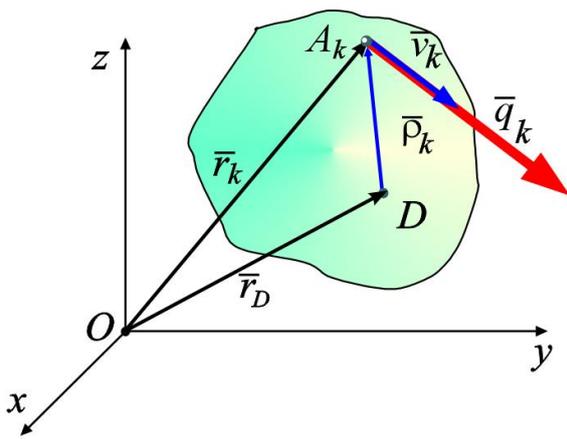


Рис. 3.3.5

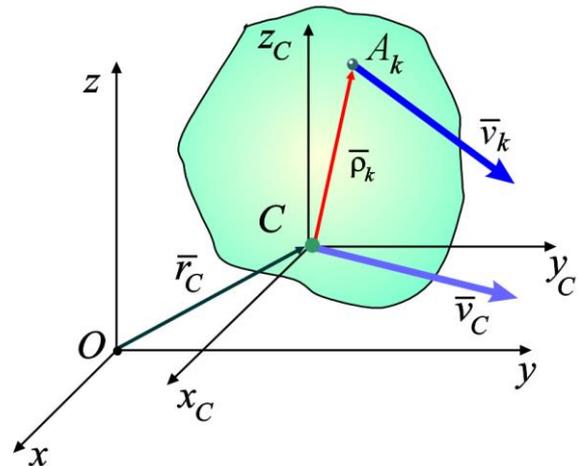


Рис. 3.3.6

Или

$$\bar{K}_O = \bar{K}_D + \bar{r}_D \times \bar{Q}. \quad (3.3.7)$$

Эта формула сохраняет свой вид, если новый центр движется относительно неподвижного центра.

За подвижный центр удобно брать центр масс механической системы – точку  $C$ . В этом случае с центром масс связывают подвижную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно неподвижной. Эту подвижную систему отсчета  $C x_C y_C z_C$  называют *пространством Кёнига* (рис. 3.3.6).

Скорость точки  $A_k$  можно найти по формуле  $\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_k^r$ , где  $\bar{v}_k^r$  – скорость точки в пространстве Кенига.

Теперь

$$\bar{K}_C = \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times \bar{m}_k (\bar{v}_C + \bar{v}_k^r) = \left( \sum_{k=1}^n m_k \bar{\rho}_k \right) \times \bar{v}_C + \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k^r,$$

но  $\sum_{k=1}^n m_k \bar{\rho}_k = 0$ , так как это статический момент механической системы относительно центра масс, а

$\sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k^r = \bar{K}_C^r$  – кинетический момент механической системы в пространстве Кенига. В итоге из формулы (3.3.7) получаем

$$\bar{K}_O = \bar{r}_c \times \bar{Q} + \bar{K}_C^r. \quad (3.3.8)$$



**Кёниг, Иоганн Самуэль** (*Johann Samuel König*; 1712 — 1757,) швейцарский математик и механик. Член-корреспондент Парижской АН, член Берлинской АН, Лондонского Королевского общества, Гёттингенской АН.

Кёниг впервые применил аппарат поступательно перемещающихся координатных осей с началом в текущем положении центра масс твёрдого тела при исследовании динамики такого тела.

Важнейший результат был получен Кёнигом в 1751 г, когда он сформулировал и доказал теорему о кинетической энергии движения абсолютно твёрдого тела по отношению к центру масс (теорема Кёнига); в настоящее время её обычно формулируют применительно к произвольной механической системе..

### ***Кинетический момент твёрдого тела***

Рассмотрим движение твёрдого тела массой  $M$  в пространстве  $Oxuz$  (рис. 3.3.7).

Пусть  $\bar{r}$  – радиус-вектор элемента тела массой  $dm$ , скорость которого  $\bar{v}$ . Тогда для кинетического момента тела относительно центра  $O$  можем записать:

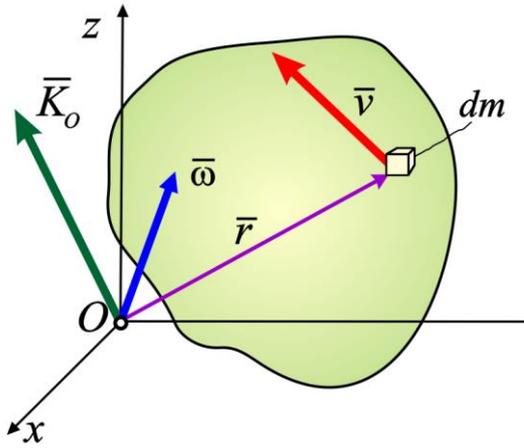


Рис. 3.3.7

$$\bar{K}_O = \int_{(M)} (\bar{r} \times \bar{v}) dm. \quad (3.3.9)$$

Если тело совершает сферическое движение вокруг неподвижной точки  $O$ , то скорость элемента

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Для векторного произведения  $\bar{r} \times \bar{v}$  будем иметь, записав двойное векторное произведение в соответствии с известным правилом:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}); \Rightarrow \bar{r} \times \bar{v} = \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} r^2 - \bar{r}(\bar{r} \cdot \bar{\omega}).$$

Последнее слагаемое запишем в матричной форме:

$$\bar{r}(\bar{r} \cdot \bar{\omega}) = \|\bar{r}\| \cdot \|\bar{r}\|^T \cdot \|\bar{\omega}\| = \|\bar{\omega}\| \cdot (\|\bar{r}\| \cdot \|\bar{r}\|^T) = \bar{\omega}(\bar{r} \otimes \bar{r}).$$

Здесь

$$\|\bar{r}\| = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}; \quad \|\bar{r}\|^T = \begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix},$$

$\bar{r} \otimes \bar{r} = \|\bar{r}\| \cdot \|\bar{r}\|^T$  – диадное (тензорное) произведение векторов.

Теперь можем записать

$$\bar{r} \times \bar{v} = \bar{\omega} (E r^2 - \bar{r} \otimes \bar{r}), \quad (3.3.10)$$

где  $E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  – единичный тензор.

Выражение (3.3.9) с учетом (3.3.10) принимает вид

$$\bar{K}_O = \bar{\omega} \int_{(M)} (E r^2 - \bar{r} \otimes \bar{r}) dm = \bar{\omega} \mathbf{I}_O,$$

где  $\mathbf{I}_O = \int_{(M)} (E r^2 - \bar{r} \otimes \bar{r}) dm$  – тензор инерции твердого тела в точке  $O$ .

В итоге получаем формулу для кинетического момента твердого тела относительно неподвижного центра при сферическом движении

$$\bar{K}_O = \bar{\omega} \mathbf{I}_O = \mathbf{I}_O \bar{\omega}. \quad (3.3.11)$$

Здесь имеется в виду, что умножение вектора на симметричный тензор безразлично слева и справа.

Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, будем иметь

$\bar{\omega} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\omega} \end{vmatrix}^T$  (рис. 3.3.8), следовательно:

$$\bar{K}_O = \mathbf{I}_O \bar{\omega} = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -I_{xz} \\ -I_{yz} \\ I_z \end{vmatrix} \tilde{\omega} = \tilde{\omega} (-I_{xz} \bar{i} - I_{yz} \bar{j} + I_z \bar{k}).$$

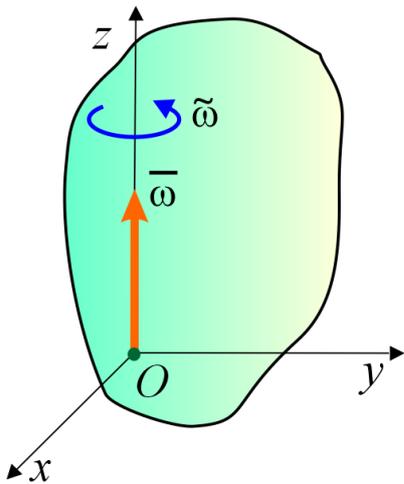


Рис. 3.3.8

Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, относительно оси вращения может быть найден по формуле:

$$\tilde{K}_z = (\bar{K}_O)_z = I_z \tilde{\omega}. \quad (3.3.12)$$

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на алгебраическую угловую скорость.

В общем случае движения твердого тела, взяв за полюс центр масс тела и связав с полюсом пространство Кенига, будем иметь поступательное движение тела со скоростью  $\bar{v}_C$  центра масс и сферическое движение с угловой скоростью  $\bar{\omega}$  вокруг центра масс (рис. 3.3.9).

Кинетический момент тела в пространстве Кенига запишется в виде

$$\bar{K}_C^r = \mathbf{I}_C \cdot \bar{\omega},$$

где  $\mathbf{I}_C$  – тензор инерции тела в центре масс.

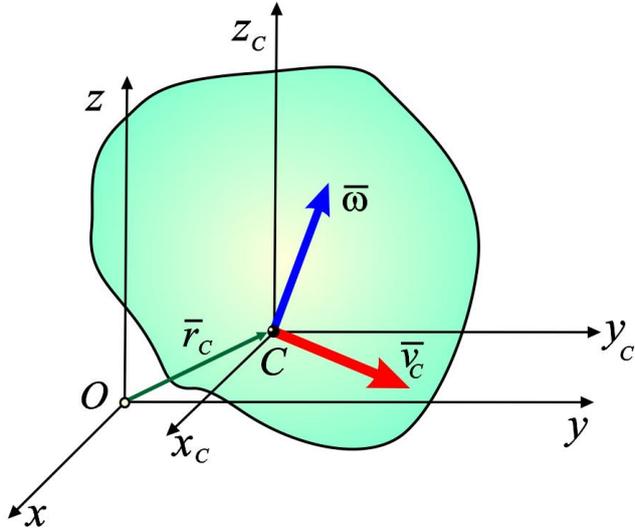


Рис. 3.3.9

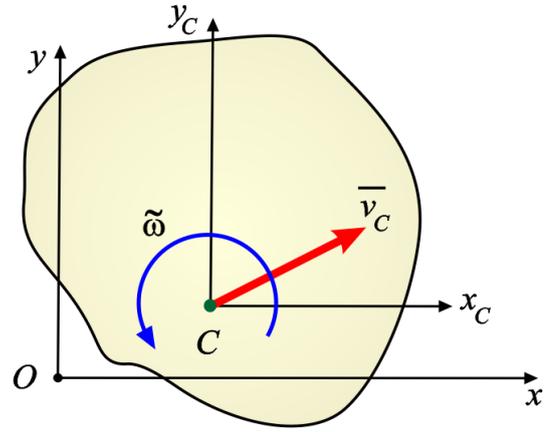


Рис. 3.3.10

Теперь кинетический момент тела относительно неподвижного центра  $O$  (формула 3.6) можем записать в виде

$$\bar{K}_O = \bar{r}_C \times M \bar{v}_C + \mathbf{I}_C \bar{\omega}. \quad (3.3.13)$$

Для *плоского движения* тела кинетический момент в пространстве Кенига можно рассматривать как величину алгебраическую:

$$\tilde{K}_C^r = I_{z_C} \tilde{\omega}, \quad (3.3.14)$$

поскольку здесь относительное движение в *кениговом* пространстве есть вращение вокруг оси  $z_C$ , перпендикулярной основной плоскости (перпендикулярной плоскости рисунка 3.10).

Кинетический момент тела для плоского движения также можно рассматривать как алгебраический и найти по формуле

$$K_O = \text{mom}_O (M \bar{v}_C) + I_{z_C} \tilde{\omega}. \quad (3.3.15)$$

### 3.4. Теоремы о кинетическом моменте

#### Теорема о кинетическом моменте точки

Рассмотрим движение механической системы  $\{A_k\}_n$  материальных точек в инерциальной системе отсчета  $Oxyz$  (рис. 3.4.1). Пусть  $\{\bar{F}_k^e\}_n$  внешние и  $\{\bar{F}_k^i\}_n$  – внутренние силы, действующие на точки системы. Точка  $A_k$  массой  $m_k$  движется под действием силы  $\bar{F}_k^e$ , являющейся равнодействующей внешних сил, действующих на данную точку, и  $\bar{F}_k^i$ , являющейся равнодействующей внутренних сил, действующих на данную точку,  $\bar{a}_k$  – ускорение точки.

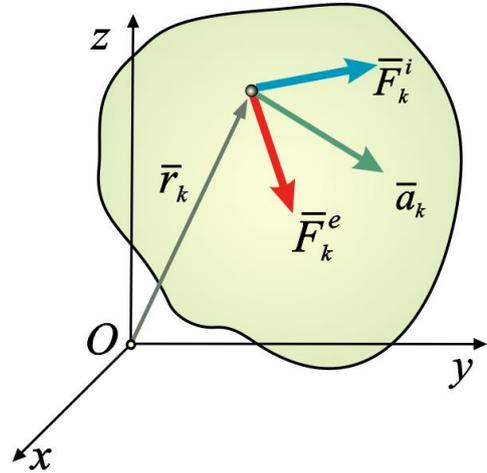


Рис. 3.4.1

Запишем для точки  $A_k$  системы основное уравнение динамики

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$$

и умножим его векторно слева на радиус-вектор  $\bar{r}_k$ :

$$\bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i.$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения:

$$\bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) - \frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{v}_k.$$

Но  $\frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{v}_k = \bar{v}_k \times m_k \bar{v}_k = \mathbf{0}$  как векторное произведение кол-

линейных векторов.

В итоге получаем

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \frac{d\bar{k}_O}{dt} = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i = \sum_{k=1}^n \overline{mom}_O \bar{F}_k,$$

или

$$\frac{dk_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \overline{mom}_O \bar{F}_k, \quad (3.4.1)$$

Проецируя (3.4.1) на оси координат, найдем

$$\frac{dk_x}{dt} = \sum_{k=1}^n mom_x \bar{F}_k; \quad \frac{dk_y}{dt} = \sum_{k=1}^n mom_y \bar{F}_k; \quad \frac{dk_z}{dt} = \sum_{k=1}^n mom_z \bar{F}_k; \quad (3.4.2)$$

Формулы (4.1) и (4.2) **выражают теорему о кинетическом моменте точки**: производная по времени от кинетического момента точки относительно какого-либо центра или оси равна сумме моментов сил, действующих на точку относительно того же центра или оси.

### **Теорема о кинетическом моменте механической системы относительно неподвижного центра**

Записав теорему об изменении кинетического момента для всех точек системы и сложив полученные выражения, получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\bar{k}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \overline{mom}_O \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \overline{mom}_O \bar{F}_k^i$$

В этом выражении:

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\bar{k}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \bar{k}_O = \frac{d\bar{K}_O}{dt} \text{ — производная кинетического момента механической системы относительно центра } O;$$

ханической системы относительно центра  $O$ ;

$$\sum_{k=1}^n \overline{mom}_O \bar{F}_k^e = \bar{L}_O^e \text{ — главный момент внешних сил системы относительно центра } O;$$

относительно центра  $O$ ;

$$\sum_{k=1}^n \overline{mom}_O \bar{F}_k^i = \bar{L}_O^i = 0 \text{ — главный момент внутренних сил системы.}$$

Окончательно имеем

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{L}_O^e. \quad (3.4.3)$$

Спроецировав (4.3) на оси координат получим:

$$\frac{dK_x}{dt} = L_x^e; \quad \frac{dK_y}{dt} = L_y^e; \quad \frac{dK_z}{dt} = L_z^e. \quad (3.4.4)$$

Здесь  $L_x^e, L_y^e, L_z^e$  – главные моменты внешних сил системы относительно осей координат.

Формулы (3.4.3) и (3.4.4) выражают *теорему об изменении кинетического момента механической системы или теорему о кинетическом моменте механической системы в дифференциальной форме*: производная по времени от кинетического момента механической системы относительно какого-либо неподвижного центра или оси равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра или оси.

Из этой теоремы можно, как следствие, получить *законы сохранения кинетического момента*.

1. Если главный момент внешних сил системы относительно центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра постоянен по модулю и направлению:

$$\bar{L}_O^e = 0 \Rightarrow \bar{K}_O = \text{const}. \quad (3.4.5)$$

2. Если главный момент внешних сил системы относительно какой-либо оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси остается постоянным:

$$L_z^e = 0 \Rightarrow K_z = \text{const}. \quad (3.4.6)$$

Выражению (3.4.3) можно придать геометрическую форму, если заметить, что производная от вектора по времени равна скорости конца этого вектора (рис. 3.4.2). В результате формулируется **теорема Резаля**: скорость конца вектора кинетического момента механической системы относительно центра равна главному моменту внешних сил относительно того же центра:

$$\bar{i} = \bar{L}_O^e.$$

Проинтегрировав дифференциальное уравнение (34.3) на некотором интервале времени  $(t_1, t_2)$ , получим теорему о кинетическом моменте механической системы в интегральной форме

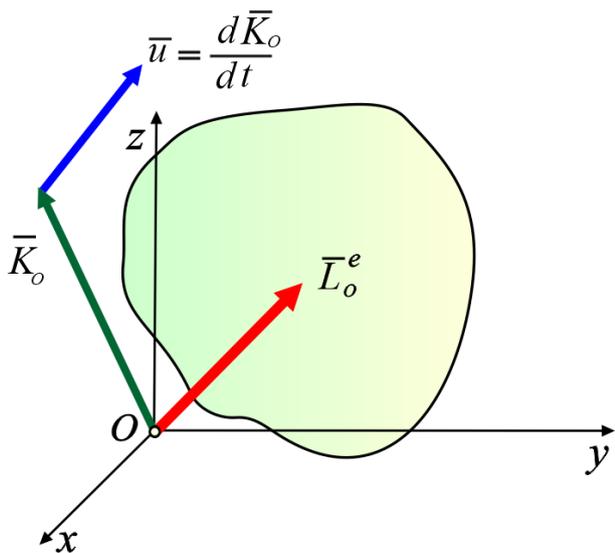


Рис. 3.4.2

$$\bar{K}_{O_1} - \bar{K}_{O_2} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{L}_O^e dt.$$

Здесь  $\bar{K}_{O_1}$  и  $\bar{K}_{O_2}$  – соответственно кинетические моменты механической системы в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , а величина

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{L}_O^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{k=1}^n \overline{mom}_O \bar{F}_k^e \right) dt$$

называется главным импульсом моментов внешних сил.

### **Теорема о кинетическом моменте механической системы относительно подвижного центра**

Рассмотрим движение механической системы  $\{A_k\}_n$  материальных точек в пространстве  $Oxyz$  (рис. 3.4.3). Пусть  $D$  – некоторая произвольная точка этой системы

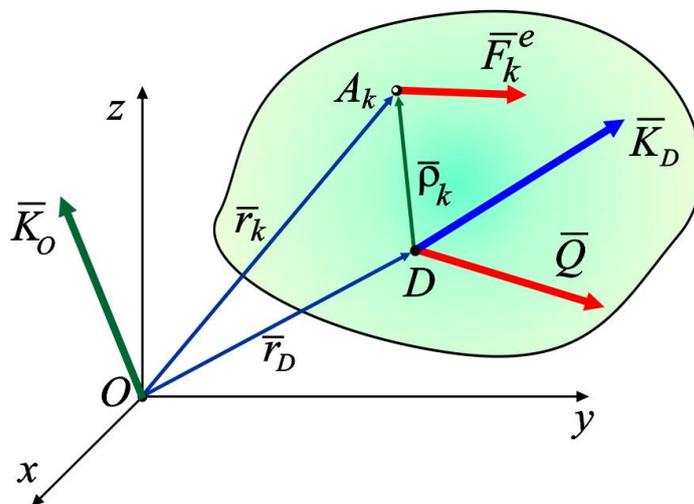


Рис. 3.4.3

Используя полученные ранее выражения (3.7) (4.3), запишем

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}_D \times \bar{Q} + \bar{K}_D) = \frac{d\bar{r}_D}{dt} \times \bar{Q} + \bar{r}_D \times \frac{d\bar{Q}}{dt} + \frac{d\bar{K}_D}{dt} = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_D + \bar{\rho}_k) \times \bar{F}_k^e.$$

Учитывая, что  $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e$ , получим

$$\bar{v}_D \times \bar{Q} + \bar{r}_D \times \left( \frac{d\bar{Q}}{dt} - \sum \bar{F}_k^e \right) + \frac{d\bar{K}_D}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^e,$$

или

$$\frac{d\bar{K}_D}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^e - \bar{v}_D \times \bar{Q}.$$

Здесь  $\sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^e = \bar{L}_D^e$  – главный момент внешних сил относительно

центра  $D$ .

В итоге будем иметь

$$\frac{d\bar{K}_D}{dt} = \bar{L}_D^e - \bar{v}_D \times \bar{Q}. \quad (3.4.8)$$

Если в качестве подвижного центра взять центр масс – точку  $C$ , то (3.4.8) запишется в виде

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{L}_C^e - \bar{v}_C \times \bar{Q}.$$

Но  $\bar{K}_C = \bar{K}_C^r$ , а  $\bar{v}_C \times \bar{Q} = \bar{v}_C \times M \bar{v}_C = 0$ .

Окончательно имеем

$$\frac{d\bar{K}_C^r}{dt} = \bar{L}_C^e. \quad (3.4.9)$$

Можем сформулировать **теорему о кинетическом моменте относительно центра масс**: производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра масс равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы относительно центра масс.

В проекциях на оси кениговой системы координат  $C x_C y_C z_C$  имеем

$$\frac{d K_{x_C}^r}{d t} = L_{x_C}^e, \quad \frac{d K_{y_C}^r}{d t} = L_{y_C}^e, \quad \frac{d K_{z_C}^r}{d t} = L_{z_C}^e. \quad (3.4.10)$$

### Пример 3.4.1

Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат, за концы которого ухватились две обезьянки  $A$  и  $B$  одинакового веса (рис. 3.4.4). Что произойдёт с обезьянкой  $B$ , если обезьянка  $A$  станет подниматься по канату со скоростью  $u$  относительно каната?

#### Решение

1. Рассмотрим движение механической системы (блок, канат, обезьянки) в пространстве основания.
2. Заданные внешние силы: силы тяжести обезьян,  $\bar{P}_A, \bar{P}_B$ ; ( $P_A = P_B = P$ ).
3. Связи: подшипник  $O$  блока. Его реакция  $\bar{R}_O$ .
4. Механическая система движется под действием сил

$$\left( \bar{P}_A, \bar{P}_B, \bar{R}_O, \left\{ \bar{F}_k^i \right\}_n \right).$$

5. Применим теорему о кинетическом моменте системы относительно оси  $z$  вращения блока

$$\frac{d K_z}{d t} = \sum_{k=1}^n m_z \bar{F}_k^e = 0.$$

Следовательно,  $K_z = \text{const}$ , так как  $K_{z0} = 0 \Rightarrow K_z = 0$ .

Составим кинетический момент системы относительно оси  $z$ :

$$K_z = K_z(A) + K_z(B),$$

где  $K_z(A)$  и  $K_z(B)$  – моменты количеств движения обезьянок относительно оси блока.

$$\text{Количество движения обезьянки } B: \bar{q}_B = \frac{P}{g} \bar{v}_B.$$

Чтобы найти количество движения обезьянки  $A$ , представим её движение в пространстве основания сложным, связав подвижную систему отсчёта с канатом, модуль скорости которого равен  $v_B$ .

По теореме сложения скоростей имеем  $\bar{v}_A = \bar{v}_A^r + \bar{v}_A^e$ , где  $\bar{v}_A^r = \bar{u}$ , а  $\bar{v}_A^e = \bar{v}_B$ .

Проецируя векторное равенство на ось  $y$ , найдём

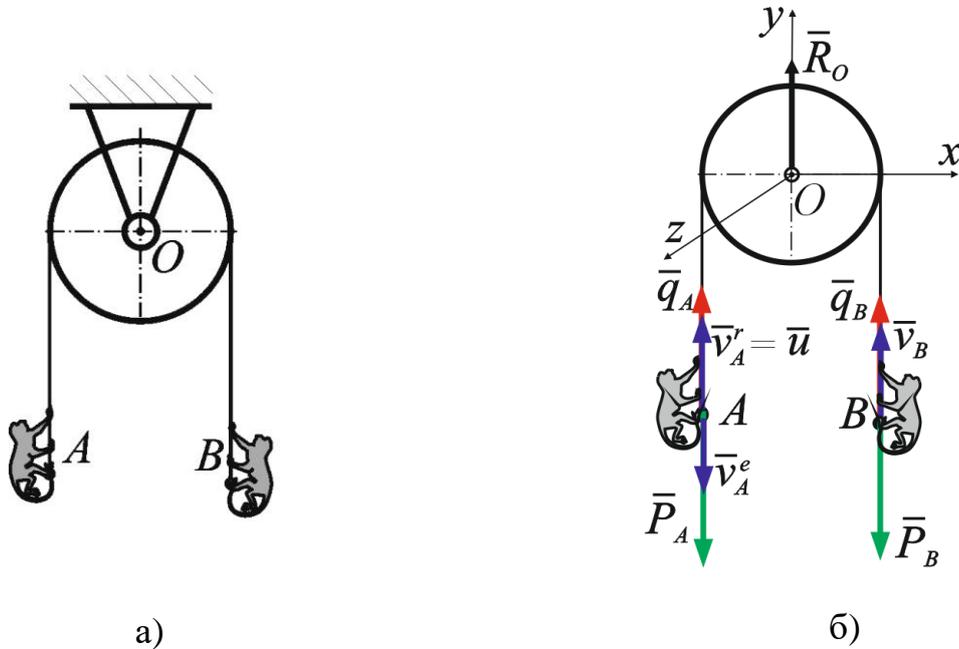


Рис. 3.4.4

$$v_{Ay} = u - v_B; \quad q_{Ay} = \frac{P}{g}(u - v_B),$$

Тогда  $K_z = m_z \bar{q}_A + m_z \bar{q}_B$ ;

$$K_z = -\frac{P}{g}(u - v_B)r + \frac{P}{g}v_B r = 0.$$

Откуда получим

$$-u + 2v_B = 0 \Rightarrow v_B = \frac{u}{2} \text{ и } v_A = u - v_B = \frac{u}{2}.$$

Т.е. скорости обезьянок в пространстве основания одинаковы и равны  $u/2$ . Как висели они одна напротив другой, так и будут подниматься вверх. Только одна при этом работает, а другая просто катается.

### 3.5. Работа и мощность силы

Рассмотрим движение точки  $M$  под действием силы  $\vec{F}$ . Пусть  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки относительно начала системы отсчета  $Oxyz$  (рис. 3.5.1).

Для характеристики действия силы на материальную точку на протяжении некоторого пути, пройденного точкой, вводится мера этого действия, называемая работой силы.

*Элементарная работа силы – величина равная скалярному произведению вектора силы на вектор  $d\vec{r}$  элементарного перемещения точки приложения силы:*

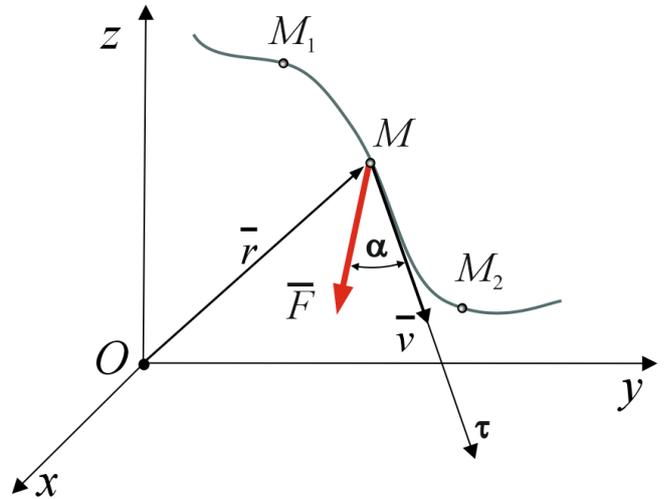


Рис. 3.5.1

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \begin{cases} \delta A = F ds \cos \alpha, \\ \delta A = F \cos \alpha \cdot d\sigma = F_\tau d\sigma, \\ \delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \\ \delta A = \vec{F} \cdot \vec{v} dt. \end{cases}$$

Здесь  $\alpha$  – угол между силой и скоростью точки,  $ds = |d\vec{r}|$  – путь, пройденный точкой за время  $dt$ ,  $d\sigma$  – приращение дуговой координаты точки,  $F_x, F_y, F_z$  – проекции силы на оси координат.

*Работой силы на конечном перемещении  $M_0M$  называется интеграл от элементарных работ на этом перемещении*

$$A_{M_0M} = \int_{M_0}^M \delta A = \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{\sigma_0}^{\sigma} F_\tau d\sigma.$$

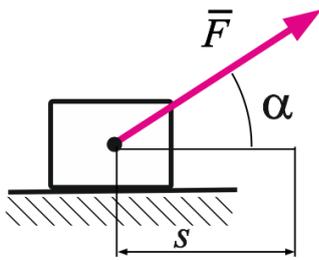


Рис. 3.5.2

Если  $\bar{F} = \text{const}$  и путь прямолинейен (рис. 3.5.2), то можем записать

$$A = F s \cos \alpha.$$

Размерность работы силы  $[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$ .

*Мощность (работоспособность) силы – отношение элементарной работы к промежутку времени, в течение которого эта работа совершена:*

$$W = \frac{\delta A}{dt} \Rightarrow \begin{cases} W = \bar{F} \cdot \bar{v} = F v \cos \alpha, \\ W = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}, \\ W = F_\tau v_\tau. \end{cases}$$

$$A = \int_{t_0}^t W dt.$$

Размерность мощности

$$[W] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

В качестве единицы мощности часто используют *лошадиную силу*:

$$1 \text{ л.с.} = 735,5 \text{ Вт} = 0,7355 \text{ кВт}.$$

Очевидно, что работа и мощность системы сил равна сумме работ и мощностей сил системы.

### **Примеры вычисления работы**

#### **Работа силы тяжести**

Силу тяжести тела вблизи поверхности Земли считаем постоянной (рис. 3.5.3):

$$P_x = P_y = 0, \quad P_z = -mg.$$

При перемещении точки из положения  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  в положение  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\delta A_p = P_x dx + P_y dy + P_z dz = P_z dz = -mg dz.$$

$$A_{1,2} = - \int_{z_1}^{z_2} m g \, dz = -m g \int_{z_1}^{z_2} dz = -m g \Delta z.$$

Работа силы тяжести не зависит от формы пути и равна произведению веса тела на изменение высоты центра тяжести.

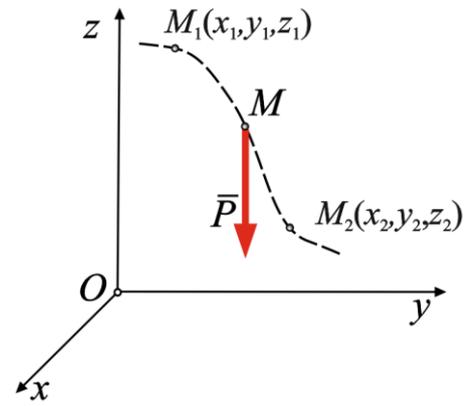


Рис. 3.5.3

### Работа силы упругости

Будем рассматривать линейную силу упругости (рис. 3.5.4), когда

$$F_x = -c(x - x_0),$$

где  $x_0$  – длина недеформированной пружины.

Тогда элементарная работа

$$\delta A = F_x dx = -F dx = -c(x - x_0) dx.$$

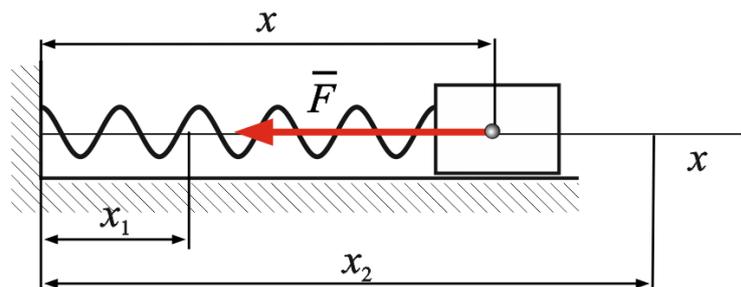


Рис. 3.5.4

Полная работа силы упругости пружины

$$A_{1,2} = - \int_{x_1}^{x_2} c(x - x_0) dx = - \frac{c(x - x_0)^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = - \frac{c(\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2)}{2},$$

где  $\Delta x_1, \Delta x_2$  – деформации пружины в начальном и конечном положениях движущегося тела.

## Работа внутренних сил механической системы

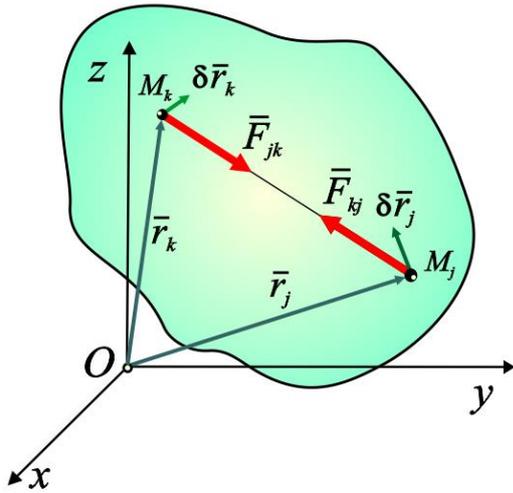


Рис. 3.5.5

Как известно, силы, действующие на точки механической системы, можно разделить на внешние  $\{\bar{F}_k^e\}_n$ , т.е. силы, действующие на точки системы со стороны тел, не входящих в механическую систему, и внутренние  $\{\bar{F}_k^i\}_n$  – силы взаимодействия между точками системы (рис. 5.5). Известно также, что главный вектор и главный момент внутренних сил относительно любого центра равны нулю:

$$\bar{U}^i = 0, \quad \bar{L}_O^i = 0, \quad \forall O.$$

Для двух точек внутренние силы  $\bar{F}_{kj} = -\bar{F}_{jk}$  по закону равенства действия и противодействия. Сумма элементарных работ этих сил

$$\delta A_{kj} = \bar{F}_{jk} \cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_{kj} \cdot d\bar{r}_j \Rightarrow \delta A_{kj} = \bar{F}_{jk} (d\bar{r}_k - d\bar{r}_j),$$

но

$$\bar{r}_j - \bar{r}_k = \bar{\rho}_{kj} \Rightarrow d\bar{r}_k - d\bar{r}_j = -d\bar{\rho}_{kj}.$$

Теперь

$$\delta A_{kj} = \bar{F}_{jk} \cdot d\bar{\rho}_{kj} \Rightarrow \delta A_{kj} = -F_{kj} d\rho_{kj}.$$

*Элементарная работа сил взаимодействия между точками системы равна взятому с обратным знаком произведению одной из сил взаимодействия на изменение расстояния между точками.*

Для системы сил

$$\delta A^i = - \sum_{\substack{k \neq j \\ k > j}}^n F_{kj} d\rho_{kj}.$$

*Для твердого тела, расстояние между точками которого остается неизменным, сумма работ внутренних сил равна нулю.*

### Работа и мощность системы сил, приложенных к твердому телу

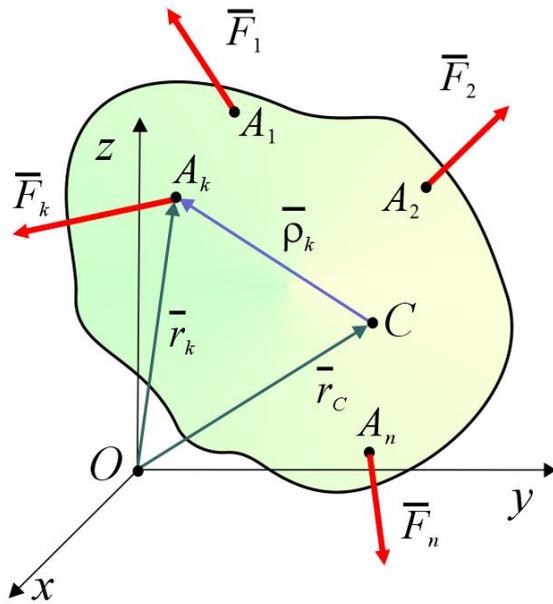


Рис. 3.5.6

Пусть тело  $Q$  движется в пространстве  $Oxyz$  под действием системы сил  $\{\bar{F}_k\}_n$ , приложенных в точках  $\{A_k\}_n$  (рис. 5.7). Найдем мощность силы  $\bar{F}_k$ . Выбрав полюс в некоторой точке  $D$ , можем записать  $\bar{v}_k = \bar{v}_D + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_k$ , где  $\bar{v}_D$  – скорость полюса.

Теперь

$$W_k = \bar{F}_k \cdot \bar{v}_k = \bar{F}_k \cdot \bar{v}_D + \bar{F}_k \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_k),$$

но

$$\bar{F}_k \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_k) = \bar{\omega} \cdot (\bar{\rho}_k \times \bar{F}_k) = \bar{\omega} \cdot (\bar{m}_D \bar{F}_k).$$

Следовательно,

$$W_k = \bar{F}_k \cdot \bar{v}_D + \bar{\omega} \cdot (\bar{m}_D \bar{F}_k). \quad (3.5.1)$$

Мощность системы сил найдем, суммируя (5.1) по всем точкам  $\{A_k\}_n$ :

$$\begin{aligned} W &= \sum W_k = \sum \bar{F}_k \cdot \bar{v}_D + \sum \bar{\omega} \cdot (\bar{m}_D \bar{F}_k) = \\ &= \left( \sum \bar{F}_k \right) \cdot \bar{v}_D + \bar{\omega} \cdot \sum \bar{m}_D \bar{F}_k = \bar{U} \cdot \bar{v}_D + \bar{L}_D \cdot \bar{\omega}, \end{aligned}$$

где  $\bar{U}$  – главный вектор системы сил,  $\bar{L}_D$  – главный момент системы сил относительно точки  $D$ .

Окончательно имеем

$$W = \bar{U} \cdot \bar{v}_D + \bar{L}_D \cdot \bar{\omega}. \quad (3.5.2)$$

*Мощность сил, приложенных к твердому телу, равна сумме скалярных произведений главного вектора на скорость полюса и главного момента относительно полюса на угловую скорость тела.*

Для нахождения элементарной работы системы сил можем воспользоваться зависимостью

$$\delta A = W \cdot dt = \bar{U} \cdot d\bar{r}_D + \bar{L}_D \cdot d\bar{\lambda}.$$

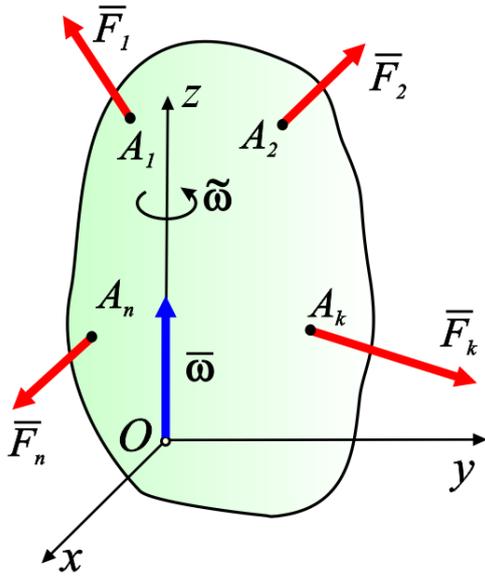


Рис. 3.5.7

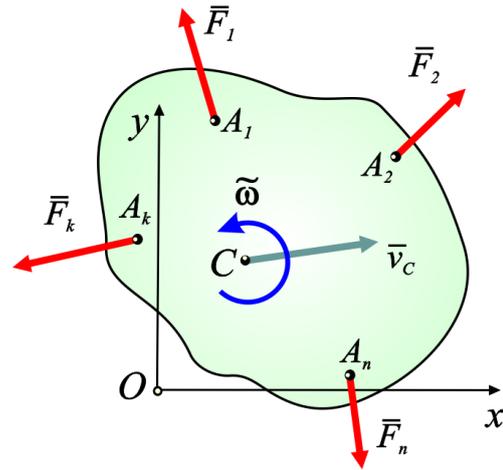


Рис. 3.5.8

Здесь  $d\bar{r}_D = \bar{v}_D dt$ ;  $d\bar{\lambda} = \bar{\omega} dt$  – элементарное перемещение полюса и вектор элементарного поворота тела.

Полная работа системы сил

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_{t_1}^{t_2} W dt.$$

### Мощность и элементарная работа сил при вращении тела вокруг неподвижной оси

Взяв за полюс точку на оси вращения (рис. 3.5.8), получим

$$W_k = \bar{\omega} \cdot (\bar{m}_O \bar{F}_k) = (\bar{\omega})_z \cdot (\bar{m}_O \bar{F}_k)_z = \tilde{\omega} (\tilde{m}_z \bar{F}_k).$$

*Мощность силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна алгебраическому произведению угловой скорости тела на момент силы относительно оси вращения.*

Для системы сил

$$W = \sum_{k=1}^n W_k = \tilde{\omega} \sum_{k=1}^n \tilde{m}_z \bar{F}_k = \tilde{\omega} \tilde{L}_z.$$

Элементарная работа сил, приложенных к вращающемуся телу, может быть подсчитана по формуле:

$$\delta A = \tilde{L}_z \delta \tilde{\varphi},$$

где  $\delta \tilde{\varphi}$  – элементарный угол поворота тела.

### Мощность и элементарная работа сил при плоском движении

Если движение тела плоское и система сил  $\{\bar{F}_k\}_n$  тоже плоская (рис. 3.5.8), то главный момент системы сил и угловую скорость тела будем рассматривать как величины алгебраические.

Тогда для одной силы

$$W_k = \bar{F}_k \cdot \bar{v}_D + (\tilde{m}_D \bar{F}_k) \tilde{\omega}.$$

Для системы сил

$$W = \bar{U} \cdot \bar{v}_D + \tilde{L}_D \tilde{\omega}.$$

### Мощность и элементарная работа пары сил, приложенной к твердому телу

Как известно, главный вектор пары сил  $(\bar{P}, \bar{Q})$  равен нулю, а главный момент пары сил есть момент пары.

Тогда мощность пары сил запишется как

$$W_{PQ} = \bar{m}_{PQ} \cdot \tilde{\omega}.$$

Элементарная работа пары сил

$$\delta A = \bar{m}_{PQ} \cdot \delta \tilde{\lambda}.$$

**Примечание.** Когда речь идет о твердом теле, то учитываем, что работа внутренних сил твердого тела равна нулю, и в число  $\{\bar{F}_k\}_n$  входят только внешние силы.

#### Пример 3.5.1

Однородный диск радиуса  $r$  катится без проскальзывания по горизонтальному основанию, имея скорость центра  $\bar{v}_C$  и испытывая сопротивление качению. Коэффициент трения качения  $k$ . Масса диска  $m$ . Найти мощность сил, приложенных к диску.

#### Решение

1. Рассмотрим движение диска отно-

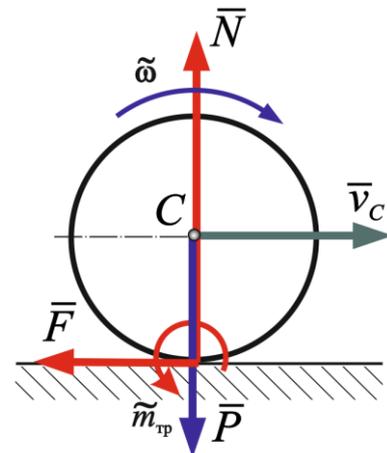


Рис. 3.5.9

сительно неподвижного основания.

2. Заданная сила:  $\bar{P} = m \bar{g}$ .

3. Связь: шероховатая, деформируемая поверхность.

Её реакции:  $\bar{N}$ ,  $\bar{F}$ ,  $\tilde{m}$ .

4. Диск движется под действием системы внешних сил  $(\bar{P}, \bar{N}, \bar{F}, \tilde{m})$

а) Находим сумму мощностей сил, приложенных к диску:

$$W = \bar{P} \cdot \bar{v}_C + \bar{N} \cdot \bar{v}_K + \bar{F} \cdot \bar{v}_K + \tilde{m} \tilde{\omega} = -k N \omega = -k m g \frac{v}{r}.$$

### 3.6. Кинетическая энергия точки и механической системы

Рассмотрим движение механической системы  $\{A_k\}_n$  точек в пространстве инерциальной системы отсчета  $Oxyz$ . Пусть  $m_k$  – масса точки  $A_k$ ,  $\bar{v}_k$  – ее скорость.

**Кинетической энергией точки** назовем скалярную величину равную половине произведения массы точки на квадрат ее скорости

$$T = \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы материальных точек определяется как сумма кинетических энергий точек системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2.$$

Кинетическая энергия всегда положительная величина. Размерность кинетической энергии  $[T] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$ .

## Кинетическая энергия твердого тела

Для твердого тела можем записать  
(рис. 3.6.1)

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} v^2 dm.$$

Здесь  $M$  – масса тела,  $dm$  – масса элементарного объема,  $v$  – скорость этого объема.

Рассмотрим частные случаи движения твердого тела.

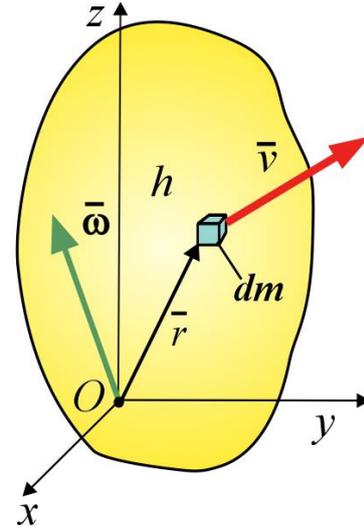


Рис. 3.6.1

### Сферическое движение

При сферическом движении скорость точки найдется как:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \int_{(M)} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 dm.$$

Здесь:

$$\begin{aligned} (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 &= (\bar{\omega} \times \bar{r})(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{v} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \\ &= \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{v}) = \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{v}) dm = \frac{1}{2} \bar{\omega} \int_{(M)} (\bar{r} \times \bar{v}) dm.$$

Или

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_O = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \bar{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\omega}^T \mathbf{I}_O \bar{\omega}, \quad (3.6.1)$$

где  $\bar{K}_O$  – кинетический момент тела относительно неподвижной точки, а  $\mathbf{I}_O$  – тензор инерции тела в неподвижной точке.

## Вращение тела вокруг неподвижной оси

Рассматривая вращательное движение как частный случай сферического, когда угловая скорость постоянна по направлению и направлена по оси вращения, получаем

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_O = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\omega} \\ -I_{xz} \tilde{\omega} & -I_{yz} \tilde{\omega} & I_z \tilde{\omega} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} \tilde{\omega} K_z \quad (3.6.2)$$

Здесь  $Oz$  – ось вращения.

Эту формулу можно получить непосредственно (см. рис. 3.6.3):

$$T = \frac{1}{2} \int_{(M)} v^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(M)} \omega^2 h^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int_{(M)} h^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2 .$$

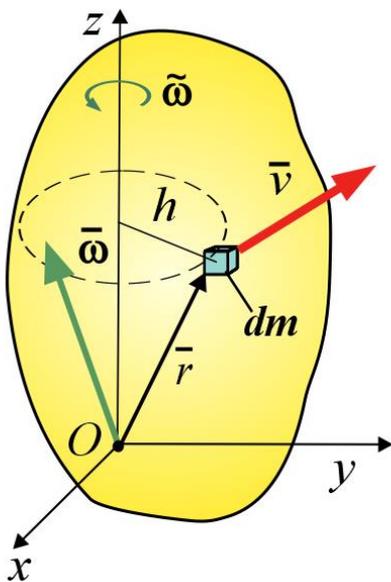


Рис. 3.6.3

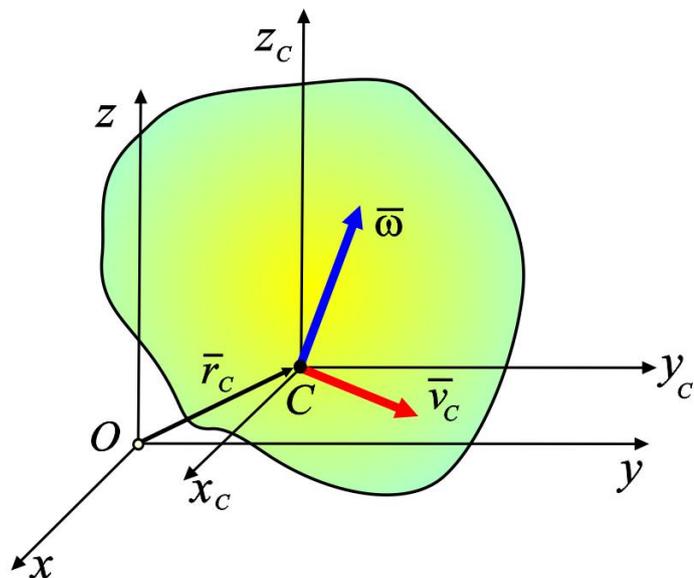


Рис. 3.6.4

## Кинетическая энергия свободного твердого тела (рис. 3.6.4.)

По формуле Кенига имеем

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T^r .$$

Поскольку движение тела в пространстве Кенига сферическое, то

$$T^r = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_C = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \bar{\omega}.$$

В итоге получаем

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \bar{\omega}. \quad (3.6.4)$$

Или

$$T = \frac{1}{2} \bar{Q} \cdot \bar{v}_C + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_C.$$

### Плоское движение

В этом случае движение в пространстве Кенига – это вращение вокруг подвижной оси  $z$ , проходящей через центр масс  $C$  (рис. 3.6.5).

Следовательно,

$$T^r = \frac{1}{2} I_{zc} \omega^2,$$

где  $I_{zc}$  – момент инерции тела относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс  $C$ . В итоге получаем

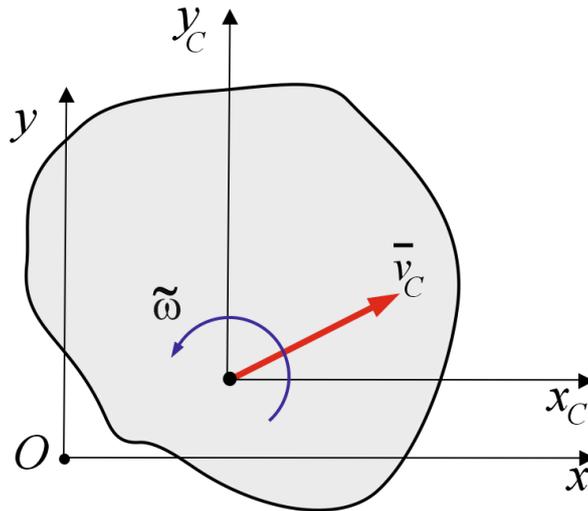


Рис. 3.6.5

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{zc} \omega^2}{2}. \quad (3.6.5)$$

### Поступательное движение

Здесь нет движения в пространстве Кенига, поэтому

$$T_r = 0 \Rightarrow T = \frac{M v_C^2}{2}. \quad (3.6.6)$$

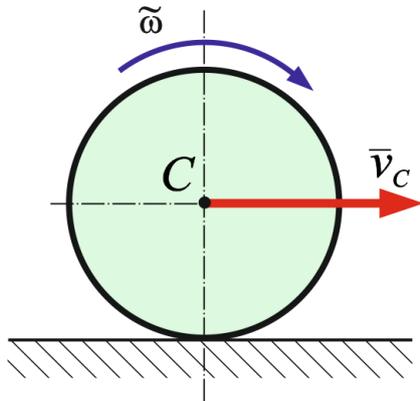


Рис. 3.6.6

### Пример

Найти кинетическую энергию однородного диска радиуса  $r$  и массы  $m$ , который катится без проскальзывания и имеет скорость центра масс  $v_C$  (рис. 3.6.6).

Диск совершает плоское движение.

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{z_c} \omega^2}{2}; \quad I_{z_c} = \frac{m r^2}{2}; \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

$$\text{В итоге получим: } T = \frac{3}{4} m v_C^2.$$

## 3.7. Теоремы о кинетической энергии

Рассмотрим движение механической системы  $\{A_k\}_n$  точек в пространстве инерциальной системы отсчета  $Oxyz$  (рис. 3.7.1).

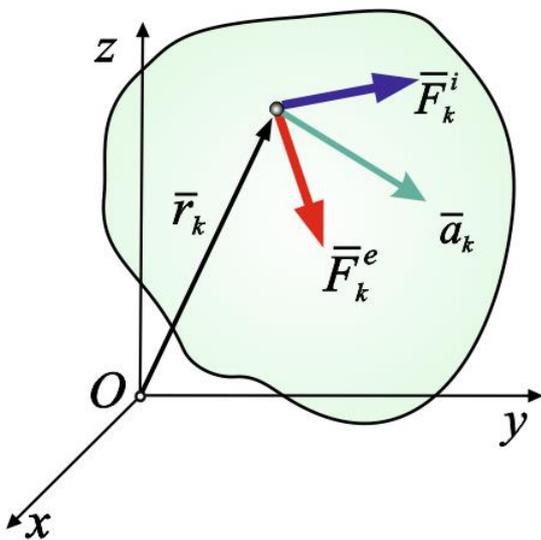


Рис. 3.7.1

Пусть  $\bar{F}_k^e$  – равнодействующая внешних сил, действующих на точку  $A_k$  массой  $m_k$ ,  $\bar{F}_k^i$  – равнодействующая внутренних сил.

Запишем для этой точки основное уравнение динамики

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

Умножим это уравнение скалярно на  $d\bar{r}$ . Получим

$$m_k d\bar{r} \cdot \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r} + \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r},$$

или

$$m_k \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot d\bar{v}_k = \delta A_k^e + \delta A_k^i .$$

Иначе

$$d\left(\frac{m v_k^2}{2}\right) = \delta A_k^e + \delta A_k^i .$$

Таким образом,

$$dT_k = \delta A_k^e + \delta A_k^i .$$

Суммируя последнее уравнение по всем точкам системы, получим

$$dT = \sum_{k=1}^n \delta A_k^e + \sum_{k=1}^n \delta A_k^i . \quad (3.7.1)$$

**Это теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:** *приращение кинетической энергии механической системы на элементарном перемещении равно элементарной работе внешних и внутренних сил, действовавших на точки механической системы на этом перемещении.*

Разделив (3.7.1) на  $dt$  будем иметь:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n W_k^e + \sum_{k=1}^n W_k^i . \quad (3.7.2)$$

Нами получена **теорема о производной кинетической энергии по времени (теорема о  $\frac{dT}{dt}$ ):** *производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на точки механической системы.*

Проинтегрировав обе части уравнения (3.7.1) на некотором перемещении из положения I в положение II, получим

$$T_{II} - T_I = \sum_{k=1}^n A_{k,I,II}^e + \sum_{k=1}^n A_{k,I,II}^i . \quad (3.7.3)$$

Это теорема о кинетической энергии в интегральной форме: приращение кинетической энергии механической системы на конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил системы на этом перемещении.

### Теорема о кинетической энергии в пространстве Кенига

Рассмотрим движение механической системы  $\{A_k\}_n$  точек. Свяжем с центром масс системы пространство Кенига (рис. 7.2).

По теореме о кинетической энергии (7.1) имеем

$$dT = \sum_{k=1}^n \delta A^e + \sum_{k=1}^n \delta A^i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k.$$

В соответствии с формулой Кенига получим

$$dT = dT^r + d\left(\frac{M v_C^2}{2}\right).$$

Суммы элементарных работ с учетом того, что  $\bar{r}_k = \bar{r}_C + \bar{\rho}_k$ , запишутся в виде:

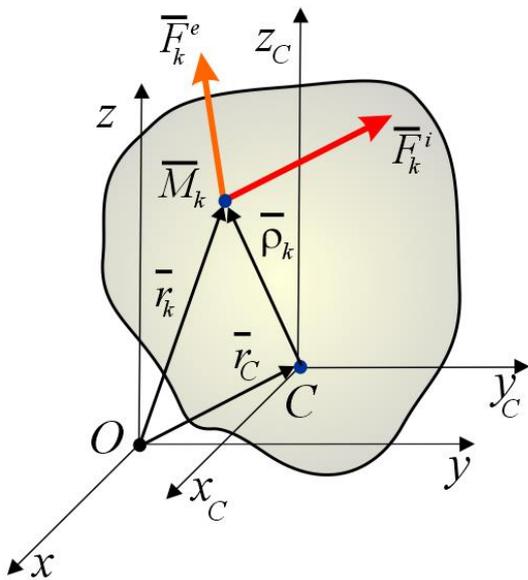


Рис. 3.7.2

$$\sum_{k=1}^n \delta A^e = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_C + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot d\bar{\rho}_k,$$

$$\sum_{k=1}^n \delta A^i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_C + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i \cdot d\bar{\rho}_k.$$

Учтем, что  $d\bar{r}_C$  можно вынести из-под знака суммы.

Кроме того, обозначим:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot d\bar{\rho}_k = \sum_{k=1}^n \delta A^{er},$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i \cdot d\bar{\rho}_k = \sum_{k=1}^n \delta A_k^{ir}.$$

– работы внешних и внутренних сил в пространстве Кёнига.

Заметим также, что  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0$ .

Кроме того, запишем

$$d\left(\frac{M v_c^2}{2}\right) = M \bar{v}_c \cdot d\bar{v}_c = M \frac{d\bar{v}_c}{dt} \cdot \bar{v}_c dt = d\bar{r}_c \cdot \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e,$$

поскольку по теореме о движении центра масс

$$M \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e,$$

В итоге получим

$$d\bar{T}^r + d\bar{r}_c \cdot \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = \sum_{k=1}^n \delta A_k^{re} + \sum_{k=1}^n \delta A_k^{ri} + d\bar{r}_c \cdot \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e,$$

или

$$d\bar{T}^r = \sum_{k=1}^n \delta A_k^{re} + \sum_{k=1}^n \delta A_k^{ri}.$$

*Теорема об изменении кинетической энергии в пространстве Кенига формулируется так же, как и для абсолютного пространства.*

### **Решение задач**

Теоремами о кинетической энергии удобно пользоваться в том случае, когда тела, входящие в систему, являются недеформируемыми. В этом случае можно исключить из рассмотрения все неизвестные внутренние силы.

Теорему об изменении кинетической энергии применяют там, где силы постоянны или зависят от положения, и нужно определить скорость в начале или в конце перемещения или путь, пройденный телом.

Теорему о  $\frac{dT}{dt}$  очень удобно применять для нахождения ускорения системы.

#### **Пример 3.7.1**

Найти, какую скорость необходимо сообщить ракете массой  $m$  на поверхности Земли, чтобы она поднялась на высоту  $H$ . Сопротивлением воздуха пренебрегаем. Сила земного тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Земли.

**Решение**

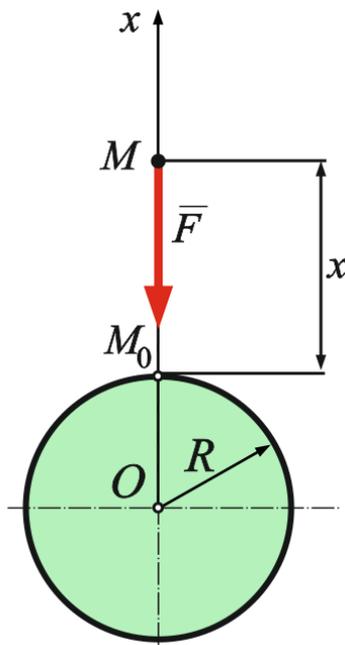


Рис. 3.7.3

1. Рассмотрим движение ракеты как материальной точки в пространстве неподвижной Земли.

2. Заданные силы: сила притяжения Земли  $\vec{F}$ .

Её модуль  $F = \frac{k}{x^2}$ . Если при  $x = R$ , имеем

$$F = mg, \text{ то } k = mgR^2, \text{ откуда } F = \frac{mgR^2}{x^2}.$$

3. Связей нет.

4. Ракета движется под действием одной силы ( $\vec{F}$ ).

По теореме об изменении кинетической энергии будем иметь

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_F.$$

В начале движения:

$$x = R + H \Rightarrow v = v_0.$$

Работа силы  $\vec{F}$  найдется как

$$A_F = - \int_{H_0}^H \frac{mgR^2}{x^2} dx = \frac{mgR^2}{x} \Big|_R^{R+H} = mgR^2 \left( \frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right) = - \frac{mgR^2 H}{R(R+H)}.$$

Получаем

$$- \frac{mv_0^2}{2} = - mgR \frac{H}{(R+H)}, \tag{3.7.4}$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}.$$

Если вопрос поставить иначе:

На какую максимальную высоту поднимется ракета, стартующая со скоростью  $v_0$ ?

Из уравнения (3.7.4) получаем

$$(H + R) \frac{mv_0^2}{2} = mgRH,$$

или

$$v_0^2 H + v_0^2 R = 2gRH,$$

иначе,

$$H(2gR - v_0^2) = v_0^2 R.$$

Окончательно находим

$$H = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}.$$

При начальной скорости  $v_0 > \sqrt{2gR} \approx 11,2 \cdot 10^3 \frac{\text{М}}{\text{с}}$  ракета уйдет из сферы земного притяжения.

## 3.8. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия

### *Потенциальное силовое поле*

*Область пространства, в которой на материальную точку, в нее помещенную, действует сила, зависящая только от положения точки и, может быть, времени, называется силовым полем.*

Говорят, что поле *стационарно*, если рассматриваемые силы не зависят явно от времени. В противном случае поле называется *нестационарным*.

Сила нестационарного поля записывается как функция координат и времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t).$$

Если сила поля функция только координат,  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  – то поле стационарное.

Элементарная работа силы поля запишется в виде

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Если сила представляет собой градиент некоторой функции  $U(x, y, z)$ , то такое поле называется потенциальным, а сама функция  $U$  – потенциалом или силовой функцией поля:

$$\vec{F} = \text{grad}U = \nabla U,$$

или

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}.$$

Можем записать:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Элементарная работа потенциальной силы равна полному дифференциалу от силовой функции:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU,$$

или

$$\delta A = dU.$$

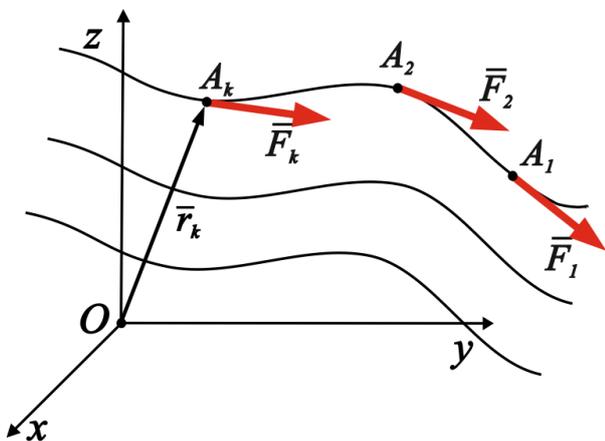


Рис. 3.8.1

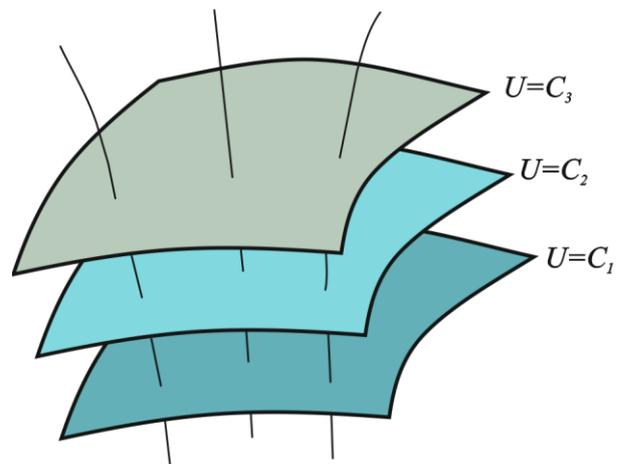


Рис. 3.8.2

Направление сил поля характеризуется **силовыми линиями**, т.е. линиями, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением силы, действующей в этой точке. Через каждую точку поля можно провести лишь одну силовую линию.

Т.к. вектор  $d\vec{r}$  при движении вдоль силовой линии направлен по касательной, то для силовой линии  $d\vec{r} \parallel \vec{F}$ .

Иначе

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}.$$

Это – дифференциальные уравнения силовой линии.

Поверхность,  $U(x, y, z) = \text{const}$ , на которой силовая функция сохраняет постоянное значение, называется *экипотенциальной поверхностью*, или *поверхностью равного потенциала*

Для данного поля эти поверхности образуют семейство. Эти поверхности не могут пересекаться и будут разделять силовое поле на слои, поэтому такое поле называется *слоистым* или *пластинчатым*.

Одну из экипотенциальных поверхностей условно принимают за нулевую и называют поверхностью нулевого потенциала или поверхностью нулевого уровня. На поверхности нулевого уровня  $U(x, y, z) = 0$ .

Силовые линии ортогональны к экипотенциальным поверхностям, поскольку на поверхности уровня,

$$dU = \delta A = 0,$$

или

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \vec{F} \perp d\vec{r},$$

где  $d\vec{r}$  берется вдоль поверхности уровня.

Сила поля направлена по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания силовой функции.

### ***Работа потенциальной силы. Потенциальная энергия***

Работа силы поля на конечном перемещении точки из положения  $M_1$  в положение  $M_2$

$$A_{M_1 M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta A = \int_{M_1}^{M_2} dU = U_2 - U_1.$$

Следовательно, работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути и не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка.

В частности, работа потенциальной силы при перемещении по замкнутому контуру равна нулю.

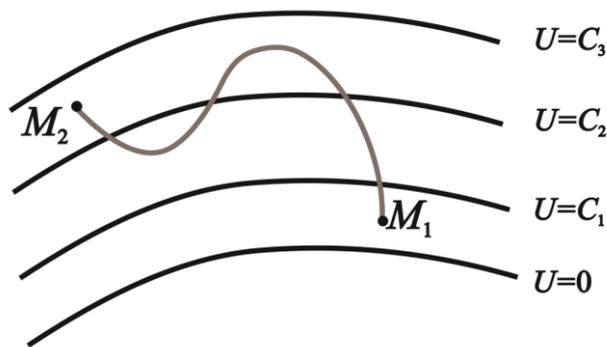


Рис. 3.8.3

Потенциальной энергией точки в данном положении  $M$  называется скалярная величина, равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из забираемого ею положения  $M$  на нулевую поверхность уровня

$$\Pi = A_{MM_0} = U_0 - U = -U, \\ \text{т.к. } U_0 = 0.$$

Потенциальная энергия характеризует способность силового поля совершать работу.

$$\delta A = dU = -d\Pi.$$

Работа потенциальной силы равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях движущейся точки, или *падению потенциальной энергии*.

$$A_{M_1 M_2} = - \int_{M_1}^{M_2} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Для механической системы потенциальная энергия  $\Pi$  равна сумме потенциальных энергий ее точек.

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i = \sum_{i=1}^n A_{M_i M_{i0}}.$$

### Пример 3.8.1. Однородное поле тяжести

Если точка движется вблизи поверхности Земли, то сила поля тяжести  $\vec{P} = m \vec{g}$ , т.е., если ось  $\zeta$  вертикальна, а оси  $\xi$  и  $\eta$  горизонтальны (рис. 3.8.4), будем иметь:

$$P_\xi = P_\eta = 0 \Rightarrow P_\zeta = -mg = \text{const}$$

Элементарная работа силы тяжести

$$\delta A = -m g d\zeta = dU$$

Силовая функция найдется как

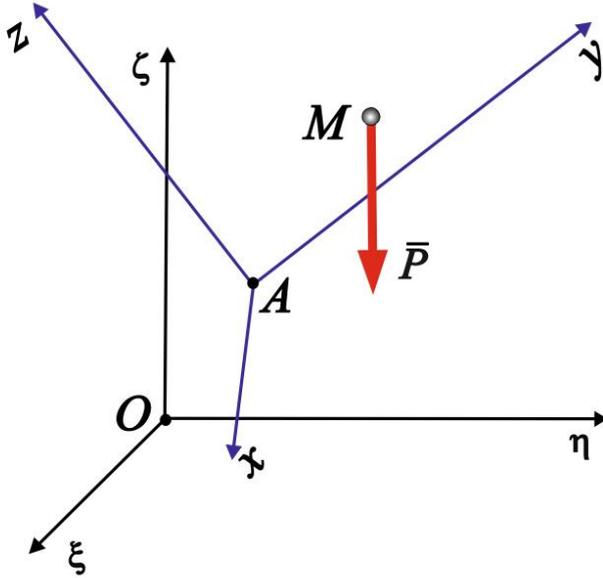


Рис. 3.8.4

$$U = \int dU = -m g \zeta + \text{const}$$

Константу найдем из начальных условий:

$$\zeta = 0 \Rightarrow U_0 = 0 \Rightarrow U = -m g \zeta$$

Потенциальная энергия поля силы тяжести:

$$П = -U = m g \zeta,$$

где  $\zeta$  – высота точки над поверхностью нулевого уровня.

Эквипотенциальные поверхности:

$$U = \text{const} \Rightarrow \zeta = \text{const}.$$

Уравнения силовых линий:

$$\frac{d\zeta}{-m g} = \frac{d\xi}{0} = \frac{d\eta}{0}.$$

Или

$$\left. \begin{array}{l} -m g d\xi = 0 \Rightarrow d\xi = 0 \\ -m g d\eta = 0 \Rightarrow d\eta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const},$$

т.е. силовые линии представляют собой вертикали.

Для системы координат  $Axyz$ , если можно выразить  $\zeta = \zeta(x, y, z)$ , получим в проекциях на оси:

$$\bar{P} = \text{grad } U = -m g \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \bar{k} \right).$$

### Пример 3.8.2. Поле центральной силы

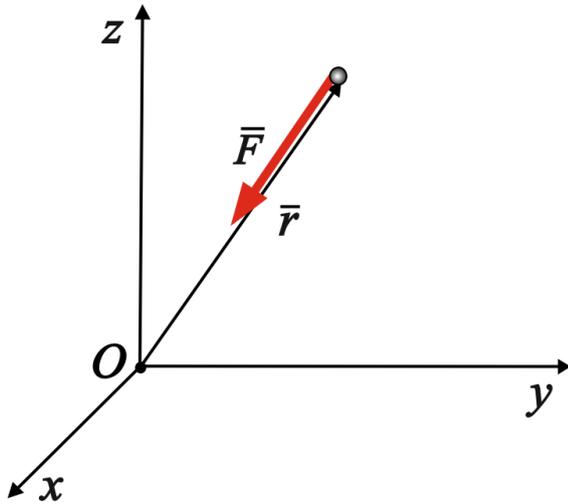


Рис. 3.8.5

Центральной называется сила, проходящая через некоторый неподвижный центр.

Пусть,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения центральной силы, а  $r$  – модуль этого вектора (рис. 3.8.5).

Тогда силу можно представить в виде

$$\vec{F}(r) = -F(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Элементарная работа силы:

$$\begin{aligned} \delta A &= \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = -\frac{F(r)}{r} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{F(r)}{2r} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \\ &= -\frac{F(r)}{2r} d r^2 = -F(r) d r. \end{aligned}$$

Здесь  $d r$  – приращение модуля радиус-вектора.

Силовая функция центральной силы записывается как

$$U = -\int F(r) d r + \text{const.}$$

Частные случаи центральной силы

а) Пусть  $F(r) = \frac{k}{r^2}$  – *сила земного тяготения*, если начало координат

берется в центре Земли.

При  $r$  равном радиусу Земли  $R$  получаем

$$r = R \Rightarrow F = m g \Rightarrow k = m g R^2.$$

Теперь

$$F(r) = \frac{m g R^2}{r^2} \Rightarrow dU = -\frac{m g R^2}{r^2} d r;$$

$$U = \frac{m g R^2}{r} + \text{const.}$$

или

Эквипотенциальные поверхности представляют собой сферы:  $r = \text{const}$   
 Пусть при  $r = R$  силовая функция равна нулю.

$$U = U_0 = 0 \Rightarrow U = \frac{m g R^2}{r} - m g R.$$

Потенциальная энергия найдется как:

$$\Pi = -U = m g R - \frac{m g R^2}{r} = m g R \left( 1 - \frac{R}{r} \right).$$

При малом расстоянии от поверхности Земли, равном  $h$ , получаем

$$r = R + h \Rightarrow \Pi = m g R \left( 1 - \frac{R}{R + h} \right) = m g R \left( \frac{h}{R + h} \right) \approx m g h.$$

Здесь принято, что  $R \approx R + h$ .

### б) Потенциальная энергия пружины

Пусть в точке  $M_0$  (рис. 3.8.6) пружина нерастянута, тогда

$$F(r) = c(r - r_0).$$

Элементарная работа силы пружины равна:

$$\delta A = -c(r - r_0) dr.$$

Силовая функция этой силы:

$$U = -\int c(r - r_0) dr = -\frac{c(r - r_0)^2}{2} = -\frac{c\lambda^2}{2},$$

где  $\lambda = r - r_0$ .

Потенциальная энергия пружины  
найдется как

$$\Pi = \frac{c\lambda^2}{2}.$$

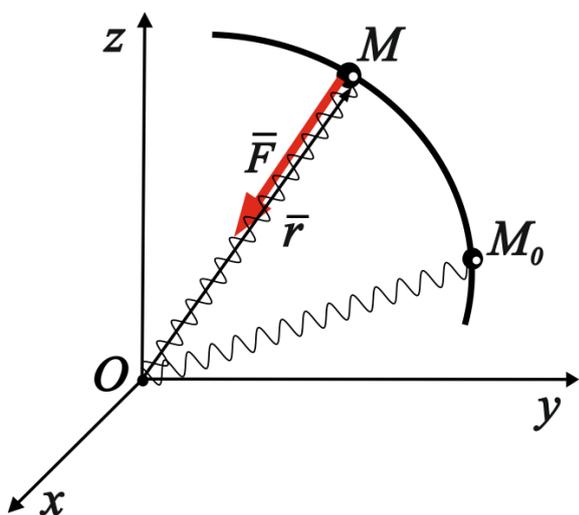


Рис. 3.8.6

### 3.9. Закон сохранения механической энергии

Пусть все действующие на систему силы, как внешние, так и внутренние потенциальны, т.е.

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k} = -d\Pi$$

По теореме о кинетической энергии в дифференциальной форме имеем:

$$dT = \sum_{k=1}^n \delta A_{F_k} = -d\Pi.$$

Или  $dT + d\Pi = 0.$

Иначе  $T + \Pi = E = \text{const}.$

Сумма кинетической и потенциальной энергии называется *механической энергией*.

*При движении механической системы в потенциальном поле внешних и внутренних сил полная механическая энергия системы остается постоянной величиной.*

Механические системы, для которых выполняется этот закон, называются **консервативными**.

#### Пример 3.9.1

Груз массой  $m$  подвешен на пружине жесткости  $c$  (рис. 3.8.7). В начальный момент покоящемуся грузу сообщена скорость  $v_0$ . Найти закон изменения скорости в зависимости от координаты.

Решение.

1. *Рассмотрим движение груза.* Начало координат выберем в положении статического равновесия груза.

2. *Заданные силы  $\bar{P}, \bar{F}$ ;  $P = mg, F = c(x + \delta)$ ,*

где  $\delta$  – статическое удлинение пружины под действием силы тяжести груза:

$$\delta = \frac{mg}{c} \Rightarrow F = c \left( x + \frac{mg}{c} \right) = cx + P.$$

3. Связей нет.

4. Груз движется под действием сил:  $(\bar{F}, \bar{P})$ .

5. Для решения задачи воспользуемся законом сохранения механической энергии

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0.$$

Начальное значение кинетической энергии:

$$T_0 = \frac{m v_0^2}{2}.$$

Начальное значение потенциальной энергии складывается из потенциальной энергии груза  $\Pi_P = 0$ , если поверхность нулевого уровня взять в положении статического равновесия, и потенциальной энергии пружины, которая найдется как:

$$\Pi_F = \frac{c \delta^2}{2}.$$

$$\Pi_0 = \Pi_P + \Pi_F = 0 + \frac{c \delta^2}{2} = c \cdot \frac{m^2 g^2}{c^2} = \frac{m^2 g^2}{c}.$$

Текущие значения кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2}, \quad \Pi = -m g x + \frac{c (x + \delta)^2}{2}.$$

В итоге имеем

$$\frac{m \dot{x}^2}{2} - m g x + \frac{c (x + \delta)^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{c \delta^2}{2}.$$

Откуда

$$\frac{m \dot{x}^2}{2} - m g x + \frac{c x^2}{2} + c \delta x = \frac{m v_0^2}{2},$$

или

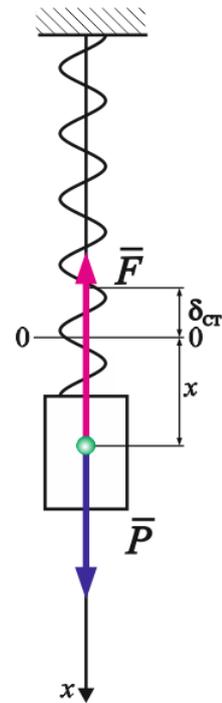


Рис. 3.8.7

$$\dot{x}^2 = \left[ x(mg - c\delta) - \frac{cx^2}{2} \right] \frac{2}{m} + v_0^2$$

Подставляя значение  $\delta$ , получаем

$$\dot{x}^2 = \left[ x \left( mg - \frac{c \cdot mg}{c} \right) - \frac{cx^2}{2} \right] \frac{2}{m} + v_0^2$$

Окончательно будем иметь

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - \frac{cx^2}{2} \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{v_0^2 - \frac{c}{m} x^2}$$

### 3.10. Дифференциальные уравнения движения твердого тела

Одним из методов описания динамики движения твердого тела является составление дифференциальных уравнений этого движения, связывающих обобщенные координаты тела и действующие на тело силы.

Как известно, движение твёрдого тела можно описать, взяв какую-либо точку тела за полюс и связав с ней подвижную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно неподвижной системы отсчета. Тогда движение тела описывается шестью уравнениями: три уравнения описывают движение полюса и три – вращение тела вокруг полюса. Если за полюс взять центр масс, то подвижной системой отсчета будет пространство Кёнига.

Для описания движения центра масс воспользуемся теоремой о движении центра масс:

$$M \ddot{\bar{r}}_C = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.10.1)$$

Для описания сферического движения тела вокруг центра масс воспользуемся теоремой о кинетическом моменте относительно центра масс:

$$\frac{d \bar{K}_C^r}{dt} = \sum_{k=1}^n \overline{mom}_C \bar{F}_k^e. \quad (3.10.2)$$

Для замыкания этой системы необходимо знать начальное положение и начальную скорость тела.

## Частные случаи движения твердого тела

### а. Поступательное движение

Все точки тела движутся одинаково. Движение в пространстве Кёнига отсутствует. Движение тела можно описать уравнением (3.10.1):

$$M \ddot{\bar{r}} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e.$$

Начальные условия:

$$\bar{r}_C = \bar{r}_{C0}, \quad \dot{\bar{r}}_C = \bar{v}_0.$$

### б. Вращение тела вокруг неподвижной оси (рис. 3.10.1)

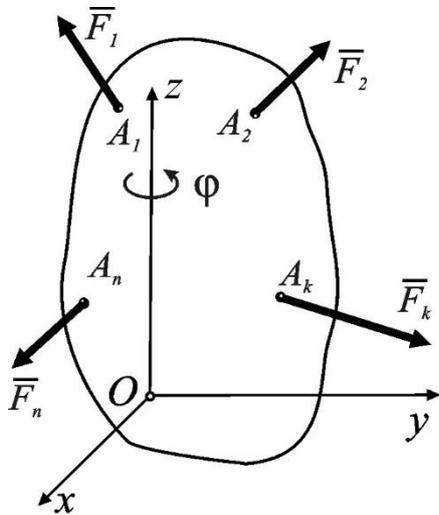


Рис. 3.10.1

В этом случае тело имеет одну степень свободы. Обобщенная координата – угол поворота тела  $\varphi$ . Для нахождения зависимости обобщенных координат от действия на тело сил можно воспользоваться теоремой о кинетическом моменте относительно оси вращения тела:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n m \omega_z \bar{F}_k^e.$$

Кинетический момент вращающегося тела находится по формуле (3.3.12)

$$K_z = (\bar{K}_O)_z = I_z \tilde{\omega}.$$

Дифференцируя эту зависимость по времени, получаем дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m \omega_z \bar{F}_k^e. \quad (3.10.4)$$

Начальные условия:  $t = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_0; \quad \dot{\varphi} = \tilde{\omega}_0.$

Решая уравнение (3.10.4) при соответствии начальных условиях найдем закон вращения тела вокруг неподвижной оси.

### в. Плоское движение

Здесь движение тела в пространстве Кёнига будет вращательным вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс, поэтому уравнение (3.10.2) можно представить в виде

$$\frac{d K_{zC}}{d t} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_{zC} \bar{F}_k^e ,$$

или

$$I_{zC} \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_{zC} \bar{F}_k^e ,$$

так как положение центра масс в теле не меняется.

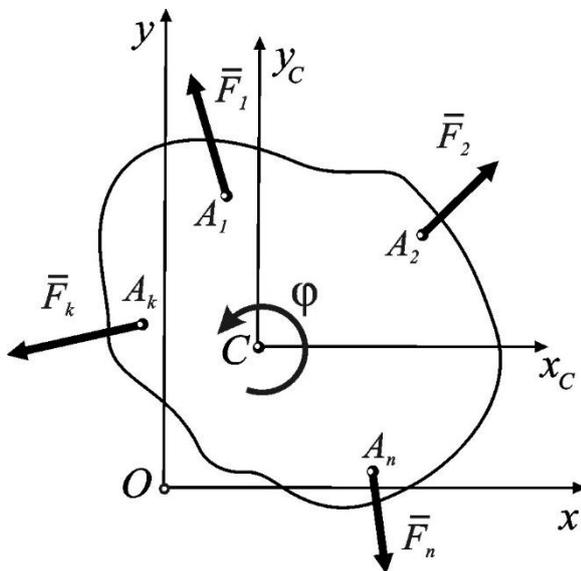


Рис. 3.10.2

Дифференциальные уравнения плоского движения можно записать в виде

$$\begin{cases} M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \\ M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \\ I_{zC} \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n \text{mom}_C \bar{F}_k. \end{cases} \quad (3.10.3)$$

В последнем уравнении учитывается, что по определению момент силы относительно оси есть алгебраический момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

$$\text{Начальные условия: при } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_C = x_{C0}, & \dot{x}_C = \dot{x}_{C0}, \\ y_C = y_{C0}, & \dot{y}_C = \dot{y}_{C0}, \\ \varphi = \varphi_0, & \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0. \end{cases}$$

### Пример 3.10.1. Физический маятник

Физическим маятником называется тяжелое твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием собственного веса. Ось вращения называют осью привеса маятника.

Дано: Маятник весом  $G$  качается около оси  $O$ ;  $C$  – его центр масс (рис. 3.10.3).

Найти закон малых качаний маятника.

#### Решение

Воспользуемся дифференциальным уравнением вращения маятника

$$I_O \ddot{\varphi} = -Gd \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gd}{I_O} \sin \varphi = 0,$$

где  $I_O$  – момент инерции маятника относительно точки  $O$ .

Пусть

$$\frac{Gd}{I_O} = k^2,$$

тогда получим

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0.$$

В случае малых качаний  $\sin \varphi \approx \varphi$  и последнее уравнение приобретает вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\varphi = A \sin kt + B \cos kt.$$

Если в начальный момент  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ , то  $A = 0$ ,  $B = \varphi_0$  и в итоге

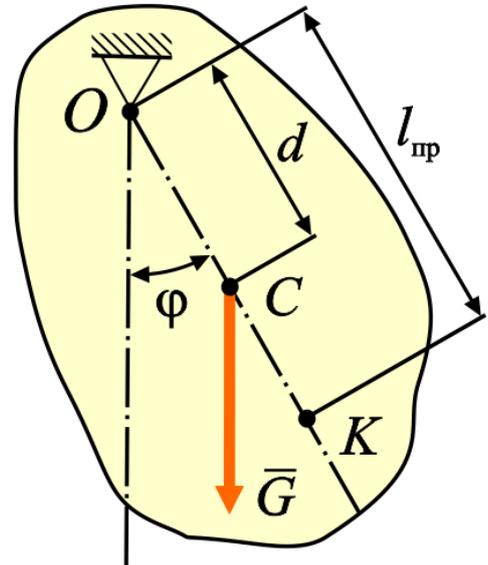


Рис. 3.10.3

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt.$$

Период  $\tau_\phi$  малых качаний маятника

$$\tau_\phi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{Gd}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_C}{mgd} + \frac{d}{g}}.$$

Малые качания физического маятника являются изохронными гармоническими колебаниями.

Полученные результаты можно распространить и на математический маятник, т.е. груз малых размеров на невесомой нити длиной  $l_M$ . Для него

$$I_O = ml_M^2 = \frac{G}{g} l_M^2; \quad \tau_M = 2\pi \sqrt{\frac{l_M}{g}}.$$

При  $\tau_M = \tau_\phi$  получаем

$$\frac{l_i}{g} = \frac{I_C}{mgd} + \frac{d}{g} \Rightarrow l_i = \frac{I_C}{md} + d.$$

Приведенная длина физического маятника есть длина математического, период качаний которого одинаков с периодом физического:

$$l_{i\delta} = l_i = \frac{I_C}{md} + d, \quad \text{т.е. } l_{i\delta} > d.$$

Точка  $K$  на прямой  $OC$ , отстоящей на расстоянии  $OK = l_{i\delta}$ , называется *центром качаний* маятника. Можно показать, что если ось привеса будет проходить через точку  $K$ , то период качаний останется прежним, а центром качаний будет точка  $O$ . Следовательно, точки  $K$  и  $O$  будут взаимными.

В самом деле, при центре качаний в т.  $O$  период найдется как

$$\tau_O = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{gmd}},$$

а при центре качаний в т.  $K$

$$\tau_K = 2\pi \sqrt{\frac{I_K}{gm(l-d)}}.$$

Нетрудно видеть, что  $\tau_K = \tau_O$ , поскольку

$$\frac{I_O}{d} = \frac{I_K}{(l-d)}.$$

Действительно,

$$I_O = I_C + md^2, \text{ а } I_K = I_C + m(l-d)^2.$$

Получаем

$$\frac{I_C + md^2}{md} = \frac{I_C + m(l-d)^2}{m(l-d)},$$

или

$$\frac{I_C}{md} + d = \frac{I_C d}{I_C} + \frac{I_C}{md},$$

В частности, можно записать:

$$l-d = \frac{I_C}{md}.$$

### Пример 3.10.2

Однородный диск массой  $m$  и радиусом  $r$  может катиться по горизонтальной плоскости (рис. 3.10.4). К оси диска приложена сила  $\bar{P}$ . Коэффициент трения качения  $k$ , коэффициент трения скольжения  $f$ .

Найти закон движения диска.

#### Решение

1. Рассмотрим движение диска в пространстве неподвижного основания, полагая, что проскальзывания диска по основанию нет.

2. Заданные внешние силы:

$$\bar{P}, \bar{G}. \quad P = mg.$$

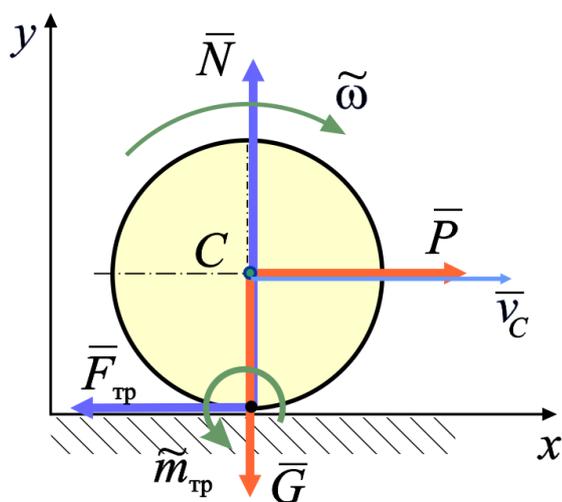


Рис. 3.10.4

3. Связь: шероховатое деформируемое основание. Её реакции:  $\bar{N}$ ,  $\tilde{m}_{\text{тр}}$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}}$ .
4. Диск движется под действием внешних сил:  $(\bar{P}, \bar{G}, \bar{N}, \tilde{m}_{\text{од}}, \bar{F}_{\text{од}})$ .
5. Дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$m\ddot{x}_C = P - F, \quad m\ddot{y}_C = N - mg, \quad I_{zC}\ddot{\phi} = -F_{\text{тр}}r + m_{\text{тр}}$$

Неизвестных 6 –  $x_C$ ,  $y_C$ ,  $\phi$ ,  $F_{\text{тр}}$ ,  $m_{\text{тр}}$ ,  $N$  и всего 3 уравнения.

Дополнительные условия:

1.  $y_C = \text{const} = r$ ,  $\ddot{y}_C = 0$ ;
2. при отсутствии скольжения  $v_C = |\dot{x}_C| = r\omega = -r\dot{\phi}$  (знак отрицательный, так как при  $x_c > 0$  вращение происходит по часовой стрелке);
3. при наличии качения  $m_{\text{тр}} = kN$ .

В итоге имеем

$$\ddot{y}_c = 0, N = mg, m_{\text{тр}} = kmg.$$

Из последнего уравнения движения получаем

$$\ddot{\phi} = \frac{kmg - F_{\text{тр}}r}{I_{zC}} = \frac{2(kmg - F_{\text{тр}}r)}{mr^2}.$$

Подставляя это значение в первое уравнение движения, имеем

$$\ddot{x} = -r\ddot{\phi} = -\frac{2(kmg - F_{\text{тр}}r)}{mr} = -2\left(\frac{kg}{r} - \frac{F_{\text{тр}}}{m}\right).$$

В итоге для силы трения скольжения получим

$$F_{\text{тр}} = \frac{P}{3} + \frac{2kmg}{3r}.$$

Знак положительный, значит направление  $F_{\text{тр}}$  выбрано правильно.

Выясним, при каких значениях  $f$  рассматриваемое движение будет происходить без проскальзывания.

Условие отсутствия проскальзывания:  $F_{\text{тр}} < fN$ .

Иначе

$$\frac{P}{3} + \frac{2kmg}{3r} < fmg, \text{ или } f > \frac{P}{3mg} + \frac{2k}{3r}.$$

Значит, чем больше значение силы  $P$ , тем больше должен быть коэффициент трения скольжения  $f$ , чтобы не было проскальзывания.

**Пример 3.10.3. Уравнение движения автомобиля (рис. 3.10.5)**

Найти уравнение движения заднеприводного автомобиля вверх по наклонной шероховатой деформируемой плоскости с учетом аэродинамического сопротивления. Известна масса всего автомобиля  $M$ , массами колес можно пренебречь. Крутящий момент на валу ведущих колес равен  $L_{\text{дв}}$ .

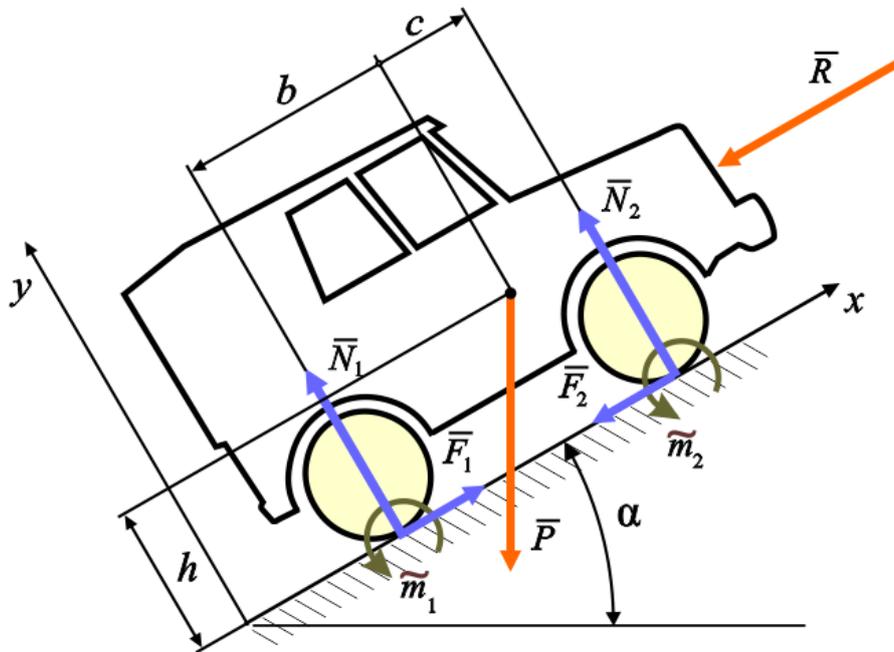


Рис. 3.10.5

**Решение**

1. Рассмотрим движение автомобиля в пространстве неподвижного основания.

2. Заданные внешние силы:  $\bar{P}$ ,  $\bar{R}$ .  $P = M g$ ;  $R = c_x \rho S \frac{v^2}{2}$ .

Здесь  $c_x$  – коэффициент аэродинамического сопротивления;  $\rho$  – плотность воздуха;  $S$  – площадь максимального поперечного сечения автомобиля плоскостью, перпендикулярной направлению его движения.

Внутренние силы:  $\tilde{L}_{\text{дв}}; \{ \bar{F}_k^i \}$ .

3. Связь: шероховатое деформируемое основание. Его реакции:

$$1. \quad \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2.$$

4. Автомобиль движется под действием сил:

$$\left( \bar{P}, \bar{R}, \bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{L}_{\text{дв}}, \{ \bar{F}_k^i \} \right).$$

5. Составим дифференциальные уравнения движения автомобиля:

$$M \ddot{x}_C = -P \sin \alpha + F_1 - F_2 - R, \quad (3.10.5)$$

$$M \ddot{y}_C = -P \cos \alpha + N_1 + N_2, \quad (3.10.6)$$

$$I_{Cz} \ddot{\phi} = m_1 + m_2 + F_1 h - F_2 h + N_2 c - N_1 b. \quad (3.10.7)$$

В последнем уравнении  $I_{Cz}$  – момент инерции всего автомобиля относительно оси, проходящей через центр его масс и перпендикулярной основной плоскости.

Для ведущего и ведомого колес автомобиля составим уравнения их вращений относительно центра масс. (Напомним, что колеса считаем невесомыми).

**Ведущее колесо (рис. 3.10.6):**

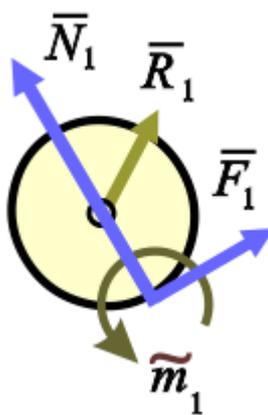


Рис. 3.10.6

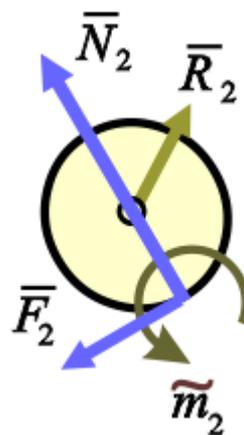


Рис. 3.10.7

1. Рассмотрим движение ведущего колеса автомобиля в пространстве неподвижного основания.

2. Заданные внешние силы:  $\tilde{L}_{\text{дв}}$ .

3. Связь: шероховатое деформируемое основание, его реакции:  $\bar{N}_1, \bar{F}_1, \tilde{m}_1$ ; цилиндрический шарнир оси колеса, его реакцию можно представить силой  $\bar{R}_1$ .

4. Колесо движется под действием сил:

$$\left( \bar{R}_1, \bar{N}_1, \bar{F}_1, \tilde{m}_1, \tilde{L}_{\text{дв}}, \{ \bar{F}_k^i \} \right).$$

5. Составим дифференциальное уравнение вращения колеса автомобиля относительно центра масс:

$$L_{\text{дв}} - m_1 = F_1 r \Rightarrow F_1 = \frac{L_{\text{дв}}}{r} - \frac{m_1}{r}.$$

Для ведомого колеса (рис. 3.10.7) после аналогичных рассуждений получим:

$$F_2 = \frac{m_2}{r}.$$

В этих уравнениях:

$$m_1 = k N_1, \quad m_2 = k N_2,$$

Из (3.10.6) и (3.10.5) имеем

$$N_1 + N_2 = M g \cos \alpha, \quad M \ddot{x}_C = -M g \sin \alpha + \frac{L_{\text{дв}}}{r} - \frac{m_1}{r} - \frac{m_2}{r} - R.$$

Откуда находим ускорение центра масс автомобиля:

$$\ddot{x}_C = \frac{L_{\text{дв}}}{M r} - \frac{R}{M} - g \sin \alpha - \frac{k}{r} g \cos \alpha.$$

Подставляя зависимость для силы сопротивления воздуха, получаем в итоге:

$$\ddot{x}_C = \frac{L_{\text{дв}}}{M r} - \rho S c_x \frac{v^2}{2M} - g \left( \sin \alpha + \frac{k}{r} \cos \alpha \right).$$

Условие отсутствия проскальзывания ведущего колеса запишется в виде

$$F_1 < f N_1, \text{ где } F_1 = \frac{L_{\text{дв}}}{r} - \frac{m_1}{r}.$$

Следовательно,

$$f N_1 > \frac{L_{\text{дв}}}{r} - \frac{k N_1}{r}. \quad (3.10.8)$$

Считая, что кузов автомобиля движется поступательно, из (10.7) получим

$$0 = m_1 + m_2 + F_1 h - F_2 h + N_2 c - N_1 b. \quad (3.10.9)$$

В этом уравнении

$$m_1 + m_2 = k M g \cos \alpha, \text{ а } F_1 - F_2 = M \ddot{x}_C + M g \sin \alpha + R.$$

Кроме того,

$$N_1 + N_2 = M g \cos \alpha \Rightarrow N_2 = M g \cos \alpha - N_1.$$

Подставляя эти значения в (3.10.9), получаем

$$M g (h \sin \alpha + (k - c) \cos \alpha) + M \ddot{x}_C h + R h = N_1 (b + c),$$

или

$$N_1 = \frac{M g (h \sin \alpha + (k - c) \cos \alpha) + M \ddot{x}_C h + R h}{(b + c)}.$$

Полученное выражение можно подставить в формулу (3.10.8) и получить значение коэффициента трения скольжения, обеспечивающего отсутствие пробуксовки ведущих колес.

# 4. Принцип Даламбера

## 4.1. Принцип Даламбера для материальной точки

Рассмотрим движение материальной точки массой  $m$  в пространстве инерциальной системы отсчета  $Oxyz$  (рис. 4.1.1). Пусть точка движется под действием активных сил, равнодействующая которых  $\vec{F}$ . На точку наложены связи,  $\vec{N}$  – равнодействующая сил реакций этих связей.

Дифференциальное уравнение движения точки может быть записано в виде

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}.$$

Это уравнение можно записать так

$$\vec{F} + \vec{N} + (-m\vec{a}) = 0.$$

Обозначим  $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ , назовем эту силу – силой инерции точки.

Получим

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0.$$

В таком случае можно сформулировать принцип Даламбера для материальной точки:

*В каждый момент времени активные силы, действующие на материальную точку силы реакции связей вместе с силой инерции точки, образуют уравновешенную систему сил.*

$$(\vec{F}, \vec{N}, \vec{\Phi}) \sim 0.$$

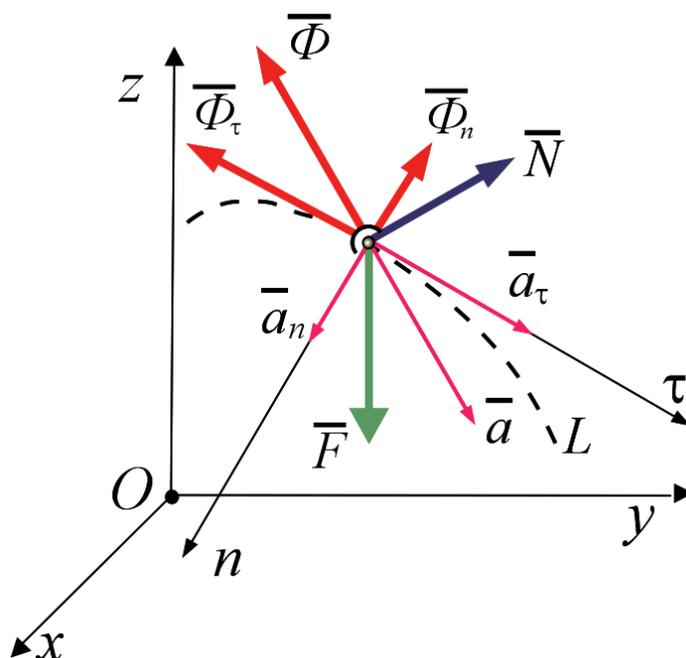


Рис. 4.1.1

С помощью принципа Даламбера можно для решения задач динамики использовать методы статики. Но надо иметь в виду, что мы лишь составили дифференциальное уравнение, а решать его придется, как обычно. Силу инерции можно записать в проекциях на оси неподвижной и подвижной системы отсчета (рис. 4.1.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_x = -m\ddot{x}, \\ \Phi_y = -m\ddot{y}, \\ \Phi_z = -m\ddot{z}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_n = -m\frac{v^2}{r}, \\ \Phi_\tau = -m\frac{dv_\tau}{dt}, \\ \Phi_\sigma = 0. \end{array} \right.$$

Понятие о силе инерции ввел еще Ньютон. Он рассуждал так: если точка движется под действием силы  $\bar{F} = m\bar{a}$ , то тело (или система тел), которая является источником этой силы. По закону равенства действия и противодействия ускоряемая точка будет воздействовать на ускоряющие ее тело с силой  $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$ . Эту силу Ньютон назвал системой инерции точки. Силы  $\bar{F}$  и  $\bar{\Phi}$  равны и противоположны, но приложены к разным телам. Поэтому, складывать их мы не имеем права. Сила инерции точки на саму точку не действует. Для точки это фиктивная сила. Вот, если бы на точку кроме силы  $\bar{F}$  действовала бы еще и сила  $\bar{\Phi}$ , то точка оставалась бы в покое.

### **Формулировки принципа Даламбера**

Ш. Делоне (1814 – 1872):

«В каждый момент времени имеет место динамическое равновесие приложенных к материальной точке активных сил, реакций связей, а также силы инерции точки».

Формулировка А.Ю. Ишлинского [2]:

«Каждому абсолютному движению точки твердого тела или какой-либо механической совокупности всегда можно поставить соответствие такие же механические объекты, однако, лишенные движения и сохраняющие при тех же внешних и внутренних силах равновесие вследствие действия приложенных к ним некоторых дополнительных сил. Эти силы в точности равны даламберовым силам инерции в исходном абсолютном движении».

Принцип Даламбера наиболее целесообразно применять в том случае, когда нужно определить неизвестные силы, т.е. при решении первой задачи динамики.



**Жан Лерон Даламбер** (*Jean Le Rond D'Alembert*, 1717-1783 гг.). Д'Аламбер был незаконным сыном маркизы де Тансен от артиллерийского офицера Детуша. Вскоре после рождения младенец был подкинут матерью на ступени парижской «Круглой церкви Св. Иоанна» (фр. *Église Saint-Jean-le-Rond*). В честь этой церкви ребёнок был назван Жаном Лероном. Воспитывался в усыновившей его семье стекольщика Руссо. Рано проявившийся талант позволил мальчику получить хорошее образование. Уже в возрасте 22 лет Д'Аламбер

представил Парижской академии свои сочинения, а в 23 года был избран адъюнктом Академии.

В 1743 году вышел «Трактат о динамике», где сформулирован фундаментальный «Принцип Д'Аламбера», сводящий динамику несвободной системы к статике. Здесь он впервые сформулировал общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем. С 1751 года Д'Аламбер работал вместе с Дидро над созданием знаменитой «Энциклопедии наук, искусств и ремёсел». Статьи 17-томной

«Энциклопедии», относящиеся к математике и физике, написаны Д'Аламбером. «Энциклопедия» сыграла большую роль в распространении идей Просвещения и идеологической подготовке Французской революции.



**Делоне Шарль-Эжен** (*Charles-Eugène Delaunay*; 1816 – 1872 гг.). Математик, астроном, горный инженер французский астроном и математик. Его исследования в области теории движения Луны стали весомым вкладом как в развитие теории движения планет, так и в области математики. Де-

лоне стал директором Парижской обсерватории в 1870. Был членом Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, иностранным членом-корреспондентом Петербургской академии наук.



**Алекса́ндр Ю́льевич Ишли́нский** (1913 – 2003гг.) – советский и российский учёный-механик, организатор науки и педагог. Герой Социалистического Труда (1961), академик АН СССР. С 1956 года – заведующий кафедрой прикладной механики МГУ, позднее переименованной в кафедру прикладной механики и процессов управления. Здесь он создал оригинальный годовой спецкурс «Основной курс теории гироскопов» и организовал спецсеминар по теории гироскопов. В 1959—1960 гг. – директор Института механики МГУ. В 1950-х годах начинается активное участие А. Ю. Ишлинского в осуществлении ракетно-космических программ СССР, проводившихся под общим инженерным руководством Сергея Павловича Королёва.

### Пример 4.1.1

Найти ускорение, с которым надо двигать гладкую наклонную плоскость горизонтально, чтобы шарик массой  $m$ , положенный на нее, не скатывался.

#### Решение

1. Рассмотрим движение шарика в пространстве неподвижного основания, полагая, что ускорение  $\bar{a}$  клина выбрано таким, что шарик не скатывается.

2. Заданные силы: сила тяжести  $\bar{G}$ ;  $G = mg$ .

3. Связь: гладкая поверхность клина. Реакция поверхности  $\bar{N}$ .

4. Движение шарика совершается под действием двух сил  $\bar{G}$  и  $\bar{N}$ . Чтобы применить принцип Даламбера к решению задачи, введем в рассмотрение силу инерции шарика.

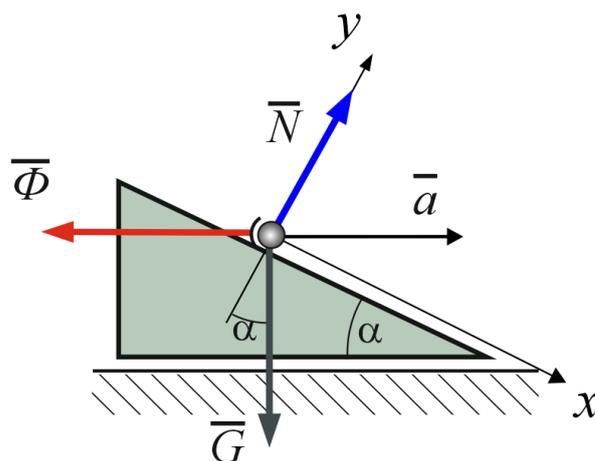


Рис. 4.1.2

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}, \quad \Phi = ma.$$

5. По принципу Даламбера имеем  $(\bar{G}, \bar{N}, \bar{\Phi}) \sim 0$ .

6. Составим уравнения равновесия данной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= G \sin \alpha - \Phi \cos \alpha = 0, & mg \sin \alpha - ma \cos \alpha &= 0, \\ \sum F_y &= -G \cos \alpha + N - \Phi \sin \alpha = 0, & -mg \cos \alpha + N - ma \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Решая данные уравнения, получим:

$$a = g \operatorname{tg} \alpha, \quad N = m(g \cos \alpha + g \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha).$$

### Пример 4.1.2

Сосуд в форме круглого цилиндра с вертикальной осью вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вместе с находящейся в ней жидкостью (рис. 4.1.3).

Найти форму свободной поверхности жидкости.

#### Решение

1. Рассмотрим движение частицы жидкости  $M$  массой  $m$  на свободной поверхности как материальной точки и проведем через эту точку и через ось цилиндра плоскость, которая пересечет свободную поверхность жидкости по линии  $BOA$ . Найдем уравнение этой линии по отношению к координатным осям.

2. *Заданные силы:* сила тяжести  $\bar{G}$ ;  $G = mg$ .

3. *Связь:* остальные частицы жидкости; если пренебречь вязкостью, то реакция  $\bar{N}$  будет направлена по нормам к поверхности жидкости в точке  $M$ .

4. *Силы инерции:* при равномерном вращении сосуда частица будет иметь нормальное ускорение, следовательно, сила инерции будет центробежной, направленной по радиусу  $r$  от оси вращения  $z$ .

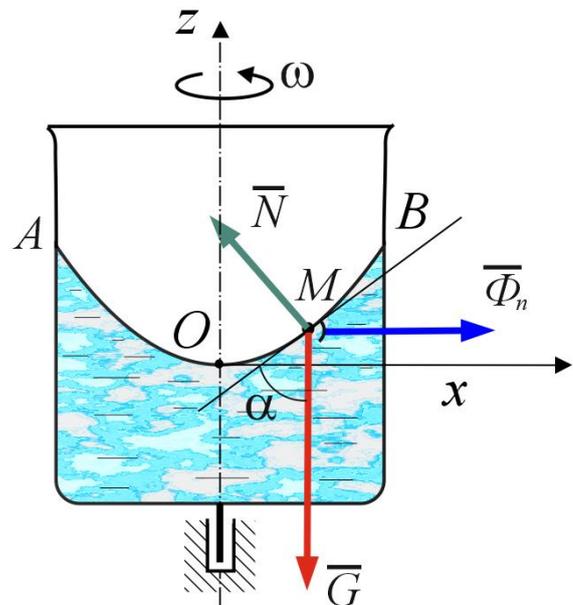


Рис. 4.1.3

$$\Phi = \frac{mv^2}{x} = mx\omega^2,$$

5. По принципу Даламбера  $(\bar{N}, \bar{G}, \bar{\Phi}) \sim 0$ .

6. Проецируя эти силы на касательную к  $AOB$  в точке  $M$  получим

$$mx\omega^2 \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0,$$

Отсюда получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2}{g} x, \text{ а так как } \operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dx}, \text{ то } \frac{dz}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}, \quad y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C.$$

Если начало координат взять в точке  $O$  то  $C = 0$ .

Уравнение  $y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$  – уравнение параболы и, следовательно, свободная

поверхность жидкости представляет собою параболоид вращения вокруг оси  $z$ .

### Пример 4.1.3

Шарик массой  $m$ , подвешенный на нити длиной  $l$ , представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить отклонена на угол  $\varphi$  (рис. 4.1.4).

Найти этот угол, если угловая скорость вращения шарика равна  $\omega$ .

#### Решение

1. Рассмотрим движение шарика относительно неподвижного основания.

2. Активная сила:  $\bar{P} = m\bar{g}$ .

3. Связь: нить, её реакция –  $\bar{N}$ .

4. Введем силу инерции точки:

– ускорение точки:  $\bar{a} = \bar{a}^n \Rightarrow a_n = \omega^2 l \sin \varphi$ ;

– её сила инерции:  $\bar{\Phi} = m\omega^2 l \sin \varphi$ .

5. По принципу Даламбера  $(\bar{P}, \bar{N}, \bar{\Phi}) \sim 0$ .

6. Составим уравнения равновесия данной системы сил:

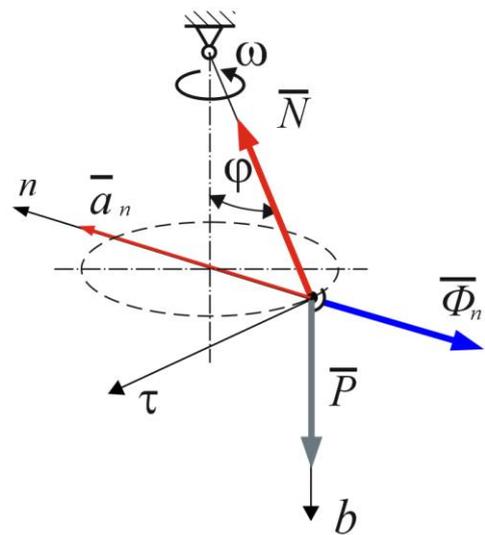


Рис. 4.1.4

$$\sum F_{\tau} = 0, \quad \sum F_n = N \sin \varphi - m \omega^2 l \sin \varphi = 0,$$

$$\sum F_b = m g - N \cos \varphi = 0 \Rightarrow N = \frac{m g}{\cos \varphi}.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$\frac{m g}{\cos \varphi} - m \omega^2 l = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l \cos \varphi}.$$

## 4.2. Принцип Даламбера для механической системы

Рассмотрим движение механической системы  $\{M_k\}_n$  материальных точек в пространстве инерциальной системы отсчета  $xOy$  (рис. 4.2.1),

Пусть  $\{\bar{F}_k^e\}_n$  – внешние силы, действующие на точки системы, а  $\{\bar{F}_k^i\}_n$  – внутренние силы системы.  $\bar{a}_k$  – ускорение некоторой точки  $M_k$ , масса которой  $m_k$ .  $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$  – сила инерции этой точки.

Принцип Даламбера для отдельной точки записывается в виде:

$$\left( \bar{\Phi}_k, \bar{F}_k^e, \bar{F}_k^i \right) \sim 0.$$

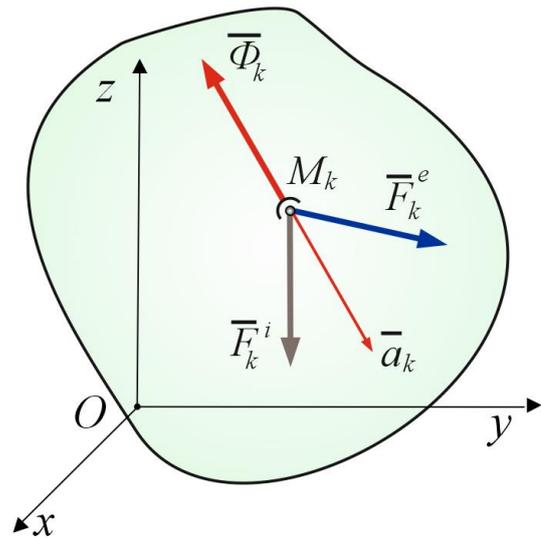


Рис. 4.2.1

Для всей механической системы его можно представить так:

$$\left( \left\{ \bar{F}_k^e \right\}_n ; \left\{ \bar{F}_k^i \right\}_n ; \left\{ \bar{\Phi}_k \right\}_n \right) \sim 0.$$

Силы внешние и внутренние, действующие на М.С. вместе с силами инерции частиц системы образуют уравновешенную систему сил.

Чтобы решить какую-либо задачу динамики с помощью принципа Даламбера нужно составить условия равновесия системы сил. Причем, поскольку

главный вектор и главный момент внутренних сил равен нулю, то предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\left( \left\{ \bar{F}_k^e \right\}_n, \left\{ \bar{\Phi}_k \right\}_n \right) \sim 0$$

### Пример 4.2.1

Найти связь между угловой скоростью вращения стержня  $AB$  длиной  $l$  и массой  $m$  и углом отклонения его от вертикали  $\varphi$  (рис. 4.2.2).

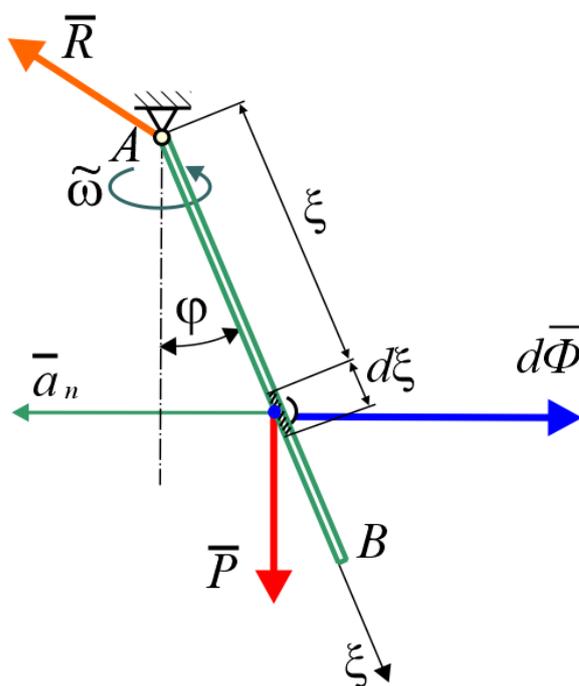


Рис. 4.2.2

### Решение

1. Рассмотрим движение частиц  $dm$  составляющих стержень в пространстве неподвижного основания.

2. Заданные силы: сила тяжести  $-\bar{P}$ ;  $P = mg$ .

3. Связь: шарнир  $A$ . Его реакция  $-\bar{R}_A$ .

4. Введем в рассмотрение силы инерции частиц стержня.

Частица  $dm = \frac{M}{l} d\xi$ ,

имеет ускорение

$$a_n = \omega^2 \xi \sin \varphi$$

Следовательно, сила инерции частицы:

$$d\Phi = \frac{M}{l} \omega^2 \xi \sin \alpha d\xi$$

5. Запишем принцип Даламбера для данной системы

$$\left( \bar{P}, \bar{R}_A, \{d\bar{\Phi}\} \right) \sim 0$$

6. Для решения задачи используем лишь одно условие равновесия:

$$\sum m_A F = -\frac{Pl}{2} \sin \varphi + \int_0^l m_A d\Phi = 0$$

Вычисляя интеграл в данном уравнении, получим:

$$\int_0^l m_A d\Phi = \int_0^l \xi \cos \varphi \frac{M}{l} \omega^2 \xi \sin \varphi d\xi = \frac{M \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi}{3l} \xi^3 \Big|_0^l =$$

$$= \frac{M \omega^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi}{3}.$$

В итоге получаем:

$$\frac{M g l}{2} \sin \varphi = \frac{M \omega^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi}{3} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{3}{2} \frac{g}{l \omega^2}.$$

### 4.3. Главный вектор и главный момент сил инерции частиц твердого тела

Характеристиками действия системы сил на тело является главный вектор и главный момент данной системы сил относительно какого-либо центра  $A$ .

По принципу Даламбера имеем, для твердого тела

$$\left( \{d\bar{\Phi}\}, \{\bar{F}_k^e\}_n \right) \sim 0.$$

Действие произвольной системы сил  $\{\bar{F}_k^e\}$  характеризуется главным вектором и главным моментом внешних сил относительно центра  $A - \bar{U}_A^e, \bar{L}_A^e$ . Действие сил инерции характеризуется главным вектором и главным моментом сил инерции  $\bar{U}_A^\Phi, \bar{L}_A^\Phi$ .

Тогда в соответствии с аксиомой равновесия можем записать:

$$\bar{U}_A^e + \bar{U}_A^\Phi = 0, \quad \bar{L}_A^e + \bar{L}_A^\Phi = 0$$

или

$$\bar{U}_A^\Phi = -\bar{U}_A^e, \quad \bar{L}_A^\Phi = -\bar{L}_A^e.$$

По теореме о количестве движения [3] имеем:

$$\bar{U}_A^e = \frac{d\bar{Q}}{dt} = M \bar{a}_c.$$

Отсюда

$$\bar{U}_A^\Phi = -M \bar{a}_c. \quad (4.3.1)$$

Главный вектор сил инерции твердого тела равен взятому с обратным знаком произведению массы тела на ускорение центра масс.

По теореме о кинетическом моменте относительно неподвижного центра или центра масс, получим

$$\bar{L}_A^e = \frac{d\bar{K}_A}{dt},$$

при неподвижной точке  $A$ ,

$$\bar{L}_C^e = \frac{d\bar{K}_C^r}{dt}.$$

и

если точка  $C$  является центром масс.

Главный момент сил инерции относительно неподвижного центра или центра масс равен взятой с обратным знаком производной кинетического момента относительно этого центра.

$$\bar{L}_A^\Phi = \frac{d\bar{K}_A}{dt}; \quad \bar{L}_C^\Phi = \frac{d\bar{K}_C^r}{dt}.$$

При неподвижной точке  $A$  имеет место сферическое движение. Связав жестко с телом подвижную систему отсчета, можно записать:

$$\bar{K}_A = \mathbf{I}_A \bar{\omega},$$

где  $\mathbf{I}_A$  – тензор инерции тела относительно точки  $A$ .

По формуле Бура (см. сложное движение точки), имеем:

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{K}_A}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{K}_A,$$

$\frac{\tilde{d}\bar{K}_A}{dt}$  – относительная производная кинетического момента в подвижной системе отсчета, жестко связанной с телом.

В этой системе  $\mathbf{I}_A = \text{const}$ , значит

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt} = \mathbf{I}_A \frac{\tilde{d}\bar{\omega}}{dt},$$

но

$$\frac{\tilde{d}\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon},$$

поскольку  $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{\omega}}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}$ , а  $\bar{\omega}_e \times \bar{\omega} = 0$ , так как  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_e$ .

Теперь

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt} = \mathbf{I}_A \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times (\mathbf{I}_A \bar{\omega}).$$

Следовательно:

$$\bar{L}_A^\Phi = -\mathbf{I}_A \bar{\varepsilon} - \bar{\omega} \times (\mathbf{I}_A \bar{\omega}) \quad (4.3.2)$$

при неподвижной точке  $A$ .

Аналогично

$$\bar{L}_C^\Phi = -\mathbf{I}_C \bar{\varepsilon} - \bar{\omega} \times (\mathbf{I}_C \bar{\omega}), \quad (4.3.3)$$

если  $C$  – центр масс, поскольку движение относительно центра масс сферическое.

## 4.4. Приведение сил инерции частиц твердого тела к центру

Любая система сил приведением к выбранному центру  $A$  может быть заменена результирующей силой, равной главному вектору сил системы и результирующей парой, равной главному моменту сил системы относительно центра приведения.

Точно также можно привести к центру  $A$  и силы инерции частиц твердого тела:

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\bar{\Phi}_A, \bar{m}_A^\Phi), \quad (4.4.1)$$

$$\text{где } \bar{\Phi}_A = \bar{U}_A^\Phi = -M \bar{a}_C, \quad (4.4.2)$$

– главный вектор сил инерции частиц твердого тела,

а 
$$\bar{m}_A^\Phi = \bar{L}_A^\Phi = -\mathbf{I}_A \bar{\varepsilon} - \bar{\omega} \times (\mathbf{I}_A \cdot \bar{\omega}). \quad (4.4.3)$$

– главный момент сил инерции частиц твердого тела, если точка  $A$  неподвижная или является центром масс, (см. формулы 4.3.1 – 4.3.3).

### ***Частные случаи приведения сил инерции к центру***

#### **а) Поступательное движение (рис 4.4.1)**

За точку приведения берется центр масс тела. Вращение тела относительно центра масс отсутствует, следовательно  $\bar{m}_C^\Phi = 0$ .

Итак:

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim \bar{\Phi}_C; \quad \bar{\Phi}_C = -M \bar{a}_C.$$

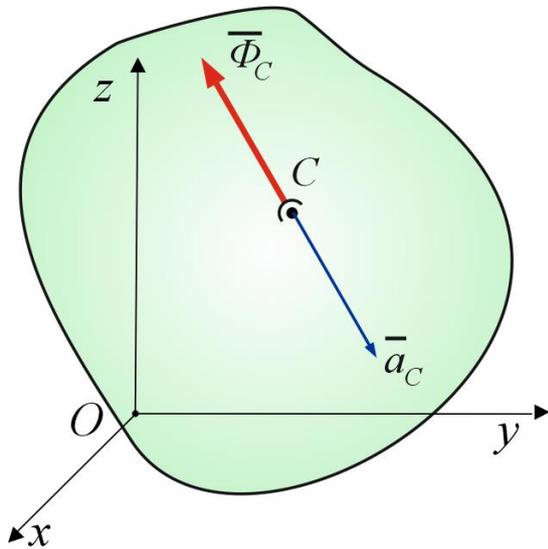


Рис 4.4.1

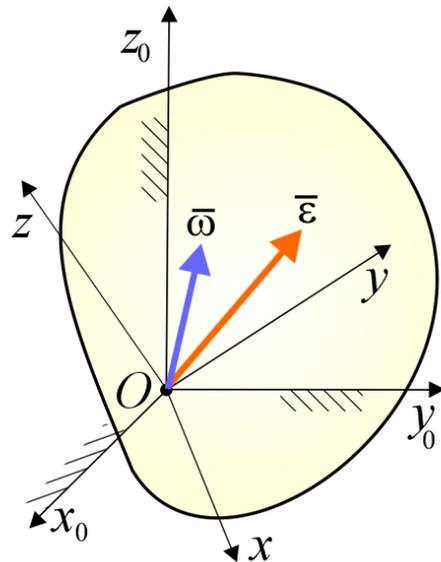


Рис 4.4.2

#### **б) Сферическое движение твердого тела (рис 4.4.2)**

В этом случае за центр приведения удобно взять неподвижную точку  $O$ . Свяжем с телом подвижную систему отсчета  $Ox_0y_0z_0$ . Теперь:

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\bar{\Phi}_O, \bar{m}_O^\Phi),$$

где  $\bar{\Phi}_O = -M \bar{a}_C$ ,  $\bar{a}_C$  – ускорение центра масс;

$$\bar{m}_O^\Phi = -\mathbf{I}_O \bar{\varepsilon} - \bar{\omega} \times (\mathbf{I}_O \cdot \bar{\omega}).$$

### в) Общий случай движение твердого тела

В общем случае движения твердого тела, если за центр приведения взять центр масс, то получаем

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\bar{\Phi}_C, \bar{m}_C^\Phi),$$

где  $\bar{\Phi}_C = -M \bar{a}_C$ ,  $\bar{m}_C^\Phi = -\mathbf{I}_C \bar{\varepsilon} - \bar{\omega} \times (\mathbf{I}_C \cdot \bar{\omega})$ .

### г) Вращение тела вокруг неподвижной оси (рис 4.4.3)

Это частичный случай сферического движения тела. За центр приведения возьмем точку  $O$  на оси вращения. Так как ускорение центра масс  $\bar{a}_c$  перпендикулярно оси вращения, то результирующая сила инерции  $\bar{\Phi}_O$  лежит в плоскости  $xOy$ .

Ускорение центра масс равно

$$\bar{a}_c = \bar{a}_c^n + \bar{a}_c^\tau,$$

где  $a_c^n = \omega^2 h$ ,  $a_c^\tau = \varepsilon h$ .

Результирующая сила инерции найдется по формуле:

$$\bar{\Phi}_O = \bar{\Phi}_O^n + \bar{\Phi}_O^\tau, \text{ причем } \bar{\Phi}_O^n \parallel \overline{O_1C}, \bar{\Phi}_O^\tau \perp \overline{O_1C}.$$

В данном случае

$$\bar{\omega} = \tilde{\omega} \bar{k}; \quad \bar{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon} \bar{k}; \quad \bar{\omega} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\omega} \end{vmatrix}; \quad \bar{\varepsilon} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\varepsilon} \end{vmatrix}$$

Теперь  $\mathbf{I}_O \bar{\varepsilon} = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\varepsilon} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -J_{xz} \tilde{\varepsilon} \\ -J_{yz} \tilde{\varepsilon} \\ J_z \tilde{\varepsilon} \end{vmatrix}.$

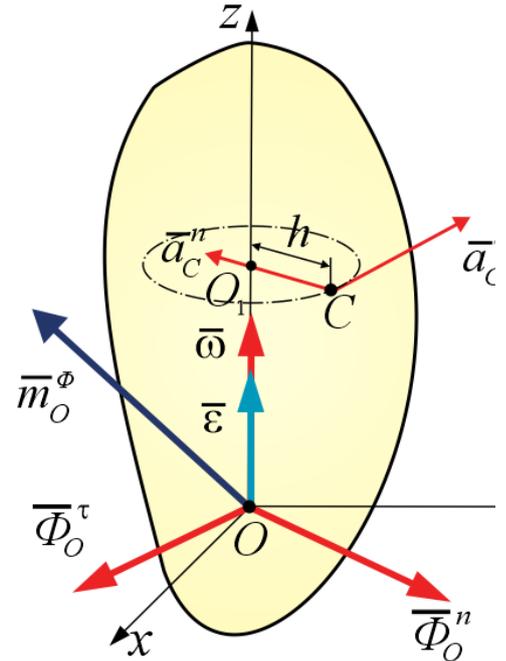


Рис. 4.4.3

Аналогично получаем

$$\mathbf{I}_O \bar{\omega} = \begin{vmatrix} -J_{xz} \tilde{\omega} \\ -J_{yz} \tilde{\omega} \\ J_z \tilde{\omega} \end{vmatrix}, \quad \bar{\omega} \times (\mathbf{I}_O \bar{\omega}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \tilde{\omega} \\ -J_{xz} \omega & J_{yz} \omega & J_z \omega \end{vmatrix} = \bar{i} \omega^2 J_{yz} - \bar{j} \omega^2 J_{xz}$$

Или, в матричной форме:

$$\bar{\omega} \times (\mathbf{I}_O \bar{\omega}) = \begin{vmatrix} \omega^2 J_{yz} \\ -\omega^2 J_{xz} \\ 0 \end{vmatrix}$$

В итоге

$$\bar{m}_O^\Phi = \begin{vmatrix} -\omega^2 J_{yz} + \tilde{\varepsilon} J_{xz} \\ \omega^2 J_{xz} + \tilde{\varepsilon} J_{yz} \\ -J_z \tilde{\varepsilon} \end{vmatrix}$$

$$\bar{\Phi}_O = \bar{\Phi}_O^n + \bar{\Phi}_O^\tau, \quad \bar{\Phi}_O^n = -M \bar{a}_c^n, \quad \bar{\Phi}_O^\tau = -M \bar{a}_c^\tau,$$

$$\bar{m}_O^\Phi = \bar{\tau} (\tilde{\varepsilon} J_{xz} - \tilde{\omega}^2 J_{yz}) + \bar{j} (\tilde{\varepsilon} J_{yz} + \tilde{\omega}^2 J_{xz}) - \bar{k} \bar{\varepsilon} J_z.$$

### ***Частные случаи вращения тела***

1. Тело вращается вокруг главной, нецентральной оси (рис. 4.4.4)

$$J_{xz} = J_{yz} = 0$$

$\bar{m}_O^\Phi$  можем рассматривать, как алгебраическую величину:

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\tilde{m}_O^\Phi, \bar{\Phi}_O), \quad \bar{\Phi}_O = \bar{\Phi}_O^n + \bar{\Phi}_O^\tau, \quad \tilde{m}_O^\Phi = -\tilde{\varepsilon} J_z.$$

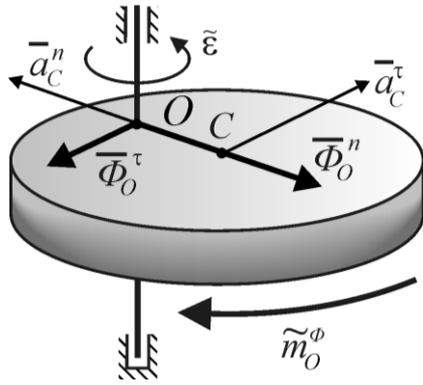


Рис. 4.4.4

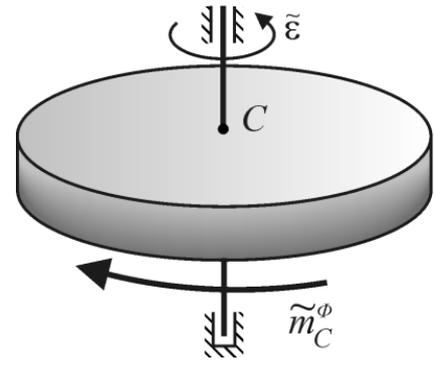


Рис. 4.4.5

2. Тело вращается вокруг главной, центральной оси (рис. 4.4.5)

$$\bar{\Phi}_C = 0, \Rightarrow \{d\bar{\Phi}\} \sim (\tilde{m}_O^\Phi).$$

#### д) Плоское движение

Рассмотрим движение тела параллельно плоскости его материальной симметрии (рис 4.4.6). За центр приведения возьмем центр масс. Относительное движение – вращение вокруг главной центральной оси тела  $z_c$ .

$$\tilde{m}_C^\Phi = -J_{z_c} \tilde{\varepsilon}.$$

Итак

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\bar{\Phi}_C, \tilde{m}_C^\Phi),$$

$$\bar{\Phi}_C = -M \bar{a}_C, \quad \tilde{m}_C^\Phi = -J_{z_c} \tilde{\varepsilon}.$$

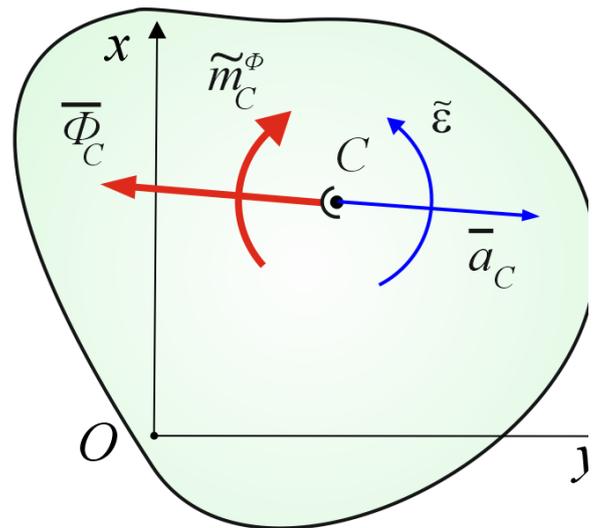


Рис. 4.4.6

## 4.5. Определение динамических реакций опор

При движении несвободного твёрдого тела принято реакции связей представлять в виде суммы двух составляющих – статической и динамической.

В общем случае по принципу Даламбера имеем

$$\left( \left\{ \bar{R}_k \right\}_n ; \left\{ \bar{F}_k^e \right\}_n , \left\{ d\bar{\Phi} \right\}_n \right) \sim 0$$

где  $\left\{ \bar{R}_k \right\}_n$  – система сил реакций связей;

$\left\{ F_k^e \right\}_n$  – система внешних заданных сил, действующих на точки механической системы;

$\left\{ d\bar{\Phi} \right\}_n$  – система сил инерции точек механической системы.

Если представить, что

$$\left\{ \bar{R}_k \right\}_n \sim \left( \left\{ \bar{R}_{k\text{ст}} \right\}_n + \left\{ \bar{R}_{k\text{дин}} \right\}_n \right),$$

то статическими составляющими будем называть те, которые зависят только от внешних заданных сил:

$$\left( \left\{ \bar{R}_{k\text{ст}} \right\}_n , \left\{ \bar{F}_k^e \right\}_m \right) \sim 0.$$

Динамическими составляющими сил реакций связей будем называть те, которые зависят от движения тела и определяются силами инерции тела

$$\left( \left\{ \bar{R}_{k\text{дин}} \right\}_m , \left\{ d\bar{\Phi} \right\} \right) \sim 0.$$

В частности, для тела вращающегося вокруг неподвижной оси и закреплённого в подшипнике  $B$  и подпятнике  $A$  на этой оси будем иметь (рис. 4.5.1)

Примем  $|AB|=l$ .

2) Заданные силы  $\{\bar{F}_k\}_n$ .

3) Связи: подшипник  $B$ , подпятник

$A$ .

Их реакции:  $\bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ .

4) Введём в рассмотрение силы инерции тела

$$\{d\bar{\Phi}\} \sim (\bar{\Phi}_A, \bar{m}_A^\Phi).$$

$$\bar{\Phi}_A = -M a_C; \quad \bar{\Phi}_A = \bar{\Phi}_{Ax} + \bar{\Phi}_{Ay}.$$

$$\tilde{m}_{Az}^\Phi = -\tilde{\varepsilon} J_z,$$

$$\tilde{m}_{Ax}^\Phi = \tilde{\varepsilon} J_{zx} - \omega^2 J_{zy},$$

$$\tilde{m}_{Ay}^\Phi = \tilde{\varepsilon} J_{zy} + \omega^2 J_{zx}.$$

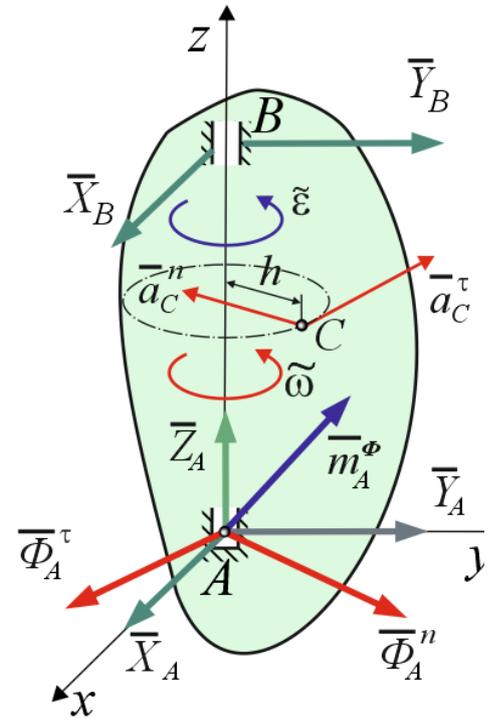


Рис. 4.5.1

5) В соответствии с принципом Даламбера

$$\left( \left\{ \bar{F}_k^e \right\}_m, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B, \{d\bar{\Phi}\} \right) \sim 0.$$

6) Составим уравнения равновесия для нахождения динамических составляющих реакций опор в соответствии с зависимостью

$$\left( \left\{ \bar{R}_{\text{дин}} \right\}, \{d\bar{\Phi}\} \right) \sim 0.$$

$$\sum F_x = X_A^{\text{дин}} + X_B^{\text{дин}} + \Phi_{Ax} = 0,$$

$$\sum F_y = Y_A^{\text{дин}} + Y_B^{\text{дин}} + \Phi_{Ay} = 0,$$

$$\sum F_z = Z_A^{\text{дин}} = 0,$$

$$\sum m_x F = -Y_B^{\text{дин}} l + \tilde{\varepsilon} J_{zx} - \omega^2 J_{zy} = 0,$$

$$\sum m_y F = X_A^{\text{дин}} l + \tilde{\varepsilon} J_{zy} + \omega^2 J_{zx} = 0.$$

Таким образом, для нахождения динамической составляющей будем иметь систему уравнений. Из этих уравнений видно, что при быстром враще-

нии тела динамические составляющие могут достигать больших величин. Динамические составляющие обращаются в нуль, если  $\Phi_A = 0$ ,  $J_{zy} = J_{zx} = 0$  т.е. ось вращения будет главной центральной осью инерции тела. Итак: Если ось вращения тела является главной центральной осью инерции тела, то реакции подшипников этой оси при движении не отличаются от статических. В этом случае говорят, что ось вращения – свободная ось, а тело уравновешенно. В противном случае тело неуравновешенно.

Виды неуравновешенности

**1. Ось вращения центральная, но не главная.** Т.е. для плоского диска ось вращения проходит через его центр, но не перпендикулярно плоскости диска (рис. 4.5.2). Говорят, что тело статически уравновешенно, но динамически неуравновешенно.

Динамическое воздействие вращающегося тела приводится к паре сил,  $(\bar{\Phi}'', \bar{\Phi}')$ , которая уравновешивается динамическими составляющими реакций

$$(\bar{R}_A, \bar{R}_B), \bar{R}_A = -\bar{R}_B$$

$$m(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = lR_B = l\sqrt{y_B^2 + x_B^2} = \sqrt{(J_{zx}^2 + J_{zy}^2)(\varepsilon^2 + \omega^4)}$$

Такую неуравновешенность можно упростить только путём динамической балансировки на специальных стендах.

**2. Ось вращения главная, но не центральная.** Т.е. для диска ось вращения перпендикулярна плоскости диска, но не проходит через его центр (рис. 4.5.3).

Здесь динамическое воздействие вращающегося тела сводится к силе  $\Phi_C = M a_C = M \omega^2 e$  (для  $\omega = \text{const}$ ). Если  $a$  и  $\hat{a}$  расстояние от диска до подшипников, то

$$R_A^{\text{дин}} = \frac{b}{a+b} M \omega^2 e; \quad R_B^{\text{дин}} = \frac{a}{a+b} M \omega^2 e.$$

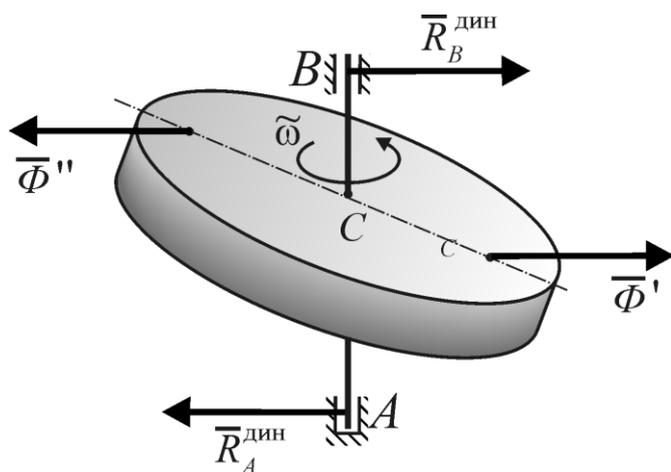


Рис. 4.5.2

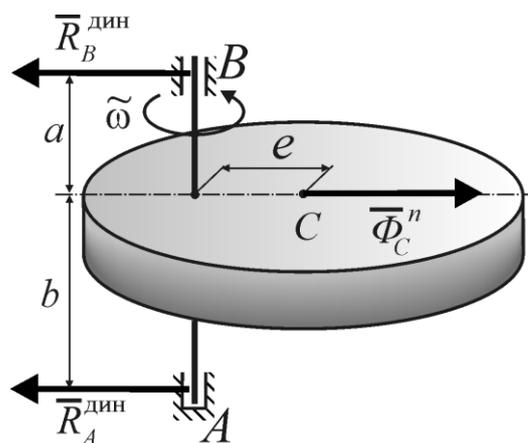


Рис. 4.5.3

Динамические составляющие представляют собой параллельные силы. Такая неуравновешенность над статической неуравновешенностью. Её можно устранить путём статической балансировки.

В общем случае вращающееся неуравновешенное тело не уравновешенно ни статически, ни динамически. Силы инерции можно в общем случае привести к двум скрещивающимся силам и, соответственно, силы реакции – две скрещивающиеся силы. Устранить такую неуравновешенность можно с помощью статической и динамической балансировки.

# 5. Элементы аналитической механики

## 5.1. Механическая система. Связи.

Механическая система – выделенное по какому-либо признаку множество взаимодействующих между собой материальных точек.

Твёрдое тело рассматривается как непрерывная совокупность материальных точек, расстояние между которыми сохраняется.

Механическая система называется свободной, если на положения и скорости точек не наложено никаких ограничений. Точки свободной механической системы из занимаемого положения могут перемещаться по любому направлению и с любыми скоростями. В противном случае механическая система – не свободная.

Ограничения на положения и скорости точек механической системы, налагаемые другими материальными объектами, называются связями. Связями называются также тела, осуществляющие эти ограничения.

### Классификация связей

По отношению к рассматриваемой системе связи делятся на *внешние и внутренние*. Внутренними называют связи, соединяющие между собой части составной конструкции и тела в систему тел. Внешними, являются связи, соединяющие систему с телами, в нее не входящими, например, соединяющие систему тел с основанием.

Иначе, если связями служат тела, принадлежащие системе, то связь внутренняя, если же тела внешние по отношению к системе, то связь внешняя.

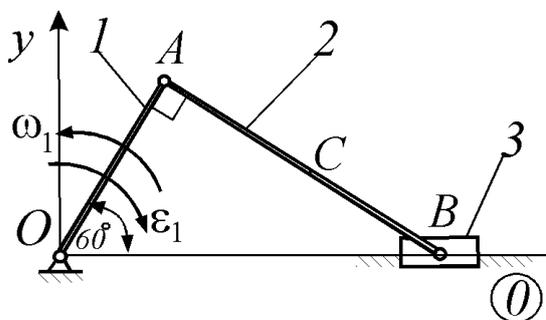


Рис. 5.1.1

**Пример 5.1.1.** Кривошипно-шатунный механизм, включающий кривошип, шатун, ползун (рис. 5.1.1).

*Внешние связи:* шарнир  $O$ , направляющая.

*Внутренние:* шарниры  $B$  и  $A$ .

Любая связь, наложенная на по-

ложение и скорость точки может быть представлена уравнением между координатами точки и их производными по времени

$$f\left(\{\bar{r}_k\}_n, \{\dot{\bar{r}}_k\}_n, t\right) = 0$$

Это уравнение называется *уравнением связи*.

По уравнению вида связи, они делятся на:

а. *Голономные* (геометрические, интегрируемые) и *неголономные* (кинематические, неинтегрируемые).

Голономные связи накладывают ограничения только на положение точек системы. Вид уравнения такой связи:

$$f\left(\{\bar{r}_k\}_n, t\right) = 0$$

*Неголономные* связи накладывают ограничения и на скорости точек. Уравнения этих связей не интегрируемы. Если их можно проинтегрировать, то связь будет голономной.

Пример неголономной системы – шар, катящийся без проскальзывания по шероховатой плоскости. При этом налагается ограничение не только на положение центра шара (геометрическая связь), но и на скорость точки его касания с плоскостью, которая в любой момент времени должна быть равна нулю (кинематическая связь, не сводящаяся к геометрической).

б. *Склерономные* (стационарные, неподвижные) и *реономные* (нестационарные).

Склерономные связи не содержат в своих уравнениях времени.

$$f\left(\{\bar{r}_k\}_n, \{\dot{\bar{r}}_k\}_n\right) = 0 \text{ – уравнение неголономной склерономной связи;}$$

$$f\left(\{\bar{r}_k\}_n, \{\dot{\bar{r}}_k\}_n\right) = 0 \text{ – голономная, склерономная связь.}$$

Когда связи, наложенные на систему, являются голономными, то и М.С. называются голономной, если к тому же уравнения связей не содержат времени, то м.с. называются голономной склерономной.

Наряду со связями, уравнения которых записываются в виде равенства и называемых *удерживающие*, в механике рассматриваются связи, которые записываются в виде неравенства

$$f\left(\{\bar{r}_k\}_n, \{\dot{\bar{r}}_k\}_n, t\right) \geq 0.$$

Такие связи называются *неудерживающими*.

Например, две материальные точки, радиусы-векторы которых  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$ , соединённые нитью длиной  $l$ . Эта связь выражается неравенством

$$l^2 - (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2 \geq 0.$$

Если в последнем условии имеет место знак равенства, то говорят, что *связь напряжена*.

### Пример 5.1.2

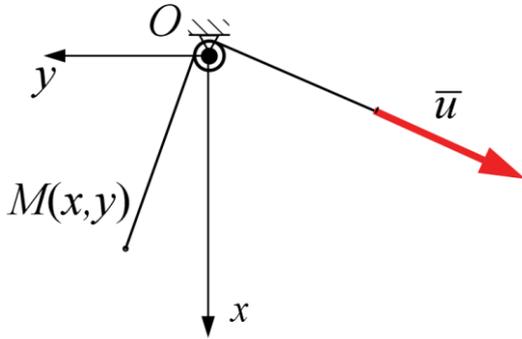


Рис. 5.1.2

Математический маятник подвешен на нити, перекинутый через блок, свободный конец которой тянут со скоростью  $u$  (рис. 5.1.2). Составить уравнение связи, наложенной на точку.

Рассмотрим движение точки в системе  $xOy$ .

Обобщённые координаты точки

$(x, y)$ .

$$x^2 + y^2 = (MO)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (l - ut)^2.$$

Это уравнение голономной, реономной, удерживающей связи.

## 5.2. Обобщённые координаты. Число степеней свободы.

Независимые между собой величины, заданием которых однозначно определяется положение НМС в пространстве в любой момент времени называются обобщёнными координатами НМС.

Число обобщённых координат определяет число степеней свободы НМС в пространстве. Соответствие между положением НМС в пространстве и значениями её обобщённых координат не является взаимно однозначным. Действительно, заданием значений обобщённых координат вполне определяется единственное положение НМС в пространстве. Однако некоторому положению НМС может соответствовать несколько наборов его обобщённых координат, если это положение в пространстве НМС занимает в различные моменты времени.

Как же определить число обобщённых координат, иначе число степеней свободы системы? Пусть система состоит из  $n$  материальных точек. Положение НМС в пространстве определяется заданием координат этих точек. Теперь, пусть эти точки связаны  $t$  голономными, т.е. геометрическими связями. (Чис-

ло неголономных - кинематических – связей неважно). Следовательно,  $3n$  координат точек связаны  $m$  уравнениями связей независимых координат, таким образом, будет

$$s = 3n - m.$$

Этим равенством определяется число независимых координат НМС.

В случае плоского движения эта формула преобразуется к виду

$$s = 2n - m.$$

Если в систему входят не только точки, но и тела, то указанный набор из координат будет состоять из координат точек НМС, входящих в её состав и координат, которыми задаётся положение в пространстве тел, входящих в эту НМС.

### Пример 5.2.1

Система представляет собой 2 точки жёстко соединенные (стержень) (рис.5.2.1). Найти число степеней свободы. Для двух точек общее число координат равно 6.

Уравнение связи одно

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2.$$

Т.е.  $s = 6 - 1 = 5$  степеней свободы.

На плоскости для стержня будем иметь 2 степени свободы.

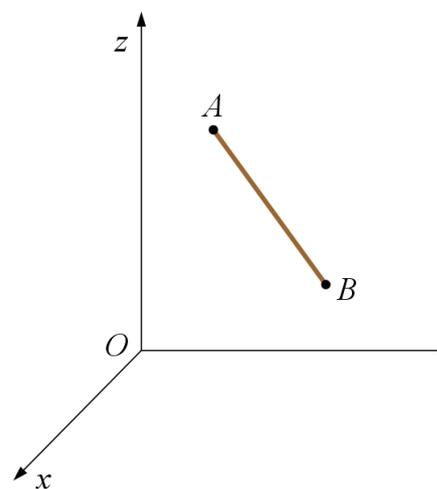


Рис. 5.2.1

### 5.3. Действительные и возможные перемещения

Рассматривается движение несвободной механической системы материальных точек. Пусть на эту систему будет наложено  $m$  стационарных голономных связей, уравнения которых

$$f_i(\{\bar{r}_k\}_n) = 0, \quad i = 1, m.$$

Для одной точки возможным перемещением назовём такое бесконечно малое перемещение, которое может совершить точка из занимаемого ей в данный момент времени положения, не нарушая наложенных на неё связей.

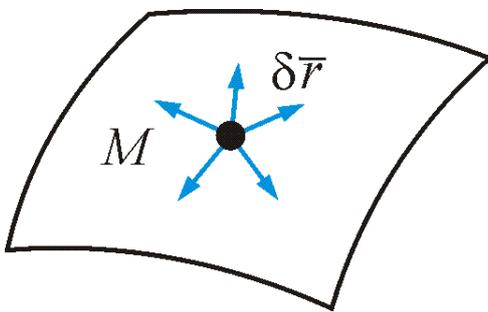


Рис. 5.3.1

Обозначим его  $\delta \bar{r}_k$ . Это мысленное перемещение, которое могла бы совершить точка при наложенных на неё связях.

Например, если связью для точки является какая-нибудь поверхность и точка находится на ней в данный момент в положении  $M$  (рис. 5.3.1), то возможными перемещениями точки в этот момент будут элементарные отрезки (векторы)  $\delta \bar{r}$ , направленные по касательной к поверхности в точке  $M$ .

Действительное перемещение – это бесконечно малое перемещение точки за время  $dt$  под действием приложенных сил и при заданных начальных условиях и наложенных связях.

Обозначим его  $d \bar{r}_k$ . Действительное перемещение принадлежит к числу возможных. Возможное перемещение будет полным дифференциалом радиус-вектора точки.

Число независимых возможных перемещений равно числу степеней свободы системы.

Возможными скоростями точек системы  $\bar{v}_k^{\hat{a}}$  будет называть любые скорости точек, дозволяемые связями.

Возможной работой силы  $\bar{F}$  на данном возможном перемещении будем называть элементарную работу силы на этом возможном перемещении

возможной работой силы  $\bar{F}$  на данном возможном перемещении будем называть элементарную работу силы на этом возможном перемещении

$$\delta A_k^B = \bar{F} \cdot \delta \bar{r}_k.$$

Возможной мощностью силы на  $k$ -ом возможном перемещении назовём мощность силы  $\bar{F}$  при наличии возможной скорости  $\bar{v}_k^{\hat{a}}$ .

$$W_k^B = \bar{F} \cdot \bar{v}_k^B.$$

## 5.4. Идеальные связи

Связи системы называются идеальными, если сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении точек системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{R_k}^B = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k.$$

При использовании понятия возможной скорости условие идеальности имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n W_{R_k}^B = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \bar{v}_k^B = 0, \quad \forall \bar{v}_k^B.$$

Примерами идеальных связей являются: гладкие (без трения) плоскость и поверхность, гладкие цилиндрический и сферический шарниры, невесомая нерастяжимая нить, идеальный стержень и т.п. Идеальными могут быть не только гладкие связи, но в некоторых случаях и связи с трением. Например, шероховатая поверхность по отношению к твердому телу, катящемуся по ней без проскальзывания, является идеальной связью, если трение качения отсутствует (рис. 5.4.1). Действительно, вычисляя возможную работу реакции  $\bar{R}$  получаем

$$\bar{R} \cdot \bar{v}_K^B = 0, \quad \text{т.к. } \bar{v}_K^B = 0.$$

Шероховатая поверхность при отсутствии скольжения идеальная связь.

Однако шероховатая поверхность для скользящего тела – неидеальная связь (рис. 5.4.2).

Шероховатая деформируемая поверхность для катка – неидеальная связь (рис. 5.4.3).

*Связи без трения – идеальны.*

В абсолютно твёрдом теле точки связаны идеальными связями.

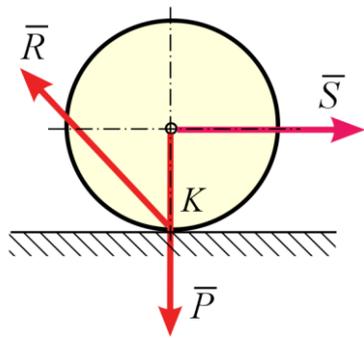


Рис. 5.4.1

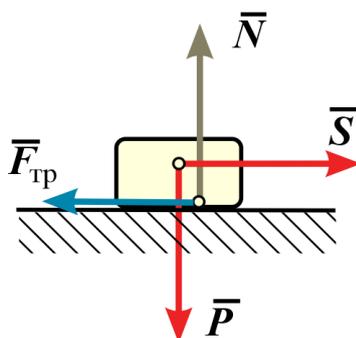


Рис. 5.4.2

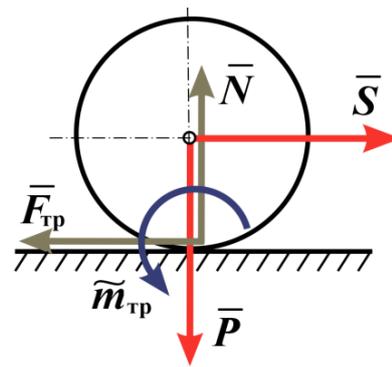


Рис. 5.4.3

## 5.5. Принцип Даламбера – Лагранжа

Этот принцип может быть введён как исходное, основополагающее положение механики, если принять его за аксиому, он может быть основой построения всех положений статики.

В любой момент времени для системы с идеальными, голономными, стационарными удерживающими связями сумма элементарных работ заданных активных сил и даламберовых сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k}^B + \sum_{k=1}^n \delta A_{\Phi_k}^B = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k;$$

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k) = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k.$$

(5.5.1)

или

$$\sum_{k=1}^n W_{F_k}^B + \sum_{k=1}^n W_{\Phi_k}^B = 0, \quad \forall \bar{v}_k^B;$$

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k \cdot \bar{v}_k^B + \bar{\Phi}_k \cdot \bar{v}_k^B) = 0, \quad \forall \bar{v}_k^B.$$

(5.5.2)

Уравнения (1) называют ещё *общим уравнением динамики*.

Принцип Даламбера – Лагранжа должен выполняться для любого возможного перемещения, однако, если система имеет  $s$  степеней свободы, то только  $s$  из этих перемещений, соответствующих изменению обобщённых координат

будут независимыми. Значит достаточно выполнение принципа Даламбера – Лагранжа лишь для независимых парциальных движений.

Частным случаем движения является равновесие НМС. При равновесии  $\{\bar{\Phi}_k\}_n \sim 0$ , поэтому при равновесии получим *принцип возможных перемещений* (ПВП).

Для равновесия НМС со стационарными идеальными голономными неосвобождающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении системы равнялась нулю

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k}^B = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k \quad \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k. \quad (5.5.3)$$

, или

Условие равновесия может быть сформулировано в виде принципа возможных скоростей (ПВС).

Для равновесия НМС со стационарными идеальными, голономными, удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных мощностей равнялась нулю.

$$\sum_{k=1}^n W_{F_k}^B = 0, \quad \forall \bar{v}_k^B; \quad \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \bar{v}_k^B = 0, \quad \forall \bar{v}_k^B. \quad (5.5.4)$$

или

Для описания равновесия НМС достаточно выполнения условий (3) и (4) на каждом из парциальных движений системы.

## 5.6. Общее уравнение динамики в обобщённых координатах

Запишем общее уравнение динамики для системы материальных точек

$$\sum_{k=1}^n \delta A_{F_k}^{\hat{a}} + \sum_{k=1}^n \delta A_{\Phi_k}^{\hat{a}} = \sum_{k=1}^n (\bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k) = 0, \quad \forall \delta \bar{r}_k.$$

Или

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Возможное перемещение  $k$ -ой точки можно представить, как функцию обобщённых координат системы (для голономных стационарных систем)

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, \text{ где } \delta q_j \text{ вариации обобщённых координат.}$$

Теперь получим

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

Поменяем местами знаки суммирования:

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0.$$

Так как обобщённые координаты независимы между собой, то последнюю сумму можно представить как совокупность  $s$  отдельных уравнений

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, s).$$

Полученные уравнения являются основой для вывода уравнений Лагранжа II рода.

## 5.7. Уравнения Лагранжа II рода

Основная идея Лагранжа заключается в том, чтобы полученные выше уравнения динамики представить в виде двух слагаемых

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, s).$$

Первую сумму Лагранж назвал обобщённой силой. Она определяет меру действия внешних сил на механическую систему.

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, s).$$

Для вычисления обобщённых сил механической системы обычно используется один из двух методов:

1. Системе необходимо сообщить такое возможное перемещение, при котором изменяется только одна обобщенная координата, а другие при этом не изменяются.

$$(\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_m = 0)$$

На этом перемещении подсчитывается элементарная работа активных сил и то, что будет коэффициентом при  $\delta q_1$  и будет обобщенной силой  $Q_1$ , соответствующей обобщенной координате  $q_1$ . Затем системе сообщается перемещение, при котором изменяется только координата  $q_2$ , и аналогичным образом находится сила  $Q_2$  и так далее.

2. Записывается выражение для потенциальной энергии системы как функция обобщенных координат:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s);$$

Тогда обобщенные силы находятся как взятые с обратным знаком частные производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Этот метод более удобен в тех случаях, когда все силы системы являются потенциальными.

Второе слагаемое зависит от движения системы. Оно представляет собой меру механического движения системы. Лагранж выразил эту меру через кинетическую энергию.

$$\sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

Здесь  $\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \right)$  – производная Лагранжа, иначе лестничная или

*вариационная производная.*

В итоге получаем уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, s).$$

Рассмотрим вывод уравнений Лагранжа II рода. Для этого сначала докажем два тождества Лагранжа.

Радиус-вектор  $\bar{r}_k$  – ой точки голономной механической системы с идеальными стационарными связями можно записать как

$$\bar{r}_k = \bar{r}(\{q_j\}_s).$$

Поэтому можно записать, что скорость точки

$$\dot{\bar{r}}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (*)$$

линейно зависит от  $\dot{q}_j$ .

Частная производная  $\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}$  равна коэффициенту при  $\dot{q}_j$ , т.е.

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \rightarrow \text{первое тождество Лагранжа.}$$

Это тождество утверждает, что «точки» можно поставить одновременно и в числителе и в знаменателе или их «сократить».

Дифференцируя (\*) по  $q_j$  получим

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j.$$

С другой стороны

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j.$$

Получаем второе тождество Лагранжа

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right),$$

т.е можно менять порядок дифференцирования по времени и обобщенной координате.

Теперь приступим к выводу уравнения Лагранжа II рода.

Нужно доказать, что

$$\sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

Преобразуем выражение

$$\sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^n m_k \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n m_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) - \dot{\bar{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \right].$$

Применим тождества Лагранжа, теперь

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt} \left( \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \text{ и } \dot{\bar{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \dot{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} &= - \sum_{k=1}^n m_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j} \right] = \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left( m_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_{k=1}^n \left( m_k \dot{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j} \right) = \\ &= - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{m_k v_k^2}{2} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{m_k v_k^2}{2} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right). \end{aligned}$$

## 5.8. Уравнения Лагранжа II рода для консервативных систем

В этом случае обобщённые силы могут быть выражены через потенциальную энергию системы:

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Уравнения Лагранжа II рода запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1, s).$$

Введем кинетический потенциал или функцию Лагранжа:  $L = T - \Pi$ .

Получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, s).$$

### Пример 5.8.1

Три груза с весами  $P_1 = m_1g$ ,  $P_2 = m_2g$  и  $P_3 = m_3g$  с помощью двух невесомых блоков без трения и двух нитей объединены в механическую систему (рис. 5.8.1). Грузы могут двигаться только в вертикальном направлении. Найти обобщенные силы системы.

У данной системы две степени свободы и в качестве двух обобщенных координат выберем координаты  $q_1$  (вертикальное перемещение груза 1) и  $q_2$  (вертикальное перемещение груза 3).

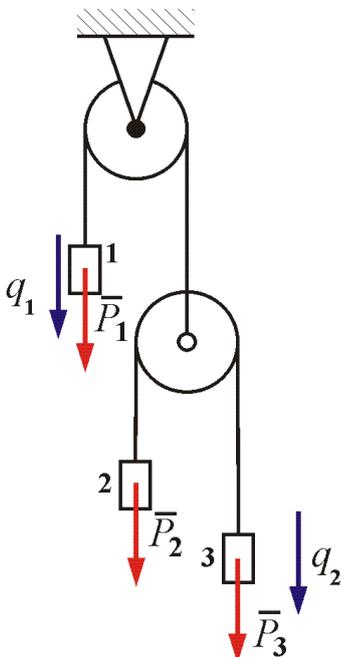


Рис. 5.8.1

Определим обобщенные силы через потенциальную энергию. Потенциальная энергия системы будет следующим образом зависеть от обобщенных координат:

$$\Pi = -m_1gq_1 - m_3gq_2 + m_2g(q_2 + 2q_1).$$

Здесь с ростом координат  $q_1$  и  $q_2$  потенциальная энергия грузов 1 и 3 уменьшается, а груза 2 – увеличивается (с ростом  $q_1$  и  $q_2$  груз 2 поднимается на величину  $q_2 + 2q_1$ ). Взяв частные производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам найдем:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = (m_1 - 2m_2)g;$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = (m_3 - m_2)g.$$

Выражение для кинетической энергии данной системы имеет вид:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{q}_2^2}{2} = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1)^2}{2} + \frac{m_3 \dot{q}_2^2}{2}.$$

Получаем систему двух уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{q}_1 + m_2 2(\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1); \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = m_1 \ddot{q}_1 + m_2 2(\ddot{q}_2 + 2\ddot{q}_1); \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2(\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1) + m_3 \dot{q}_2; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = m_2(\ddot{q}_2 + 2\ddot{q}_1) + m_3 \ddot{q}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0;$$

$$(m_1 + 4m_2)\ddot{q}_1 + 2m_2\ddot{q}_2 = (m_1 - 2m_2)g; \quad 2m_2\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 = (m_3 - m_2)g .$$



**Жозеф Луи Лагранж;** фр. Joseph Louis Lagrange (25 января 1736, Турин — 10 апреля 1813, Париж) — французский математик и механик. Автор классического трактата «Аналитическая механика», расширившего основы статики и механики и установившего «общую формулу», также известную как принцип возможных перемещений. Формула конечных приращений и несколько других теорем названы его именем.

Пьер-Симон Лаплас дал такую характеристику деятельности Лагранжа: «...среди тех, кто самым эффективным образом раздвинул пределы наших знаний, Ньютон и Лагранж в самой высокой степени владели счастливым искусством открывания новых данных, представляющих собой существо знаний...»

# 6. Малые колебания механических систем

*Колебательным движением* механической системы в общем случае считают всякое ее движение, при котором все обобщенные координаты или часть из них изменяются не монотонно, а имеют колебательный характер, т.е. принимают нулевые значения по крайней мере несколько раз.

Колебания считаются малыми, если при движении системы обобщенные координата, скорость и ускорение достаточно малы и в уравнении движения можно пренебречь всеми слагаемыми второго и более высокого порядков относительно  $q$ ,  $\dot{q}$  и  $\ddot{q}$ . В случае малых колебаний системы получается линейное дифференциальное уравнение для обобщенной координаты  $q$ .

## 6.1. Устойчивость положения равновесия

Рассмотрим стержень с шариком, могущий вращаться вокруг горизонтальной оси, также в поле сил тяжести (рис. 6.1.1).

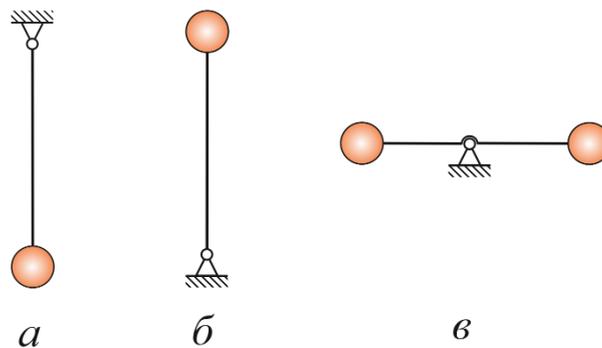


Рис. 6.1.1

Очевидно, что стержень в положениях а), б), в) находится в равновесии. В то же время качественные свойства положений равновесия различны. Отклонение стержня от положения б) приводит к их дальнейшему удалению от положения равновесия. После отклонения стержня от положения а) они возвращаются в положение равновесия и двигаются периодически около этого положения равновесия. Стержень в положении в) после отклонения остаются в новом по-

ложении. В случае б), положение равновесия называют неустойчивым. В случае а) для стержня, положение равновесия называют устойчивым.

Если стержень, получив любое малое начальное отклонение от положения равновесия, остается в равновесии в новом отклоненном положении, то такое положение равновесия называется *безразличным*.

Строгое определение понятия устойчивости положения равновесия было дано в конце прошлого века в работах русского ученого А.М.Ляпунова.

Условимся обобщенные координаты  $\{q_j\}_s$  отсчитывать от положения равновесия системы. Начальное возмущение системы состоит в общем случае из начальных значений обобщенных координат  $\{q_{j0}\}_s$ , и начальных обобщенных скоростей  $\{\dot{q}_{j0}\}_s$ .

По Ляпунову, равновесие системы называется устойчивым, если для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать два других таких малых числа  $\eta_1 > 0$  и  $\eta_2 > 0$ , что при удовлетворении начальными значениями обобщенных координат и скоростей неравенств  $|q_{j0}| < \eta_1$   $|\dot{q}_{j0}| < \eta_2$  в любой момент времени все обобщенные координаты подчиняются условиям  $|q_j(t)| < \varepsilon$ .



**Ляпунов Александр Михайлович**, род. 25.5(6.6).1857, Ярославль - ум. 3.11.1918, Одесса.

Русский математик и механик, академик Петербургской АН (с 06.10.1901; чл.-корр. с 02.12.1900). Ученик П.Л.Чебышёва. В 1880 окончил Петербургский университет. С 1885 доцент, с 1892 профессор Харьковского университета; с 1902 работал в Петербурге. Ляпунов создал современную строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров. Основным трудом в этой области является докторская диссертация Ляпунова "Общая задача об устойчивости движения" (1892).

### **Теорема Лагранжа – Дирихле**

Теорема Лагранжа-Дирихле определяет *достаточные* условия устойчивости положения равновесия консервативной системы.

**Теорема:** Для устойчивости положения равновесия системы, подчиненной голономным, идеальным, стационарным и неосвобождающим связям и находящейся в стационарном потенциальном силовом поле, достаточно, чтобы

потенциальная энергия в положении равновесия имела изолированный относительный минимум.

Принимаем эту теорему без доказательства.

В положении равновесия механической системы каждая обобщенная сила  $Q_j$  равна нулю. Для случая потенциального силового поля обобщенные силы через потенциальную энергию вычисляются по формулам

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, s.$$

Следовательно, в положении любого равновесия  $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$ , поэтому по-

тенциальная энергия при этом может достигать своего экстремального значения.

Согласно теореме Лагранжа-Дирихле если этот экстремум представляет локальный минимум, положение равновесия устойчиво.

Для систем с одной степенью свободы условие локального минимума потенциальной энергии  $\Pi(q)$  (рис. 6.1.2) —  $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 \geq 0$ .

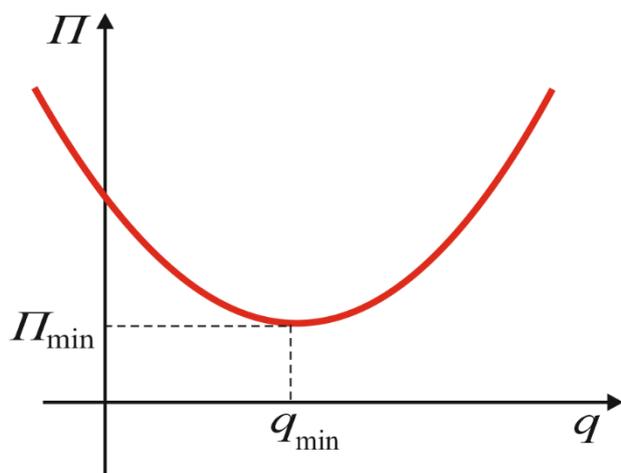


Рис. 6.1.2



Дирихле Петер Густав Лежен (1805 - 1859) – известный немецкий математик

Знак равенства относится к случаю, когда о наличии минимума потенциальной энергии приходится судить по производным высших порядков.

Таким образом:

$$\left( \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j^2} \geq 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{l} \text{Равновесие консервативной} \\ \text{голономной системы} \\ \text{с идеальными связями} \\ \text{устойчиво} \end{array} \right)$$

### Пример 6.1.1

Определить, при каких условиях маятник длиной  $l$  будет находиться в устойчивом равновесии (рис. 6.1.3). Масса маятника  $m$ , жесткость пружины  $c$ .

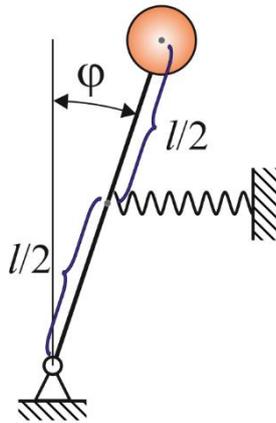


Рис. 6.1.3

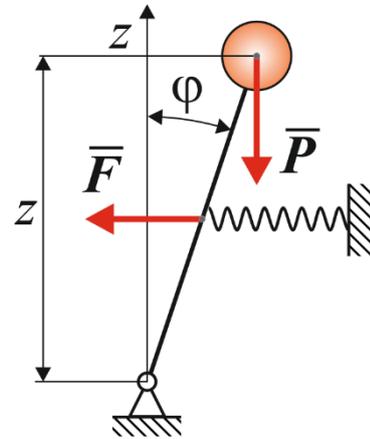


Рис. 6.1.4

1. Рассмотрим движение маятника вблизи положения, определяемого углом  $\varphi = 0$ .  $s = 1$ ;  $q = \varphi$ .

2. Заданные силы (рис. 6.1.4):

$$\bar{P}; P = mg. \bar{F}; F = c \frac{l}{2} \varphi.$$

Эти силы потенциальны.

Потенциальная энергия:

$$\Pi = \Pi_{\text{пр}} + \Pi_{\text{м}}.$$

$$\Pi_{\text{пр}} = \frac{c \cdot \Delta l^2}{2} = \frac{c \cdot (0,5l\varphi)^2}{2} = \frac{c \cdot (l\varphi)^2}{8}.$$

$$\Pi_m = mgz = mgl \cos \varphi = mgl \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right),$$

Поскольку при малых углах  $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \approx \sqrt{1 - \varphi^2} \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ .

Имеем

$$\Pi = \frac{l^2}{8} c \varphi^2 + mgl - \frac{mgl}{2} \varphi^2 = \varphi^2 \left( \frac{l^2}{8} c - \frac{mgl}{2} \right) + mgl = \frac{\varphi^2}{2} \left( \frac{cl^2}{4} - mgl \right) + mgl.$$

Чтобы маятник был устойчивым, достаточно чтобы в положении равновесия

$$1) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \left( \frac{cl^2}{4} - mgl \right) = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

$$2) \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} > 0 \Rightarrow \frac{cl^2}{4} - mgl > 0 \Rightarrow c > \frac{4mg}{l}.$$

**Примечание.** При  $\varphi = 0$

$$\left( \frac{cl^2}{4} - mgl \right) = 0 \Rightarrow c = \frac{4mg}{l}.$$

Вторая производная потенциальной энергии системы по координате в положении равновесия равна нулю. Поэтому не видно, минимум или максимум у потенциальной энергии при  $\varphi = 0$ .

Если воспользоваться полным выражением для потенциальной энергии груза, то вторая производная потенциальной энергии системы по координате будет другой:

$$\Pi_m = mgz = mgl \cos \varphi,$$

$$\Pi = \frac{l^2}{8} c \varphi^2 + mgl \cdot \cos \varphi, \quad \frac{d^2 \Pi}{d\varphi^2} = \frac{cl^2}{4} - mgl \cdot \cos \varphi.$$

Третья производная равна нулю при  $\varphi = 0$ .

$$\frac{d^3 \Pi}{d\varphi^3} = mgl \sin \varphi = 0.$$

Четвертая производная при  $\varphi = 0$  больше нуля.

$$\frac{d^4 \Pi}{d\varphi^4} = mgl \cos \varphi = mgl.$$

Это доказывает, что и при  $\varphi = 0$  потенциальная энергия системы имеет локальный минимум.

$$c = \frac{4mg}{l}.$$

Следовательно, вертикальное положение равновесия стержня устойчиво при

$$c \geq \frac{4mg}{l}.$$

В ходе решения видно, что правильный анализ положений равновесия консервативной системы и их устойчивости возможен путем определения экстремумов функциональной зависимости потенциальной энергии системы от координаты без ее упрощения.

Во многих системах даже с одной степенью свободы может быть не одно, а несколько положений равновесия. Такие положения могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, что приводит к необходимости анализа *всех возможных положений равновесия и их устойчивости*.

Ведь длительное время система может находиться около одного положения только тогда, если оно – устойчивое положение равновесия.

## 6.2. Колебания системы с одной степенью свободы

Механическая система с одной степенью свободы имеет одну обобщенную координату  $q$ , и ее движение описывается одним уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

Обобщенную силу  $Q$  можно считать состоящей из трех частей:

$$Q = Q^{\Pi} + Q^R + Q^B.$$

Здесь  $Q^{\Pi}$  обобщенная сила потенциальных сил.  $Q^{\Pi} = \partial \Pi / \partial q$ .

В  $Q^R$  включим ту часть обобщенной силы, которая получается от действия сил сопротивления.

Часть обобщенной силы  $Q^B$  получается от так называемых вынуждающих, или возмущающих сил, зависящих прежде всего от времени.

### ***Собственные линейные колебания системы***

Рассмотрим малые колебания системы с одной степенью свободы под действием одних потенциальных сил. т. е. когда  $Q = Q^P = \partial\Pi/\partial q$ .

Такие колебания называются *собственными* или *свободными*. Колебания, для которых дифференциальное уравнение является линейным, называются *линейными*. Малые колебания принадлежат к числу линейных.

***Дифференциальное уравнение собственных линейных колебаний системы.*** Для вывода уравнения Лагранжа малых собственных колебаний следует кинетическую и потенциальную энергии разложить в ряды в окрестности положения равновесия системы, где  $q = 0$ .

Пусть система, на которую наложены голономные, идеальные, неосвобождающие и стационарные связи, состоит из  $n$  точек и движется вблизи положения равновесия. Её кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{r}_k^2.$$

При сделанных допущениях о стационарности связей радиус-вектор каждой точки системы зависит от времени только через обобщенную координату, следовательно,

$$\dot{r}_k = \frac{\partial r_k}{\partial q} \dot{q}.$$

Подставляя это в выражение кинетической энергии, получаем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} A \dot{q}^2,$$

где

$$A = \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2.$$

Величина  $A$ , как и  $\bar{r}_k$ , может зависеть только от  $q$  и не может зависеть от  $\dot{q}$ . Разлагая  $A$  в окрестности  $q = 0$  в степенной ряд, имеем

$$A(q) = A_0 + \left( \frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 q + \left( \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots$$

Здесь и дальше индекс 0 означает, что соответствующие величины следует вычислять при  $q = 0$ .

Для получения в разложении кинетической энергии слагаемых не выше второго порядка по отношению к  $q$  и  $\dot{q}$  достаточно из разложения  $A(q)$  взять только постоянное значение  $A_0$ , которое обозначим  $a$ . При учете других слагаемых из разложения  $A(q)$  появляются члены третьего и более высокого порядков.

Итак, выражение кинематической энергии  $T$  можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2.$$

Положительная постоянная  $a$  называется *коэффициентом инерции*. Обычно по размерности коэффициент инерции является или массой, или моментом инерции.

Потенциальная энергия системы  $\Pi$  для стационарного силового поля и стационарных связей является функцией только обобщенной координаты  $q$ . Разлагая ее в степенной ряд в окрестности  $q = 0$ , получаем

$$\Pi(q) = \Pi_0 + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0 q + \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2!} + \left( \frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3} \right)_0 \frac{q^3}{3!} + \dots$$

Потенциальную энергию  $\Pi_0$  в положении равновесия при  $q = 0$  примем равной нулю. Величина  $(\partial \Pi / \partial q)_0$  есть значение обобщенной силы  $Q$  в положении равновесия системы, равное нулю.

Будем считать, что в положении равновесия потенциальная энергия имеет минимум. Это является достаточным условием устойчивости положения равновесия системы. В этом случае величина  $(\partial^2 \Pi / \partial q^2)_0$  положительна.

Обозначим ее  $c$ . Постоянную  $c$  называют *коэффициентом жесткости* или просто *жесткостью*.

Таким образом, отбрасывая слагаемые третьего и более высокого порядков, имеем

$$\Pi(0) = \frac{1}{2} c q^2.$$

Подставляя эти значения производных в уравнение Лагранжа, получим следующее дифференциальное уравнение малых собственных колебаний системы с одной степенью свободы:

$$a\ddot{q} + cq = 0.$$

### ***Интегрирование дифференциального уравнения собственных колебаний.***

Если разделить обе части уравнения на  $a$  и обозначить положительную величину  $c/a = k^2$  то получим дифференциальное уравнение собственных линейных колебаний системы с одной степенью свободы в окончательной форме:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (6.2.1)$$

Постоянная величина  $k$  называется *круговой* (или *циклической*) *частотой колебаний*.

Размерность круговой частоты  $[k] = \text{с}^{-1}$ .

Круговая частота выражается в тех же единицах, что и угловая скорость.

Дифференциальное уравнение (6.2.1) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение можно искать в виде  $q = e^{\lambda t}$ . После подстановки этого выражения в (6.2.1) получаем характеристическое уравнение.

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два чисто мнимых корня:

$$\lambda_{1,2} = \pm ki.$$

На основе теории дифференциальных уравнений решение уравнения (6.2.1) можно представить в виде

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (6.2.2)$$

и для обобщенной скорости

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из начальных условий:

$$t = 0, \quad q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0.$$

Используя эти выражения, получаем  $C_1 = q_0$ ,  $C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}$ .

Подставляя их значения в (2), имеем

$$q = q_0 \sin kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \cos kt.$$

Представим выражение для  $q$  в другой, так называемой *амплитудной*, форме (рис. 6.2.1):

$$q = A \sin(kt + \alpha). \quad (6.2.3)$$

Из сравнения этого выражения с (6.2.2) для новых постоянных получим формулы

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{q_0 k}{\dot{q}_0}.$$

Величину  $A$  считают положительной и называют *амплитудой колебаний*. Она определяет наибольшее отклонение обобщенной координаты от положения равновесия, соответствующего значению  $q_0 = 0$ . Обобщенная координата изменяется в пределах  $-A \leq q \leq A$ .

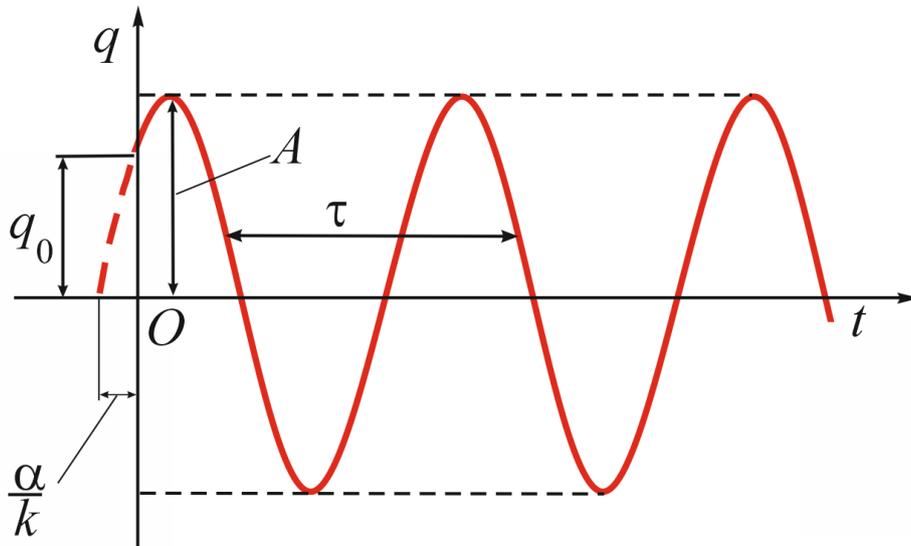


Рис. 6.2.1

Безразмерная постоянная  $\alpha$  называется *начальной фазой колебаний*. Она является значением *фазы колебаний*  $(kt + \alpha)$  при  $t = 0$ .

Движение системы, определяемое (6.2.2) или эквивалентной ему амплитудной формой (6.2.3), называется *гармоническим*. Гармоническими называют-

ся такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса.

Гармонические колебания полностью определяются амплитудой колебаний, периодом и начальной фазой. Значение *периода колебаний*  $\tau$  получим из условия

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Величина, обратная периоду  $\nu = 1/\tau$ , называется *частотой колебаний*. Частота колебаний обычно определяется числом колебаний в секунду или в герцах

Круговая частота  $k$  выражается через период колебаний и частоту в форме

$$k = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu.$$

Собственные колебательные движения, кроме графика колебаний, можно изобразить на фазовой плоскости – плоскости переменных  $(q, \dot{q})$  которые называются *фазовыми переменными*. Построим фазовый портрет гармонических колебаний точки (рис. 6.2.2). Имеем

$$q = A\sin(kt + \alpha), \quad \dot{q} = Ak \cos(kt + \alpha).$$

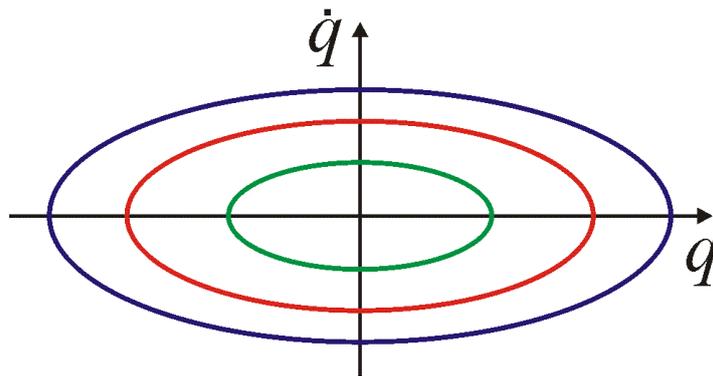


Рис. 6.2.2

Исключая из этих уравнений время, получаем на фазовой плоскости семейство эллипсов:

$$\frac{\dot{q}}{A^2 k^2} + \frac{q^2}{A^2} = 1.$$

Эти кривые, зависящие от параметра  $A$ , называют *фазовыми траекториями*.

Семейство фазовых траекторий зависит от амплитуды колебаний, которая, в свою очередь, определяется начальными условиями. Каждой фазовой траектории соответствует пара начальных значений  $q_0, \dot{q}_0$ .

Положению равновесия точки на фазовой плоскости соответствует начало координат. Каждому моменту времени на фазовой плоскости соответствует определенное положение изображающей точки. Каждой фазовой траектории соответствует определенное значение полной механической энергии.

$$E = T + \Pi = \frac{a\dot{q}^2}{2} + \frac{cq^2}{2} = \frac{1}{2}(a\dot{q}^2 + cq^2) = \text{const.}$$

### 6.3. Линейное сопротивление и диссипативная функция

Если на точки системы с одной степенью свободы кроме потенциальных сил действуют еще силы сопротивления, то дифференциальное уравнение Лагранжа выразится в форме

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^\Pi + Q^R,$$

где  $Q^\Pi = \partial \Pi / \partial q$  обобщенная сила потенциальных сил;  $Q^R$  обобщенная сила сил сопротивления.

Рассмотрим случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления  $\{\bar{F}_k^R\}_n$  точек системы линейно зависят от скоростей этих точек, т. е.

$$\bar{F}_k^R = -\mu_k \dot{r}_k,$$

где  $\mu_k$  – постоянный коэффициент сопротивления.

Вычислим обобщенную силу сопротивления. Согласно определению обобщенной силы, имеем

$$Q^R = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^R \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = - \sum_{k=1}^n \mu_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}.$$

Для дальнейшего преобразования используем первое тождество Лагранжа  $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}}$ , получим

$$Q^R = - \sum_{k=1}^n \mu_k \left( \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}} \right) = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2}.$$

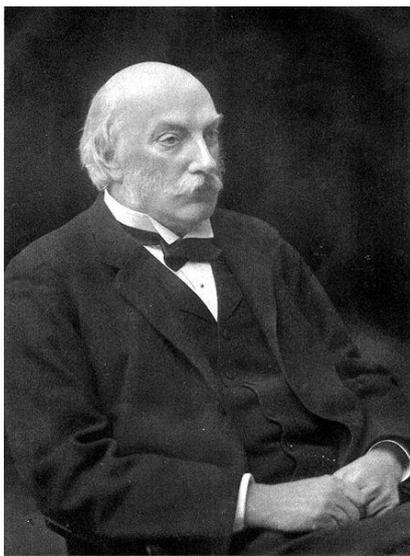
Введем обозначение:

$$R = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2}.$$

Функцию  $R$  называют *диссипативной функцией* или функцией Релея. Эта функция по своей структуре аналогична кинетической энергии системы, только в нее вместо массы точек входят коэффициенты сопротивления.

Учитывая, что  $\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \dot{q}$ , получаем

$$R = \frac{1}{2} \dot{q}^2 \sum_{k=1}^n \mu_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 = \frac{1}{2} B \dot{q}^2, \quad B = \sum_{k=1}^n \mu_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2.$$



**Джон Уильям Стретт, третий барон Рэлей, Лорд Рэлей (Рэйли) (John Strutt, 3rd Baron Rayleigh) (1842 – 1919)** – британский физик, открывший (с Уильямом Рамзаем) газ аргон и получивший за это Нобелевскую премию по физике в 1904 году.

Стретт в 1861 году поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета для изучения математики. В 1865 году он получил степень бакалавра и в 1868 – магистра. После этого он был принят на работу сотрудником факультета

Титул лорда Рэлей Стретт получил в 1873 году, после смерти его отца, Джона Стретта, второго барона Рэлей. В этом же году стал членом Лондонского королевского общества.

После смерти Джеймса Максвелла в 1879 году стал вторым Кавендишским профессором этого университета и директором Кавендишской лаборатории.

Функция  $B$  зависит только от  $q$  и не зависит от  $\dot{q}$ .

Для выяснения физического смысла диссипативной функции получим энергетическое соотношение, которому она удовлетворяет. Для этого умножим на  $\dot{q}$  уравнение Лагранжа:

$$\dot{q} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} \right) = Q\dot{q}.$$

Но

$$Q\dot{q} = \sum W^e + \sum W^i = \frac{dT}{dt}.$$

В свою очередь

$$\dot{q}Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} \dot{q}.$$

Имеем  $R = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2$  следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = B(q) \dot{q}; \quad \dot{q} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = B(q) \dot{q}^2 = 2R.$$

Потенциальная энергия для случая стационарного потенциального поля зависит от времени только через координату  $q$ .

Следовательно,

$$\dot{q} \frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{d\Pi}{dt}.$$

Получим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt} - 2R,$$

или

$$\frac{dE}{dt} = -2R.$$

Окончательно имеем энергетическое соотношение.

Это соотношение показывает, что диссипативная функция  $R$  характеризует скорость убывания полной механической энергии системы вследствие действия сил линейного сопротивления.

Разложим диссипативную функцию в ряд в окрестности положения равновесия системы. Имеем

$$B(q) = B(0) + \left( \frac{\partial B}{\partial q} \right)_0 q + \left( \frac{\partial^2 B}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots$$

Подставляя это разложение в  $R = \frac{1}{2} B \dot{q}^2$  и оставляя в нем только

$$B(0) = \mu \text{ получаем } R = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2.$$

Положительная постоянная величина  $\mu$  называется *обобщенным коэффициентом сопротивления*.

## 6.4. Влияние линейного сопротивления на малые собственные колебания системы с одной степенью свободы

Вблизи положения равновесия системы имеем следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий и диссипативной функции:

$$T = \frac{a\dot{q}^2}{2}; \quad \Pi = \frac{cq^2}{2}; \quad R = \frac{\mu\dot{q}^2}{2}.$$

Подставляя их в уравнение Лагранжа, получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a\ddot{q}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = \mu\dot{q}.$$

В итоге имеем  $a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = 0$

Это приближенное уравнение. При его получении отброшены все слагаемые второго и более высокого порядков.

Если разделить обе части уравнения на  $a$  и ввести обозначения  $k^2 = c/a$ ,  $2n = \mu/a$  то получим дифференциальное уравнение движения системы в окончательной форме:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0. \quad (6.4.1)$$

Постоянная  $k$  является круговой частотой собственных колебаний системы без учета сопротивления. Величина  $n$  называется *коэффициентом затухания*.

Дифференциальное уравнение (6.4.1) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение следует искать в форме  $q = e^{\lambda t}$ , где постоянная  $\lambda$  определяется из характеристического уравнения  $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ , которое получается после подстановки решения в дифференциальное уравнение.

Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (6.4.2)$$

Могут представиться три случая:

1) **Затухающие колебания.** Если  $n < k$  то величина под знаком квадратного корня (5) отрицательна. Обозначим  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ . Тогда из (6.4.2) получим следующие значения для корней характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm k_1 i.$$

Соответственно общее решение дифференциального уравнения (6.4.1) зависящее от двух произвольных постоянных, выразится в виде

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad (6.4.3)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  произвольные постоянные.

Решение (6) можно также представить в другой, амплитудной, форме:

$$q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

где  $A$  и  $\alpha$  тоже произвольные постоянные. Раскрывая синус суммы, получим

$$C_1 = A \sin \alpha; \quad C_2 = A \cos \alpha; \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = C_1 / C_2.$$

Постоянные определяются из начальных условий.

Величина  $A$  положительна. Она не является амплитудой. Начальная фаза  $\alpha$  может иметь значения в пределах от 0 до  $2\pi$ .

Для выяснения изменения функции построим ее график (рис. 6.4.1).

Из графика функции следует, что величины последовательных наибольших отклонений  $q$  от положения равновесия уменьшаются с увеличением вре-

мени, стремясь к нулю при неограниченном возрастании времени. В соответствии с ним движение, определяемое (6), называют *затухающими колебаниями*.

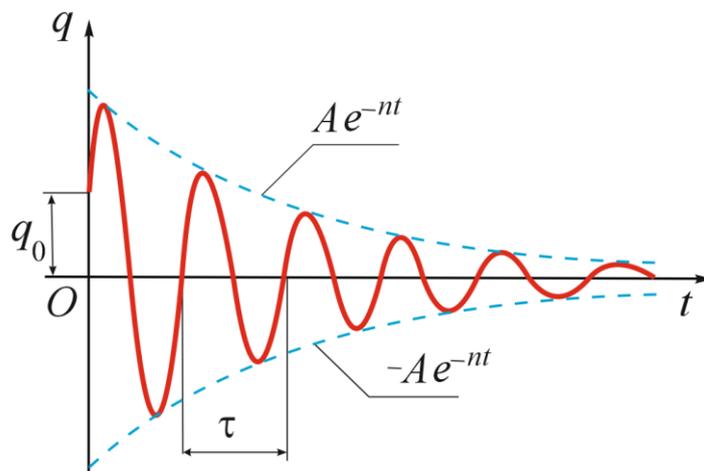


Рис. 6.4.1

Условным периодом затухающих колебаний (или *периодом*) называют период прохождения системы через положения равновесия.

$$\text{Следовательно, } \tau_1 = \frac{2\pi}{k_1}.$$

Период затухающих колебаний величина постоянная, не зависящая от начальных условий. Он больше периода собственных колебаний при отсутствии сопротивления  $\tau = \frac{2\pi}{k}$ .

В действительности функция  $q(t)$  не является периодической.

Переменную величину  $Ae^{-nt}$  называют *условной амплитудой* затухающих колебаний. Она не является максимальным значением функции.

*Декрементом колебаний*  $\Delta$  называют отношение двух последовательных (взятых через условный период  $\tau_1$ ) максимальных значений обобщенной координаты.

Пусть для  $t_i \Rightarrow q_{\max i} = Ae^{-nt_i}$ . Через промежуток времени, равный периоду затухающих колебаний  $\tau_1$ , в момент  $t_i + \tau_1$ ,

$$q_{\max(i+1)} = Ae^{-n(t_i + \tau_1)} = Ae^{-nt_i} e^{-n\tau_1}$$

$$\Delta = \frac{q_{\max i}}{q_{\max(i+1)}} = e^{n\tau_1}.$$

Логарифмическим декрементом колебаний  $\delta$  называют натуральный логарифм от декремента колебаний:

$$\delta = \ln \Delta = n\tau_1.$$

Таким образом, из проведенного исследования можно заключить, что малое линейное сопротивление незначительно увеличивает период колебаний по сравнению со случаем отсутствия сопротивления, но сильно уменьшает последовательные точения условных амплитуд, которые уменьшаются с течением времени по экспоненциальному закону.

2) **Затухающие движения.** Рассмотрим случай, когда  $n > k$  (случай большого сопротивления). Корни характеристического уравнения в этом случае имеют значения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm k_2.$$

где введено новое обозначение для положительной величины  $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$ .

Оба корня характеристического уравнения действительны и отрицательны, так как  $k_2 < n$ . Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (6.4.1) имеет вид

$$q = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные, которые можно определить по начальным условиям.

Могут представиться три случая в зависимости от знака и значения  $q_0$ . Во всех случаях движение является затухающим, неколебательным, которое иногда называют также *апериодическим*.

При  $n = k$  (случай критического сопротивления) характеристическое уравнение имеет кратный отрицательный корень  $\lambda_1 = \lambda_2 = -n$ .

Соответственно этому решение дифференциального уравнения (6.4.1) имеет вид

$$q = e^{-nt} (C_1 t + C_2).$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются по начальным условиям. В этом случае при  $t$ , стремящемся к бесконечности,  $q(t)$  стремится к нулю при любых конечных значениях постоянных.

Таким образом, случай критического сопротивления тоже дает затухающее движение (рис. 6.4.2).

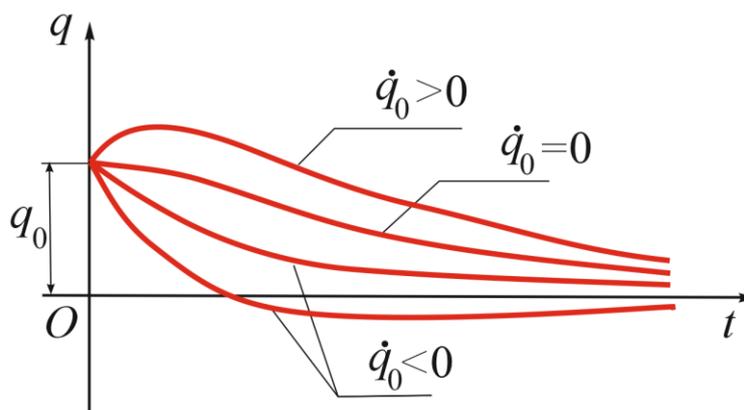


Рис. 6.4.2

Анализ влияния линейного сопротивления на собственные малые колебания показывает, что линейное сопротивление не может сделать устойчивое положение равновесия неустойчивым. Если в окрестности устойчивого положения равновесия система совершает незатухающие малые колебания, то линейное сопротивление превратит их в затухающие или сделает даже затухающими движениями.

## 6.5. Вынужденные колебания линейной системы с одной степенью свободы

В случае, когда обобщенная сила  $Q^B(t)$ , характеризующая внешнее воздействие на колебательную систему, изменяется во времени по закону синуса или косинуса:

$$Q^B(t) = Q_0 \sin(pt + \beta),$$

где  $Q_0$ ,  $p$ ,  $\beta$  – соответственно амплитуда, частота и начальная фаза обобщенной силы, имеет место гармоническое возбуждение колебаний.

## Способы возбуждения вынужденных колебаний.

### Определение обобщенной силы $Q(t)$

Способы возбуждения колебаний можно условно разделить на группы. На рисунке приведены три наиболее характерных способа возбуждения вынужденных колебаний простейшей колебательной системы. Система представляет собой тело массой  $m$ , имеющее возможность двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. С телом скреплена пружина, жесткость которой  $c$ . Обобщенная координата  $x$  сосчитывается от положения равновесия системы (при отсутствии внешнего воздействия), когда пружина не напряжена.

**1. Силовое возбуждение** (рис. 6.5.1). Система находится под воздействием силы  $F(t) = F_0 \sin(pt + \beta)$ , приложенной извне и не зависящей от параметров системы.

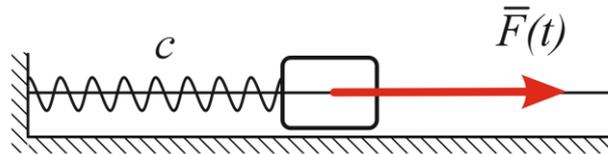


Рис. 6.5.1

В этом случае для получения  $Q(t)$  необходимо задать вариацию обобщенной координаты  $\delta x$  и, вычислив возможную работу только от действия силы  $F(t)$ , разделить ее на  $\delta x$  :

$$Q(t) = \frac{F(t)\delta x}{\delta x} = F_0 \sin(pt + \beta).$$

**2. Кинематическое возбуждение** (рис. 6.5.2). Вынужденные колебания возникают в результате задаваемого извне перемещения точки крепления пружины  $s(t) = s_0 \sin(pt + \beta)$ , не зависящего от параметров системы.

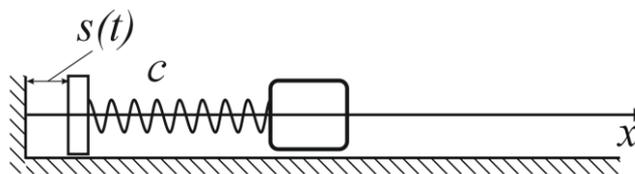


Рис. 6.5.2

Изменение условной потенциальной энергии пружины при одновременном перемещении ее концов равно

$$\Pi' = \frac{1}{2} c \lambda^2 = \frac{1}{2} c (x - s(t))^2.$$

Тогда 
$$Q^{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} = -cx + cs(t) = Q^{\Pi} + Q(t).$$

где 
$$Q^{\Pi} = -cx; Q(t) = cs_0 \sin(pt + \beta).$$

**3. Инерционное возбуждение.** Возможны два случая.

**А. Вынужденные относительные колебания** (рис. 6.5.3). Механическая система находится на подвижном основании, перемещение которого, задается извне, необходимо исследовать относительные колебания.

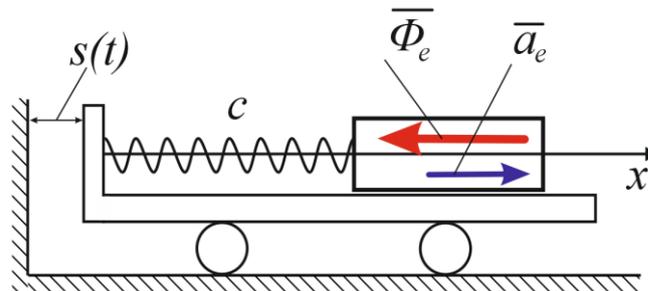


Рис. 6.5.3

Система координат, связанная с подвижным основанием, движется поступательно, прямолинейно, но неравномерно. Поэтому при составлении дифференциального уравнения вынужденных относительных колебаний необходимо учитывать переносную силу инерции  $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ , направление которой противоположно направлению переносного ускорения. Переносное ускорение  $a_e = \ddot{s}(t)$  при этом считается сонаправленным с  $s(t)$ .

Обобщенная сила  $Q(t)$  будет определяться  $\bar{\Phi}_e$ , т. е.

$$Q(t) = \frac{-m\ddot{s}(t)\delta x}{\delta x} = -m\ddot{s}(t) = mpsin(pt + \beta).$$

**Б. Вынужденные колебания, вызываемые вращающимся эксцентриком.** Тело скреплено с эксцентриком, имеющим массу  $m_1 \ll m$ , эксцентриситет  $l_1$  и вращающимся с постоянной угловой скоростью. Обозначив через  $\varphi = pt + \beta$  угол отклонения эксцентрика от вертикали, выразим  $Q(t)$  через проекцию на горизонталь центробежной силы  $m_1 p^2 l_1$ :

$$Q(t) = \frac{m_1 p^2 l_1 \sin(pt + \beta) \delta x}{\delta x} = m_1 p^2 l_1 \sin(pt + \beta).$$

Отметим, что при инерционном возбуждении колебаний, в отличие от силового и кинематического возбуждений, амплитуда обобщенной силы пропорциональна  $p^2$ .

Приведенные примеры, естественно, не охватывают все способы возбуждения вынужденных колебаний, например, возбуждение колебаний вследствие перемещения точки прикрепления демпфера. Возможно и комбинированное возбуждение колебаний.

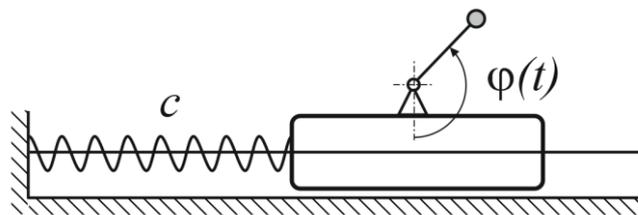


Рис. 6.5.4

### **Вынужденные колебания при отсутствии вязкого сопротивления**

При гармоническом возбуждении дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + cq = H \sin(pt + \beta),$$

или

$$\ddot{q} + k^2 q = h \sin(pt + \beta), \tag{5.1}$$

где  $k^2 = \frac{c}{a}, h = \frac{H}{a}$ .

Известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения можно представить в виде суммы общего решения  $q_1$  однородного уравнения

$$\ddot{q} + k^2 q = 0 \text{ и частного решения } q^* \text{ неоднородного уравнения: } q = q_1 + q^*.$$

Общее решение однородного уравнения

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Частное решение неоднородного уравнения определяется в зависимости от соотношения частот свободных колебаний и возмущающей силы. Возможны два случая: отсутствие резонанса  $p \neq k$  и резонанс  $p = k$ .

1. **Отсутствие резонанса.** В этом случае частное решение следует искать в виде

$$q^* = B \sin(pt + \beta),$$

где  $B$  – искомая постоянная величина.

Подстановка  $q^*$  в (5.1) приводит к соотношению

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Общее решение уравнения (1) будет иметь вид

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \beta),$$

или

$$q = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \beta).$$

Произвольные постоянные  $C_1, C_2$  определим из начальных условий.

Как следует из уравнений, движение состоит из двух гармонических колебаний с частотами  $k$  и  $p$  соответственно.

Первые (с частотой  $k$ ) можно по аналогии со случаем отсутствия возмущающей силы условно назвать свободными колебаниями, а вторые (с частотой  $p$ ) – вынужденными колебаниями системы.

Условность названия «свободные колебания» связана с тем, что определяющие их произвольные постоянные зависят не только от начальных условий ( $q_0, \dot{q}_0$ ) но и от параметров возмущающей силы ( $h, p, \beta$ ), и, следовательно, первые колебания в решении фактически также являются вынужденными колебаниями. Однако данное название получило широкое распространение лишь потому, что вторые колебания имеют частоту  $p$  возмущающей силы, в то время как первые – частоту  $k$  свободных колебаний (собственную частоту).

Если  $p < k$ , то установившиеся вынужденные колебания будут совпадать по фазе с возмущающей силой, если же  $p > k$ , то вынужденные колебания

будут находиться в противофазе (сдвинуты по фазе на  $\pi$ ) по отношению к возмущающей силе.

Амплитуду  $B$  вынужденных колебаний можно представить в виде:

$$B = \frac{h}{k^2} \cdot \frac{1}{\left|1 - p^2 / k^2\right|}.$$

Здесь  $\frac{h}{k^2} = \frac{H}{a \cdot \frac{c}{a}} = \frac{H}{c}$  – статическое смещение системы под действием

силы  $H$ , равной амплитуде возмущающей силы. Обозначим  $B_0 = h / k^2$ .

Теперь

$$B = \frac{B_0}{\left|1 - p^2 / k^2\right|}.$$

Величину

$$\lambda = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}$$

называют коэффициентом динамичности. Коэффициент динамичности показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при гармоническом воздействии больше статического смещения.

$z = p/k$  – коэффициент расстройки, или относительная частота возмущающей силы. Получаем

$$\lambda = \frac{1}{\left|1 - z^2\right|}.$$

График этой зависимости представлен на рисунке 6.5.5. Этот результат не следует переносить на реальные системы

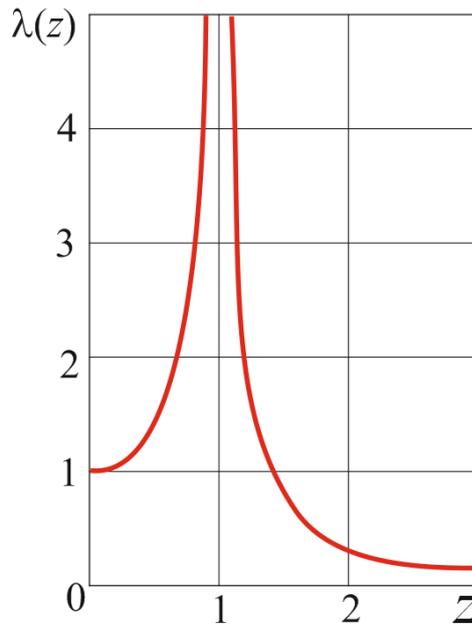


Рис. 6.5.5

### ***Резонанс. Биения***

В случае совпадения частоты возмущающей силы с частотой свободных колебаний (собственной частотой) возникает явление резонанса.

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила изменяется по закону  $Q = H \cos pt$ , тогда уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид:

$$q = A \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \cos pt.$$

Определяя  $A$  и  $\alpha$  при нулевых начальных условиях, получим

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

В итоге

$$q = \frac{h}{k^2 - p^2} (\cos pt - \cos kt) = \frac{2h}{k^2 - p^2} \sin \frac{(k-p)t}{2} \sin \frac{(k+p)t}{2}.$$

Обозначим

$$A'(t) = \frac{2h}{k^2 - p^2} \sin \frac{(k-p)t}{2} = \frac{2h}{(k+p)(k-p)} \sin \frac{(k-p)t}{2}.$$

Теперь

$$q = A'(t) \sin \frac{k+p}{2} t$$

При  $p \rightarrow k \Rightarrow A'(t) = \frac{2h}{2k\delta} \sin \delta t$ , где  $\delta = \frac{k-p}{2}$  и  $\frac{k+p}{2} \rightarrow k$ .

Получаем

$$q = A'(t) \sin kt.$$

Анализируя решение, можно сделать вывод, что получили наложение вынужденных колебаний с довольно малой частотой  $\delta$  на собственные колебания с частотой  $k$ . Движение можно представить как колебания с частотой  $\frac{p+k}{2} \approx k$  и амплитудой  $A'(t)$ , которая является периодической функцией с периодом  $\tau' = \frac{2\pi}{\delta} \gg \tau = \frac{2\pi}{k}$  значительно большим периода собственных колебаний. Это т.н. биения (рис. 6.5.6).

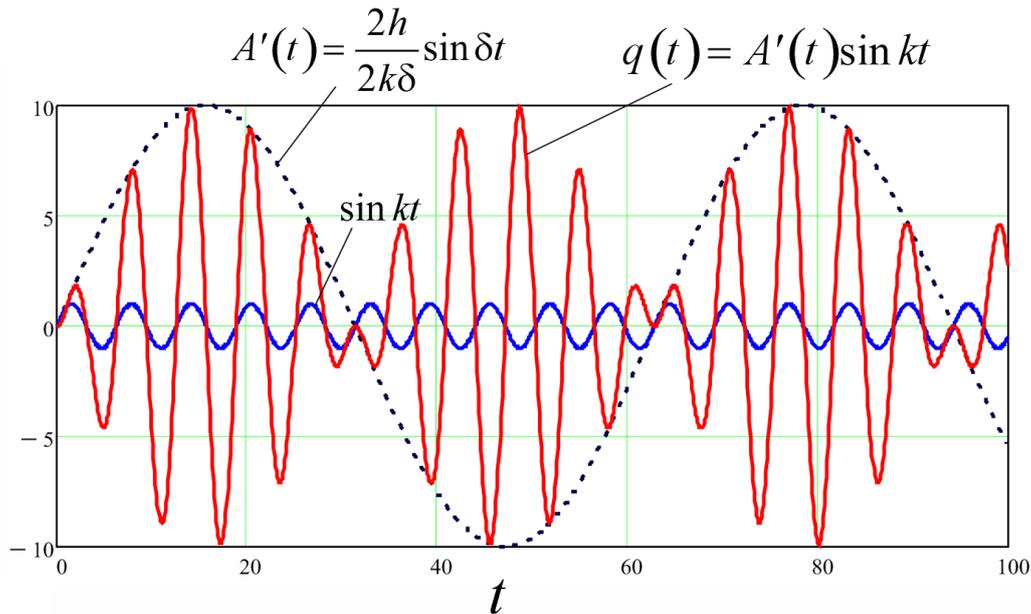


Рис. 6.5.6

При резонансе (рис. 6.5.7)

$$\lim_{p \rightarrow k} A'(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{ht}{k\delta} \sin \delta t = \frac{ht}{k};$$

$$q(t) = \frac{ht}{k} \sin kt.$$

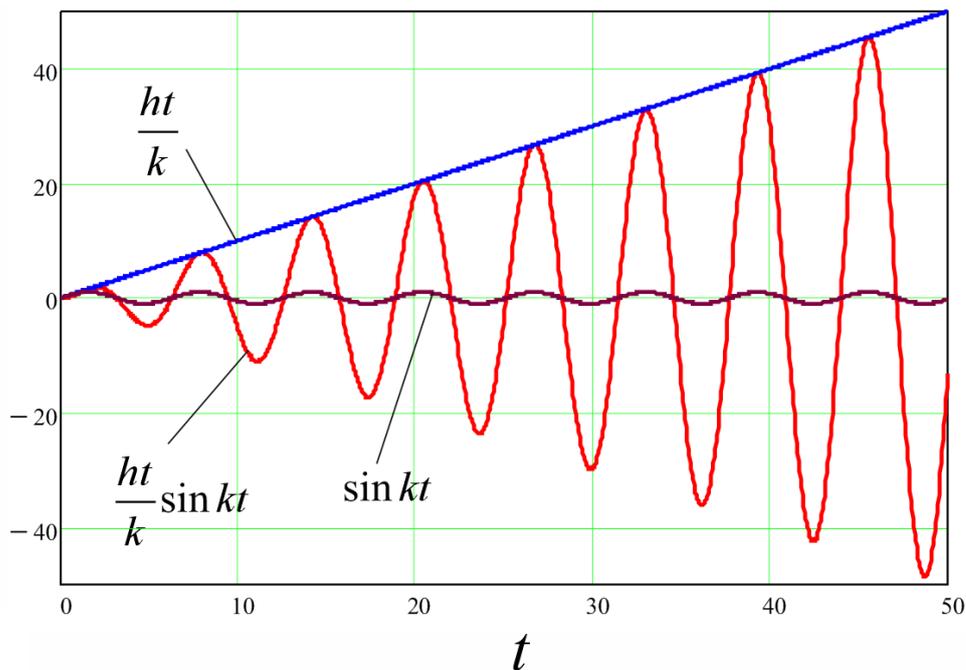


Рис. 6.5.7

С одной стороны, вынужденные колебания при резонансе смещены по фазе от возмущающей силы на  $\pi/2$ . С другой стороны, можно заметить, что вынужденные колебания при резонансе происходят с нарастающей пропорционально времени амплитудой.

## 6.6. Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления

При гармоническом возбуждении дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = H \sin(pt + \beta),$$

или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \sin(pt + \beta),$$

где  $2n = \frac{\mu}{a}$ ,  $k^2 = \frac{c}{a}$ ,  $h = \frac{H}{a}$ .

Решение будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения  $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0$  и частного решения неоднородного.

$$q = q_1 + q^*.$$

Было показано, что общее решение однородного уравнения  $q_1$  может быть представлено в зависимости от соотношения между  $n$  и  $k$  в одной из трех форм:

$$q_1 = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) \quad \text{при } n < k;$$

$$q_1 = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}) \quad \text{при } n > k;$$

$$q_1 = e^{-nt} (C_1 t + C_2) \quad \text{при } n = k.$$

Частное решение уравнения представим в виде

$$q^* = B \sin(pt + \beta - \varepsilon).$$

Постоянные  $B$  и  $\varepsilon$  определяют подставляя  $q^*$ ,  $\dot{q}^*$  и  $\ddot{q}^*$  в исходное дифференциальное уравнение.

В итоге получим

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad \text{tg } \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Структура общего решения неоднородного уравнения такова, что при любых отличных от нуля значениях  $\varepsilon$  с течением времени из-за наличия множителя  $e^{-nt}$  оно стремится к нулю, и в решении остается только частное решение. В этом случае говорят об *установившихся вынужденных колебаниях*.

На основании решения можно сформулировать основные свойства установившихся вынужденных колебаний:

- это незатухающие колебания; они длятся так долго, как долго действует возмущающая сила;
- эти колебания не зависят от начальных условий;
- при гармоническом возбуждении они происходят с частотой возмущающей силы;
- эти колебания отстают по фазе от возмущающей силы на величину  $\varepsilon$ , изменяющуюся, как будет показано ниже, от 0 до  $\pi$ .

Амплитуда  $B$  установившихся вынужденных колебаний и сдвиг по фазе  $\varepsilon$  зависят от соотношения между частотами  $p$  и  $k$  и от коэффициента затухания  $n$ . Проанализируем эти зависимости, называемые *амплитудно-частотной* и *фазочастотной характеристиками*.

Для большей общности результатов перейдем к безразмерным параметрам.

Безразмерным коэффициентом затухания  $d$  называют отношение:  $d = 2n / k$ .

Если  $n \ll k$ , следовательно,  $\tau \approx \tau_1$ , то безразмерный коэффициент затухания можно связать с логарифмическим декрементом колебаний:

$$d = \frac{2n}{k} \frac{\tau_1}{\tau} \frac{\tau}{\tau_1} = \frac{2n\tau_1}{2\pi} \frac{\tau}{\tau_1} = \frac{\delta}{\pi} \frac{\tau}{\tau_1} \approx \frac{\delta}{\pi}.$$

Исследуем амплитуду  $B$  и сдвиг по фазе  $\varepsilon$  вынужденных колебаний.

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{h}{k^2 \sqrt{(1 - p^2 / k^2)^2 + 4n^2 p^2 / k^4}}.$$

Обозначим:

$\frac{p}{k}$  – коэффициент расстройки, или относительная частота;

$\frac{h}{k^2} = B_0$  – статическое смещение, смещение системы под действием постоянной возмущающей силы, равной по модулю амплитуде возмущающей силы.

Отношение  $\frac{B}{B_0} = \lambda$  – коэффициент динамичности при наличии вязкого сопротивления.

Исследуем зависимость коэффициента динамичности  $\lambda$  от  $z$  и  $d$ , представляющую собой амплитудно-частотную характеристику системы в безразмерном виде:

при  $z \rightarrow \infty \lambda \rightarrow 0$ ;

при  $z \rightarrow 1 \lambda = \frac{1}{d}$ .

В отличие от случая отсутствия вязкого сопротивления, амплитуда при резонансе имеет конечное значение.

Если частота  $p$  изменения возмущающей силы мала по сравнению с частотой со свободных колебаний, т. е.  $p \ll k$ , то амплитуда вынужденных колебаний близка к статическому смещению, а коэффициент динамичности бли-

зок к единице. Если же  $p \gg k$ , то колебательная система ведет себя как фильтр, т. е. практически не воспринимает возмущения с частотами, существенно превышающими собственную частоту.

Выражение для коэффициента динамичности показывает, что при малых значениях  $d$  вязкое сопротивление становится существенным лишь в достаточно узкой зоне в окрестности резонанса, когда величина  $d^2 z^2$  становится соизмеримой с  $(1 - z^2)^2$ . Это же демонстрирует график 6.6.1. Поэтому при определении амплитуды вынужденных колебаний в реальных системах с малым вязким сопротивлением последнее можно не учитывать, если известно, что частота  $p$  возмущающей силы далека от собственной частоты  $k$ .

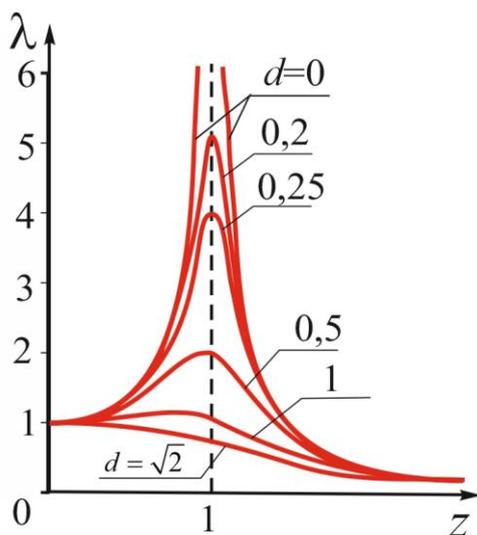


Рис. 6.6.1

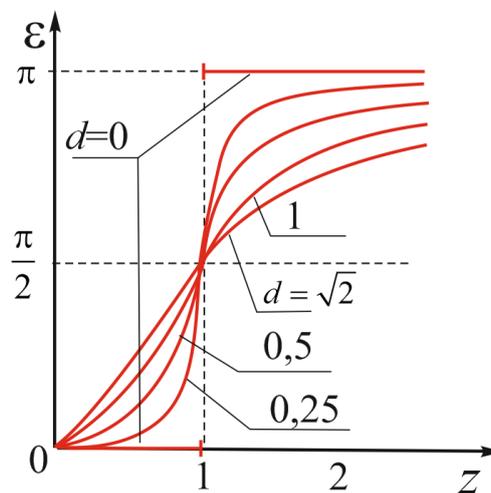


Рис. 6.6.2

Для исследования фазочастотной характеристики в безразмерном виде разделим числитель и знаменатель аргумента арктангенса на  $k^2$ :

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2} = \operatorname{arctg} \frac{2dz}{1 - z^2}.$$

Учтем, что производная  $\varepsilon(z)$  по  $z$  независимо от значения  $d$  (кроме  $d = 0$ ) положительна при всех значениях  $z$ , т. е.  $\varepsilon(z)$  представляет собой монотонно возрастающую функцию. Тогда при  $z = 0 \Rightarrow \varepsilon = \operatorname{arctg}(0) = 0$ ;

$$\text{при } z = 1 \Rightarrow \varepsilon = \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon = \operatorname{arctg}(-0) = \pi.$$

Отметим, что при резонансе фазовое запаздывание  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$  независимо от значения коэффициента  $d$ , характеризующего вязкое сопротивление.

На рисунке 6.6.2 представлены кривые, характеризующие зависимость  $\varepsilon(z)$  при различных значениях  $d$ . При  $d = 0$  (отсутствие вязкого сопротивления)  $\varepsilon(z)$  представляет собой разрывную функцию. Отметим, что с ростом  $d$  меняется характер фазовой кривой, она трансформируется из кривой с двумя перегибами в кривую с одним перегибом.

# Библиографический

## СПИСОК

1. Сахарный, Н.Ф. Курс теоретической механики / Н.Ф. Сахарный. – М.: Высш. шк., 1964. – 611 с.
2. Ишлинский А.Ю. Механика относительного движения и силы инерции. М.: Наука, 1981, 191 с.
3. Физический энциклопедический словарь / гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – 944 с.
4. Теоретическая механика. Динамика точки: курс лекций / С.И. Пономарева, Ю.Г. Прядко, О.Г. Худякова, Е.П. Черногорov. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2002. – 56 с.
5. Пономарева, С.И. Теоретическая механика. Общие теоремы динамики: курс лекций / С.И. Пономарева, Ю.Г. Прядко, Е.П. Черногорov. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 78 с.
6. Теоретическая механика. Геометрия масс. Курс лекций / Прядко Ю.Г., Караваев В.Г., Черногорov Е.П. - Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2002. – 54 с.

# Оглавление

Введение .....	1
1. Динамика точки .....	2
1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ .....	2
1.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ .....	4
1.3. ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ .....	9
1.4. ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ .....	11
1.5. ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ И ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ .....	14
2. Геометрия масс .....	19
2.1. ЦЕНТР МАСС. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ .....	19
2.2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ .....	22
2.3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ. ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА .....	26
2.4. ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОСТЕЙШЕЙ ФОРМЫ .....	27
2.5. ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ .....	29
2.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ .....	33
2.7. ЭЛЛИпсоИД ИНЕРЦИИ .....	35
3. Общие теоремы динамики .....	39
3.1. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ .....	40
3.2. ТЕОРЕМЫ О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ .....	41
3.3. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ .....	52
3.4. ТЕОРЕМЫ О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ .....	60
3.5. РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛЫ .....	67
3.6. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ .....	74
3.7. ТЕОРЕМЫ О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ .....	78
3.8. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ .....	83
3.9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ .....	90
3.10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА .....	92
4. Принцип Даламбера .....	103
4.1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ .....	103
4.2. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ .....	109
4.3. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ ИНЕРЦИИ ЧАСТИЦ ТВЕРДОГО ТЕЛА .....	111
4.4. ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ ЧАСТИЦ ТВЕРДОГО ТЕЛА К ЦЕНТРУ .....	113
4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ОПОР .....	117
5. Элементы аналитической механики .....	122
5.1. МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. СВЯЗИ .....	122
5.2. ОБОБЩЁННЫЕ КООРДИНАТЫ. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ .....	124
5.3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ .....	126
5.4. ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ .....	127
5.5. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА – ЛАГРАНЖА .....	128
5.6. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ В ОБОБЩЁННЫХ КООРДИНАТАХ .....	129

5.7. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА.....	130
5.8. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ.....	133
<b>6. Малые колебания механических систем.....</b>	<b>136</b>
6.1. Устойчивость положения равновесия.....	136
6.2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.....	141
6.3. ЛИНЕЙНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ.....	147
6.4. Влияние линейного сопротивления на малые собственные колебания системы с одной СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.....	150
6.5. Вынужденные колебания линейной системы с одной степенью свободы.....	154
6.6. Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления.....	162
<b>Библиографический список.....</b>	<b>167</b>